

## **ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA EVOLUCIÓN TEMPORAL DE INTERFASES LÍQUIDO GAS EN CHORROS DE FLUIDOS Y EN RECUBRIMIENTOS LÍQUIDOS SOBRE SUPERFICIES CILÍNDRICAS.**

**Diego M. Campana\* y Fernando J.A. Saita**

Fac. de Ing. Química. INTEC (UNL – CONICET)

Güemes 3450. 3000. Santa Fe, Argentina

\* e-mail: dimaca@hotmail.com

**Carlos M. Corvalán**

Facultad de Ingeniería – UNER

Ruta Prov. No. 11 KM. 10, 3101. Oro Verde, Entre Ríos, Argentina

### **RESUMEN**

Se analiza numéricamente la inestabilidad de chorros y películas delgadas depositadas sobre sustratos cilíndricos. La técnica utilizada resuelve las ecuaciones gobernantes en forma simultánea para cada paso de tiempo. Los resultados obtenidos concuerdan con publicaciones previas y constituyen una primera etapa en el análisis de estos problemas en presencia de agentes surfactantes.

### **ABSTRACT**

The instability of jets and thin films deposited onto cylindrical substrates is analyzed numerically. The technique employed simultaneously solves the governing equations at each time step. The results obtained agree with those previously published and they are the first step toward analyzing this problems when surface active agents are present.

### **INTRODUCCIÓN**

Se conocen como fenómenos de inestabilidad capilar a aquellos donde las fuerzas de tensión superficial, actuando en una o más interfases, toman inestable el estado original (o flujo base) de un sistema dado. Un ejemplo cotidiano es la inestabilidad que experimenta un chorro de agua (jet), expulsado desde una boquilla hacia un medio, el cual se rompe en gotas; otro caso similar, consiste en la ondulación que sufre una película de fluido depositada como un recubrimiento inicialmente uniforme sobre un cable cilíndrico. Estos y otros fenómenos capilares son de gran interés, por sus numerosas aplicaciones industriales. Como ejemplos, la inestabilidad en chorros fluidos se aprovecha en el funcionamiento de impresoras de chorro de tinta mientras que la ondulación de recubrimientos es un fenómeno indeseable en los procesos de aislación de cables metálicos con polímeros. El análisis de estos procesos, comenzó con la aplicación de la teoría de estabilidad lineal ([1], [2], [3] y [4] entre los más destacados). Posteriormente, se formularon análisis no lineales y modelos evolutivos simplificados (1-D) para estudiar el comportamiento de la interfase durante la inestabilidad [5]. Por

último, el desarrollo de nuevas técnicas numéricas y la mayor potencia de cálculo de las computadoras permitió la simulación numérica directa de estos fenómenos ([6] y [7]).

En este trabajo se resuelve numéricamente la evolución temporal de una perturbación interfacial, aplicada tanto a un chorro de líquido como a una película depositada sobre un sustrato cilíndrico: en ambos casos se consideran despreciables los efectos gravitatorios. El objetivo es evaluar comparativamente la técnica numérica que los autores y otros integrantes del grupo de fenómenos interfaciales del INTEC emplean en este tipo de problemas [8], con la técnica denominada "Height Flux Method" desarrollada por Ashgriz y Mashayek [9]. Esta tarea se debe considerar como un paso previo al desarrollo de un método eficiente que permitirá analizar la evolución temporal de sistemas con interfaces líquido-gas en presencia de agentes surfactantes; es decir con propiedades interfaciales variables y dependientes de la concentración local de tensioactivo.

### FORMULACIÓN MATEMÁTICA

A continuación se presenta en detalle el sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento temporal de una película de líquido depositada sobre un cilindro sólido; mostrándose luego las modificaciones adecuadas para la simulación de chorros. Se considera entonces un fluido incompresible y newtoniano con tensión superficial constante en la interfase líquido-gas (suponiendo además a la fase gaseosa como inviscida y con presión constante), el cual se encuentra depositado sobre un sustrato sólido cilíndrico. La simetría del problema permite considerar sólo media longitud de onda del dominio perturbado, mostrado en la Figura 1.

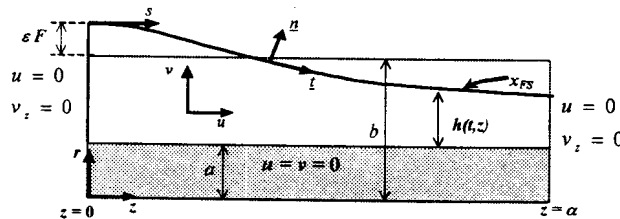


Figura 1: Representación del dominio, condiciones de contorno y sistema coordenado adoptado. La zona sombreada representa el cilindro sólido, siendo  $a$  su radio. Además,  $h(t, z)$  indica la posición interfacial como función del tiempo y la distancia axial.

Las siguientes magnitudes se seleccionaron como escalas características del problema:  $b$  para longitud y  $[F^3 \sigma / \mu^2]$  para velocidad [10], siendo  $b$  el radio inicial de la interfase no perturbada,  $\sigma$  la tensión superficial,  $\mu$  la viscosidad y  $F = (b - a)/b$  el espesor inicial de fluido. De esta manera, las ecuaciones adimensionales 2-D que gobiernan el comportamiento del flujo son la conservación de masa

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1)$$

y la conservación de cantidad de movimiento

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = \nabla \cdot \underline{T} \quad (2)$$

con

$$\underline{T} = -p\underline{I} + (\nabla v + \nabla v^T) \quad (3)$$

En ellas,  $v$  es la velocidad del fluido,  $Re = \rho \sigma b F^3 / \mu^2$  es el número de Reynolds (donde  $\rho$  representa la densidad),  $p$  es la presión e  $\underline{I}$  es el tensor identidad. Sobre la pared del filamento se imponen condiciones de no-deslizamiento y en la superficie libre, la fase inviscida no ejerce esfuerzo de corte, pero si una presión constante que se toma como referencia. La continuidad de los esfuerzos sobre la misma se expresa (en forma adimensional) como

$$\underline{n} \cdot \underline{T} = \frac{1}{Ca} \left( \frac{d\underline{t}}{ds} + \frac{\underline{n}(\underline{n} \cdot \underline{e}_r)}{r_{FS}} \right) \quad (4)$$

donde  $\underline{n}$  y  $\underline{t}$  son los versores normales y tangenciales a la interfase respectivamente,  $\underline{e}_r$  es el versor en la dirección radial,  $s$  es el parámetro longitud de arco al recorrer la interfase en la dirección del versor tangente y  $r_{FS}$  es el radio adimensional local de la misma. El número capilar, para la escala de velocidad elegida, toma la forma  $Ca = F^3$ . La posición de la superficie libre se desconoce a priori pero, tratándose de una superficie material, se debe cumplir

$$\underline{n} \cdot \underline{v}|_s = \underline{n} \cdot \underline{\dot{x}}_{FS} \quad (5)$$

ecuación conocida como condición cinemática. En ella,  $\underline{v}|_s$  representa la velocidad del fluido en la fase (evaluada en la interfase) y  $\underline{\dot{x}}_{FS}$  la velocidad de las partículas de fluido que pertenecen a la interfase. En los planos  $z = 0$  y  $z = \alpha = \pi / kb$  ( $kb = 2\pi b/L$  es el número de onda adimensional y  $L$  es la longitud de onda de la perturbación), se suponen condiciones de simetría; esto significa que no hay flujo ni esfuerzo de corte sobre ellos o de manera equivalente

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{v} = 0, \quad \underline{t} \cdot \underline{n} \cdot \underline{T} = 0. \quad (6)$$

Por último, la condición inicial se impone como una perturbación de tipo senoidal sobre un estado de reposo, como

$$H(z, 0) = F[1 + \varepsilon \cos(kb \cdot z)] \quad (7)$$

siendo  $\varepsilon$  un parámetro que representa la amplitud máxima de la perturbación referida al espesor inicial. La resolución en el tiempo de las ecuaciones 1 a 7 describe, bajo las hipótesis planteadas, la evolución temporal de la perturbación axisimétrica de la película que recubre el filamento cilíndrico.

Para la simulación de un chorro o jet, se supone que este fluye en un medio inviscido en forma estacionaria con velocidad axial uniforme, tal que se puede definir un eje coordenado desplazándose a esta velocidad y trabajar como si el sistema estuviera fijo en el espacio. Las escalas características quedan como antes, con  $b$  indicando el radio de la interfase no perturbada. Por lo tanto, las ecuaciones 1 a 6 permanecen sin cambios, pero deben reemplazarse las condiciones de adherencia en la pared del cilindro por condiciones de simetría axial ya que ahora el eje de simetría se encuentra en el centro del chorro. Esto se formula como

$$v = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (8)$$

También cambia la condición inicial, impuesta según

$$H(z,0) = 1 + \varepsilon \cos(ka \cdot z) \quad (9)$$

ya que ahora  $F = 1$  ( $a = 0$ ).

### IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

El conjunto de ecuaciones no lineal, junto con las condiciones de contorno e inicial, se resolvió numéricamente discretizándolo con el Método de Elementos Finitos (MEF). La técnica numérica, bien conocida, es demasiado extensa para detallarla aquí. Sólo apuntaremos que se utiliza el método de los spines [11], que permite incluir la posición de la interfase dentro del sistema a resolver para determinar el campo de flujo (velocidad y presión). La iteración temporal se realiza según un lazo de Newton de un paso (Newton 1-step) como se describe en [12]. Detalles sobre esta implementación se pueden consultar en [8].

### RESULTADOS

En principio se mostrarán los resultados obtenidos correspondientes a chorros o jets y luego los de películas depositadas sobre sustratos cilíndricos. Como mostró Rayleigh ([1] y [2]), la perturbación en jets es inestable si  $kb < 1$ . En este trabajo se simularon dos casos típicos con mecanismos de ruptura bien definidos, que dependen del número de Reynolds. Los resultados se muestran en las Figuras 2 y 3, representando a un líquido de muy baja y muy alta viscosidad respectivamente ( $Re \gg 1$  y  $Re \ll 1$ ). Además de la evolución de la interfase, se grafica la presión en la fase líquida. La perturbación inicial genera una zona de baja presión donde la interfase posee un radio mayor. Cuando el  $Re$  es alto (Figura 2), el fluido circula con gran facilidad desde el centro ( $z = \alpha$ ) o línea de simetría hacia los extremos, debido a la baja viscosidad. La acumulación de fluido allí provoca un aumento en el gradiente de presión entre los lóbulos y el ligamento que los une. Luego, el fluido drena de estas zonas de unión a los lóbulos rápidamente, dando lugar a la ruptura. Nótese el incremento en el gradiente de presión en la zona de angostamiento, mientras que en los lóbulos la presión se mantiene casi constante.

Para el caso del chorro viscoso (Figura 3), por el contrario, la alta viscosidad dificulta el desplazamiento de fluido. La interfase mantiene su forma sinusoidal inicial (creciendo en amplitud) hasta las etapas finales, produciéndose la ruptura en el centro del dominio y sin formación de ligamento intermedio. La presión sigue una evolución similar. Esto evidencia un comportamiento lineal en las ecuaciones, debido al efecto despreciable de los términos inerciales. Los resultados de las Figuras 2 y 3 presentan una muy buena coincidencia, tanto en la forma interfacial como en el tiempo de la evolución, con los previamente publicados por Ashgriz y Mashayek en [6] y [7].

Con respecto a la desestabilización de una película líquida depositada sobre un cilindro, en la Figura 4 se presentan resultados al momento en que el espesor mínimo del film es el 1% del espesor uniforme original; es decir instantes previos al colapso de la película. En sentido horizontal, al movernos hacia la derecha, los resultados corresponden a líquidos de mayor viscosidad ( $Re$  menores) y en sentido vertical ascendente a espesores de película mayores.

Todos los resultados mostrados corresponden a media longitud de onda de la perturbación impuesta. En todos los casos el número de onda adimensional y la amplitud de la perturbación fueron  $kb = 0.5$  y  $\varepsilon = 0.05$  respectivamente. Estas simulaciones se compararon con las publicadas en [7] y en todas ellas se encontró una excelente coincidencia en la forma que adopta la interfase durante la evolución, aunque existen algunas diferencias en los tiempos necesarios para alcanzar dichas configuraciones.

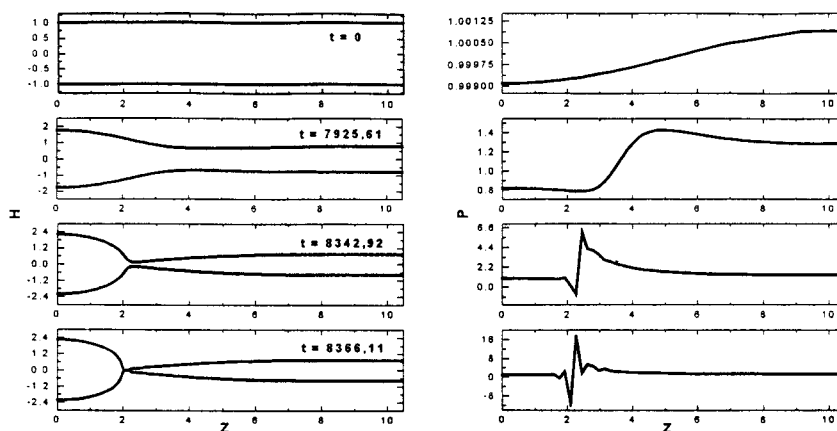


Figura 2: Evolución temporal de un jet de agua ( $Re=109693,44$ ,  $kb=0,3$  y  $\varepsilon=0,001$ ). A la izquierda, forma de la interfase para los tiempos adimensionales indicados y a la derecha, presión en el fluido.

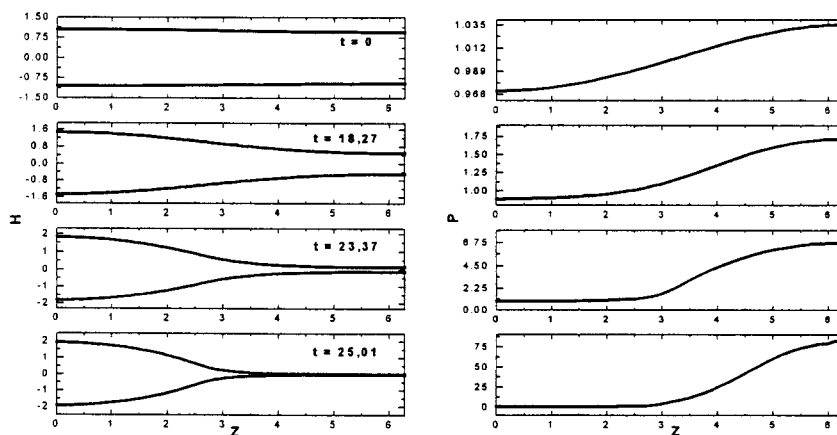


Figura 3: Evolución de la forma interfacial y del campo de presión asociado, para un jet viscoso: ( $Re=1.10^{-2}$ ,  $kb=0,5$  y  $\varepsilon=0,05$ ) perturbado axisimétricamente.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un análisis comparativo entre resultados sobre dos problemas donde existe inestabilidad capilar: chorros de fluido y películas depositadas sobre superficies cilíndricas. Los resultados se obtuvieron con un mismo método numérico (MEF) pero aplicando diferentes técnicas para la obtención de la superficie libre: HFM en los datos publicados y el método de los "spines" con nuestra implementación numérica. Si bien existen pequeñas diferencias en los resultados, el objetivo de validación de nuestro código computacional se alcanzó muy satisfactoriamente. Esto permitirá la futura introducción, en nuestros programas, de las ecuaciones necesarias para considerar la presencia de surfactantes.

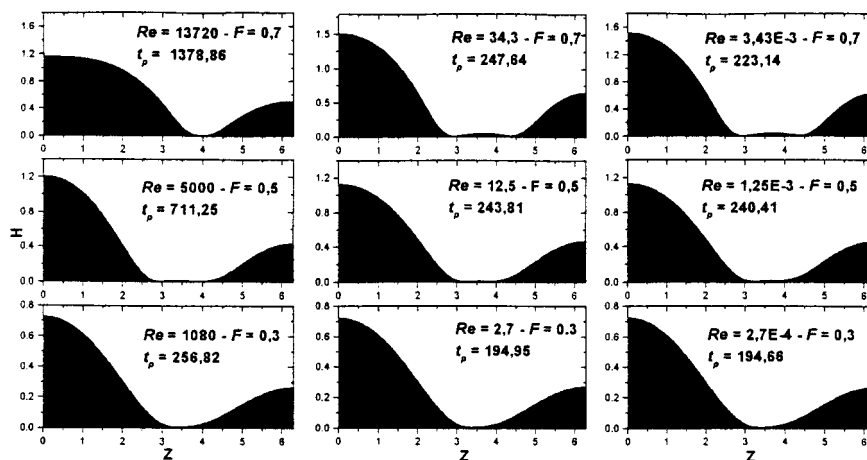


Figura 4: Formas interfaciales ( $H$ ) sobre media longitud de onda de perturbación, para  $Re$  y  $F$  típicos en los instantes de ruptura  $t_p$ . El número de onda es  $kb=0,5$  y  $\varepsilon=0,05$  en todos los casos.

#### REFERENCIAS

- [1] Rayleigh, Lord. 1879. "On the capillary phenomena in jets. Appendix I". *Proc. Roy. Soc. A*, 29, 71.
- [2] Rayleigh, Lord. 1892. "On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force". *Phil. Mag.* 34, 145.
- [3] Weber, C. 1931. "Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles". *Z. angew. Math. Mech.* 11, 136
- [4] Goren, S., 1962. "The instability of an annular thread of fluid". *J. Fluid Mech.* v. 12, 309.
- [5] Yarin, A. L., Oron, A. y Roseneau, P. 1993. "Capillary instability of a thin liquid film on a cylinder". *Phys. Fluid A*, v. 5 (1), 91.
- [6] Ashgriz, N y Mashayek, F. 1995. "Temporal analysis of capillary jets breakup". *J. Fluid Mech.* v. 291, 163.
- [7] Mashayek, F. y Ashgriz, N. 1995. "Instability of liquid coatings on cylindrical surfaces". *Phys. Fluids*, v. 7 (9), 2143.
- [8] Giavedoni, M. D. 1995. "A numerical study of the two-dimensional dynamic behavior of a thin liquid film subject to a vertical oscillation". *Ind. Eng. Chem. Res.* vol. 34, 356-365.
- [9] Mashayek, F. y Ashgriz, N. 1993. "A height-flux method for simulating free surface flows and interfaces". *Int. J. Num. Meth. In Fluids*, v. 17, 1035.
- [10] Hammond, P. S. 1983. "Nonlinear adjustment of a thin annular film of viscous fluid surrounding a thread of another within a circular cylindrical pipe". *J. Fluid Mech.* v. 137, 363.
- [11] Kistler, S. F. y Scriven, L. E. 1983. "Coating Flows", en J. R. A. Pearson and S. M. Richardson (eds), *Computational Analysis of Polymer Processing*, Applied Science Publishers, New York, 283.
- [12] Gresho, P. M., Lee, R. L. y Sani, R. L. 1980 "On the time-dependent solution of Navier-Stokes equation in two and three dimension". En *Recent Advances in Numerical Methods in Fluids*, v.1. Editores: Taylor, C. y Morgan, K. Pineridge Press Limited. Swansea. United Kingdom.