

DISTRIBUCIÓN DE FASES EN FLUJO BUBBLY LAMINAR COMPLETAMENTE DESARROLLADO

Oswaldo Azpitarte y Gustavo C. Buscaglia
Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro, 8400 Bariloche, Argentina

RESUMEN

En el presente trabajo se analiza la distribución de fases en un flujo *bubbly* aire-agua, vertical, laminar, totalmente desarrollado y en geometría cilíndrica. Se utiliza el *modelo de dos fluidos*, que comprende las ecuaciones de conservación de masa y de momento para cada fase, y las denominadas *leyes de cierre*. Se muestra que es posible reducir el sistema de ecuaciones a una sola ecuación adimensional. El análisis de sus soluciones mejora la comprensión conceptual del flujo. Se muestra que la fracción de gas en la zona central del conducto debe ser tal que la densidad efectiva equilibre el gradiente de presión impuesto. El gas expulsado de la región central se acumula en la pared del conducto.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to analyze the phase distribution of an air-water, adiabatic, vertical, laminar, fully developed, bubbly flow in a cylindrical pipe. A two-fluid model is used, including equations for the conservation of mass and momentum, and the so-called *closure laws*. It is shown that the entire system can be collapsed into one single non-dimensional equation. The analysis of its solutions improves the understanding of the flow. It is shown that the gas fraction in the central region of the duct must adjust so that its weight equilibrates the imposed pressure gradient. The gas leaving the central region concentrates near the walls.

1.- INTRODUCCION

La determinación de velocidades y distribuciones de fase de flujos bifásicos en conductos verticales es un tema de sumo interés en el estudio y diseño de reactores nucleares, intercambiadores de calor, reactores químicos, etc..

Antes de encarar el tratamiento numérico detallado de un problema tan complejo y acoplado, es necesario, además de tener un conocimiento acabado del modelo a utilizar, comprender conceptualmente la dinámica del flujo. En ese sentido, el análisis de un caso unidimensional como el presentado aquí, brinda una imagen muy clara de esa dinámica, permitiendo encarar mejor el tratamiento numérico de casos más complejos.

El *modelo de dos fluidos* (Ishii, 1975) plantea las ecuaciones de conservación de masa y momento para cada fase, y un conjunto de *leyes de cierre* (intercambio de momento entre las fases). Estas leyes son el núcleo del modelo y algunas de ellas son motivo aún de controversia. Distintos autores las han estudiado, entre ellos: Ishii Mishima (1984), Drew Lahey (1987), Legendre Magnaudet (1998), etc.. En el presente caso (flujo *bubbly* aire-agua, adiabático, vertical, laminar, totalmente desarrollado, en geometría cilíndrica), un antecedente importante es Antal et al. (1991), quienes resolvieron numéricamente las ecuaciones y ajustaron los datos experimentales de Nakoryakov et al. (1986). En este trabajo, llevamos la manipulación algebraica más allá de lo realizado por Antal et al., hasta obtener una única ecuación diferencial que determina los perfiles de fracción de gas. Esta ecuación concentra todos los coeficientes (lift, drag, etc..) en las escalas de adimensionalización, y de sus soluciones se obtiene una imagen muy clara de la mecánica del flujo. Esta puede resumirse así: la fracción de gas en la zona central, prácticamente constante en un gran porcentaje de la sección, es tal que la densidad efectiva equilibra con su peso al gradiente de presión impuesto.

2.- Sistema de ecuaciones

Modelo de dos fluidos :

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{v}_k) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k \vec{v}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{v}_k \vec{v}_k) = \nabla \cdot [\alpha_k (T_k + \tau_k^T)] + \alpha_k \rho_k \vec{g} + M_k \quad (2)$$

τ_k^T : turbulencia inducida por fase gaseosa

$$T_k = -p_k I + \tau_k \quad ; \quad \tau_k = \mu_k [\nabla \vec{v}_k + (\nabla \vec{v}_k)^T] \quad ; \quad M_k = p_{ki} \nabla \alpha_k - \tau_{ki} \cdot \nabla \alpha_k + M'_k \quad (3)$$

El subíndice k indica la fase (L : líquida, G : gas), y el subíndice i indica el valor en la interfase.

Considerando un sistema de coordenadas cilíndrico (\mathbf{r} , θ , \mathbf{z}) y condición de flujo totalmente desarrollado :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \vec{v}_{Lr} = \vec{v}_{Gr} = \vec{v}_{L\theta} = \vec{v}_{G\theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p_L}{\partial z} = \frac{\partial p_G}{\partial z} = \text{constante} \quad (4)$$

$$\vec{v}_{Lz} = \vec{v}_{Lz}(r) \quad ; \quad \vec{v}_{Gz} = \vec{v}_{Gz}(r) \quad ; \quad \alpha_k = \alpha_k(r) \quad (5)$$

Las ecuaciones de conservación de masa quedan reducidas a la solución trivial.

La ecuación de momento del gas se simplifica si se desprecian los efectos viscosos.

$$\tau_G = \tau_G^T = \tau_{Gi} = 0 \quad (6)$$

Las ecuaciones de conservación de momento quedan reducidas a :

$$-\alpha \nabla p_G + \alpha \rho_G \vec{g} + M'_G = 0 \quad (7)$$

$$-\alpha_L \nabla p_L + \nabla \cdot [\alpha_L (\tau_L - \tau_L^T)] + (p_{Li} - p_L) \nabla \alpha_L + \alpha_L \rho_L \vec{g} + M'_L - \tau_{Li} \cdot \nabla \alpha_L = 0 \quad (8)$$

3.- Relaciones de cierre

M'_k = fuerza axial de drag (M_k^d) + fuerza lateral de lift (M_k^L) + fuerza lateral de pared (M_k^W)

· Fuerza de drag (Ishii Mishima, 1984)

$$M_G^d = -M_L^d = -\frac{3}{8} \frac{\alpha_G}{R_b} C_D \rho_L (\vec{v}_G - \vec{v}_L) |\vec{v}_G - \vec{v}_L| \quad (9)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.1 Re^{0.75}) \quad ; \quad Re = \frac{2R_b \rho_L |\vec{v}_G - \vec{v}_L|}{\mu_m} \quad ; \quad \mu_m = \frac{\mu_L}{(1 - \alpha_G)} \quad (10)$$

· Fuerza de lift (Drew Lahey, 1987)

$$M_G^L = -M_L^L = C_L \alpha_G \rho_L (\vec{v}_L - \vec{v}_G) \wedge (\nabla \wedge \vec{v}_L) \quad ; \quad C_L \text{ entre } 0.01 \text{ y } 0.5 \quad (11)$$

· Fuerza lateral de pared (Antal et al. , 1991)

$$M_G^W = -M_L^W = \frac{\alpha_G \rho_L |u_{||}|^2}{R_b} \left[C_{W1} + C_{W2} \left(\frac{R_b}{y_0} \right) \right] \vec{n}_w \quad (12)$$

$$u_{||} = (\vec{v}_G - \vec{v}_L) \cdot [\vec{n}_w \cdot (\vec{v}_G - \vec{v}_L)] \vec{n}_w \quad ; \quad C_{W1} = -0.1 \quad ; \quad C_{W2} = 0.147 \quad (13)$$

$y_0 := (R-r)$ (R : radio del conducto); \tilde{n}_w : versor normal ; R_b : radio de burbuja

· Turbulencia inducida por fase gaseosa (Nigmatulin, 1979)

$$\tau_L^T = -\alpha_G \rho_L \left[A |\tilde{v}_G - \tilde{v}_L|^2 I + B(\tilde{v}_G - \tilde{v}_L)(\tilde{v}_G - \tilde{v}_L) \right] ; \quad A = \frac{3}{20} \quad B = \frac{1}{20} \quad (14)$$

· Presión de la fase líquida en la interfase (p_{Li})

$$p_{Li} - p_L = -C \rho_L \alpha_L |\tilde{v}_G - \tilde{v}_L|^2 ; \quad C = \frac{1}{4} \quad (15)$$

· Presión de la fase gaseosa en la interfase (p_{Gi})

$$p_{Gi} - p_G \approx 0 \quad (16)$$

· Tensión de corte interfacial (τ_{Li})

$\tau_{Li} = \tau_L + \tau_L^T$ (evaluadas en la superficie de la burbuja)

$$\tau_{Li} = \mu_L [\nabla \tilde{v}_L + (\nabla \tilde{v}_L)^T] - \rho_L \left[A |\tilde{v}_G - \tilde{v}_L|^2 I + B(\tilde{v}_G - \tilde{v}_L)(\tilde{v}_G - \tilde{v}_L) \right] \quad (17)$$

· Relación entre la presión local de la fase líquida y la presión local de la fase gaseosa

$$p_G - p_L = \frac{2\sigma}{R_b} - C \rho_L (1 - \alpha_G) |\tilde{v}_G - \tilde{v}_L|^2 \quad (18)$$

4.- Sistema de ecuaciones resultante

· Ecuación de momento de gas en r

$$\alpha_G \left[\frac{\partial p_G}{\partial r} + C_L \rho_L v_r \frac{\partial v_L}{\partial r} + \frac{\rho_L v_r^2}{R_b} (C_{W1} + C_{W2} \frac{R_b}{(R-r)}) \right] = 0 ; \quad v_r = (v_G - v_L) \quad (19)$$

· Ecuación de momento de gas en z (a partir de esta ecuación se calcula v_r)

$$\alpha_G \frac{\partial p_G}{\partial z} = -\alpha_G \rho_G g - \frac{3}{8} \frac{\alpha_G}{R_b} C_D \rho_L v_r |v_r| \quad (20)$$

· Ecuación de momento de líquido en r

$$\alpha_L \frac{\partial p_L}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[A \rho_L \alpha_L (1 - \alpha_L) v_r^2 \right] + C_L \alpha_G \rho_L v_r \frac{\partial v_L}{\partial r} + C \rho_L (1 - \alpha_G) v_r^2 \frac{\partial \alpha_G}{\partial r} + \frac{\alpha_G \rho_L v_r^2}{R_b} (C_{W1} + C_{W2} \frac{R_b}{(R-r)}) - A \rho_L v_r^2 \frac{\partial \alpha_G}{\partial r} \quad (21)$$

· Ecuación de momento de líquido en z

$$\alpha_L \frac{\partial p_L}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \alpha_L \mu_L \frac{\partial v_L}{\partial r} \right] + \frac{3}{8} \frac{\alpha_G}{R_b} C_D \rho_L v_r |v_r| - \alpha_L \rho_L g + \mu_L \frac{\partial v_L}{\partial r} \frac{\partial \alpha_G}{\partial r} \quad (22)$$

· Condición de salto en la interfase

$$p_G - p_L = \frac{2\sigma}{R_b} - C \rho_L (1 - \alpha_G) v_r^2 \quad (23)$$

El sistema resultante es de 5 ecuaciones con 5 incógnitas : $v_L(r)$, $v_G(r)$, $p_L(r, z)$, $p_G(r, z)$, $\alpha(r)$

5.- Reducción del sistema de ecuaciones

Si se despeja la fuerza de drag de la ecuación (20), y se la reemplaza en (22), y definiendo además :

$$\rho \equiv \rho_{eff} = \alpha_L \rho_L + \alpha_G \rho_G \quad ; \quad \bar{\rho} \equiv \frac{1}{A} \int_A \rho \, dA \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial p}{\partial z} + \bar{\rho} g \quad (24)$$

A: área de la sección transversal del conducto

y notando que $\alpha_L = \frac{\rho - \rho_G}{\rho_L - \rho_G}$, se llega a :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + (\rho - \bar{\rho})g = \frac{(\rho - \rho_G)}{(\rho_L - \rho_G)} \frac{\mu_L}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_L}{\partial r} \right) \quad (25)$$

Reemplazando las ecuaciones (21) y (18) en la (19), y multiplicando por $\frac{\alpha_L}{\rho_L v_r}$, se obtiene :

$$2 \frac{(\rho - \rho_G)}{(\rho_L - \rho_G)} \frac{1}{(\rho_L - \rho_G)} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{C_L}{(C - A)v_r} \frac{\partial v_L}{\partial r} + \frac{1}{R_b(C - A)} (C_{W1} + C_{W2} \frac{R_b}{R - r}) \quad (26)$$

Si se despeja $\frac{\partial v_L}{\partial r}$ de la ecuación (26) y se reemplaza el resultado en la ecuación (25), y definiendo las variables adimensionales :

$$\frac{\partial P^*}{\partial z} = \frac{1}{(\rho_L - \rho_G)g} \frac{\partial P}{\partial z} \quad ; \quad L^2 = \frac{2\mu_L v_r (C - A)}{g(\rho_L - \rho_G)C_L} \quad ; \quad D = \frac{C_{W2}}{2(C - A)} \quad (27)$$

$$E = \frac{C_{W1}}{2(C - A)R_b^*} \quad ; \quad r^* = \frac{r}{L} \quad ; \quad R^* = \frac{R}{L} \quad ; \quad R_b^* = \frac{R_b}{L} \quad (28)$$

se llega a la ecuación

$$\frac{\partial P^*}{\partial z} - \bar{\alpha}_L = (\alpha_L)^2 \frac{\partial^2 \alpha_L}{\partial r^{*2}} + \alpha_L \left(\frac{\partial \alpha_L}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{(\alpha_L)^2}{r^*} \frac{\partial \alpha_L}{\partial r^*} - \alpha_L - \frac{\alpha_L}{r^*} \left[D \frac{R^*}{(R^* - r^*)^2} + E \right] \quad (29)$$

Reemplazando

$$\frac{\partial P^*}{\partial z} - \bar{\alpha}_L = -\alpha_L(0)(1 + \varepsilon) \quad (30)$$

con $\alpha_L(0)$ y ε parámetros, se obtiene la ecuación definitiva

$$-\alpha_L(0)(1 + \varepsilon) = (\alpha_L)^2 \frac{\partial^2 \alpha_L}{\partial r^{*2}} + \alpha_L \left(\frac{\partial \alpha_L}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{(\alpha_L)^2}{r^*} \frac{\partial \alpha_L}{\partial r^*} - \alpha_L - \frac{\alpha_L}{r^*} \left[D \frac{R^*}{(R^* - r^*)^2} + E \right] \quad (31)$$

Obtenida la función $\alpha_L(r^*)$ se calcula la velocidad de la fase líquida a partir de la ecuación (25)

$$-\alpha_L(0)(1 + \varepsilon) = \alpha_L \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) - \alpha_L \quad ; \quad v^* = \frac{v_L}{v_r} \frac{C_L}{2(C - A)} \quad (32)$$

Sobre la ecuación (31) se deben hacer las siguientes consideraciones :

- las constantes D y E se anulan a una distancia muy corta de la pared, para $r^* \leq R^* + \frac{D}{E}$
- El flujo es ascendente cuando ε es positivo, descendente cuando es negativo, y cuando ε es nulo se obtiene la solución trivial $\alpha_L(r^*) = \bar{\alpha}_L$ y $v^*(r^*) = 0$ (gas burbujeando en líquido estanco).

6.- Soluciones de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial (31) no puede resolverse en forma analítica por lo que se obtuvieron soluciones utilizando un resolvidor numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las Figuras 1 y 2 muestran $\alpha_G(r^*)$ y $v^*(r^*)$ correspondientes a $\alpha_G(0) = 0.016$ y $\varepsilon = 0.001, 0.0001$ y

0.00001, sin considerar fuerza de pared ($D=E=0$). La fuerza lateral de lift empuja a las burbujas hacia la pared del conducto. La fracción de gas se mantiene aproximadamente constante para luego crecer rápidamente cerca de la pared del conducto. El radio del conducto aumenta cuando ε disminuye. Para conductos de interés práctico el valor de ε es muy pequeño ($\varepsilon \leq 10^{-6}$), por lo que se concluye (ec. (30)) que el gradiente de presión impuesto prácticamente equilibra el peso de la columna central de mezcla.

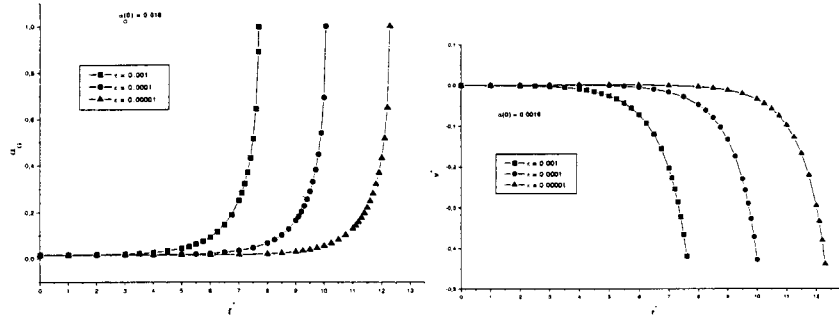


Figura 1: $\alpha_G(r^*)$ para $\alpha_G(0) = 0.016$ y distintos ε

Figura 2: $v^*(r^*)$ para $\alpha_G(0) = 0.016$ y distintos ε

La Figura 3 muestra $\alpha_G(r^*)$ para $\alpha_G(0) = 0.016$, $\varepsilon = 0.001$ y distintos R^* , incluyendo el modelo de fuerza de pared. Puede verse que el efecto de la pared es muy localizado, por lo que las conclusiones anteriores no se ven afectadas.

La Figura 4 muestra una comparación entre datos experimentales (Nakoryakov, 1986) ($R = 0.0075$ m, $R_b = 0.000435$ m, $Re = 1267$ y $\overline{\alpha_G} = 0.019$) y el resultado numérico obtenido de la ecuación (31) con $\alpha_G(0) = 0.012$ (tomado de los datos experimentales) y $\varepsilon = 2.10^{-7}$ (valor ajustado). La bondad del ajuste es evidente (la fracción de gas no cae a cero en la pared porque el cálculo fue hecho sin fuerza de pared). Esto confirma que ε debe tomar valores muy pequeños.

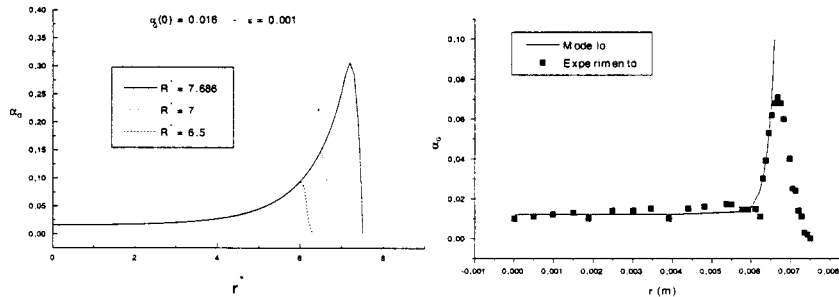


Figura 3: $\alpha_G(r^*)$ para distintos R^*

Figura 4: Comparación de datos experimentales con cálculos numéricos

7.- Curvas de flujo volumétrico

Variando paramétricamente los valores de ε y $\alpha_L(0)$, para un valor determinado de R^* , se pueden obtener curvas de nivel correspondientes a los caudales volumétricos adimensionales (j_L^* y j_G^*).

$$j_G^* = \int_0^{R^*} \alpha_G(r^*) v_G(r^*) 2\pi r^* dr^* ; \quad j_L^* = \int_0^{R^*} \alpha_L(r^*) v_L(r^*) 2\pi r^* dr^* \quad (33)$$

La Figura 5 muestra la curvas de nivel de j_L^* y j_G^* en función de ε y $\alpha_L(0)$ para $R^*=15$. Buscando el punto donde se intersectan las curvas de nivel de los caudales, se obtienen los valores de ε y $\alpha_L(0)$ con que se calculan los perfiles de fracción de gas y de velocidad.

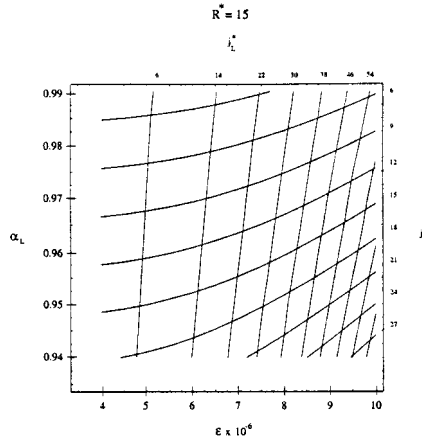


Figura 5: Curvas de nivel de j_L^* y j_G^* para $R^*=15$

REFERENCIAS

- [1] S. Antal, R. Lahey, and J. Flaherty. Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 17(5):635-652, 1991.
- [2] D. Drew and R. Lahey. The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 13(1):113-121, 1987.
- [3] V. E.Ñakoryakov et al. Study of upward bubbly flow at low liquid velocities. *Izv. sib. Otdel. Akad. Nauk SSSR.*, 16:15-20, 1986.
- [4] M. Ishii. *Thermo-fluid Dynamic Theory of Two-phase Flow*. Eyrolles, 1975.
- [5] M. Ishii and K. Mishima. Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. *Nuclear Eng. and Design*, 82:107-126, 1984.
- [6] D. Legendre and J. Magnaudet. The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.*, 368:81-126, 1998.
- [7] R.Ñigmatulin. Spatial averaging in the mechanics of heterogeneous and dispersed systems. *Int. J. Multiphase Flow*, 4:353-385, 1979.