

APLICACIONES DEL MÉTODO DE LAS SOLUCIONES FUNDAMENTALES A PROBLEMAS DE MECÁNICA DE FRACTURA

A.P. Cisilino

División Soldadura y Fractura – INTEMA- Universidad Nacional de Mar del Plata
Av. Juan B. Justo 4302 (7600) Mar del Plata, Argentina - e-mail: cisilino@fi.mdp.edu.ar

B. Sensale

Instituto de Estructuras y Transporte - Facultad de Ingeniería, Universidad de República
J. Herrera y Reissig 665 – 11300 Montevideo, Uruguay - email: sensale@fing.edu.uy

RESUMEN

El Método de las Soluciones Fundamentales (MFS) es presentado en este trabajo para resolver problemas de mecánica de fractura incluyendo fuerzas de volumen. Se hace uso en este trabajo de la formulación de Galerkin del MFS, combinada con la técnica de sustracción de la singularidad que introduce en la formulación la singularidad del vértice de fisura. En todos los casos las fuerzas de volumen son reducidas al contorno del problema mediante la utilización de soluciones particulares. La rutina de optimización LMDIF de la librería MINPAK es utilizada para optimizar la posición de los puntos fuente.

ABSTRACT

The Method of Fundamental Solutions (MFS) is introduced in this work to solve a variety of crack problems including body forces. The MFS is presented using a Galerkin formulation, together with a subtraction of singularity technique to account for the crack tip singularities. Domain terms arising from body forces are avoided by reducing them to the boundary through the use of particular solutions. Best locations of sources are determined using the least square optimization routine LMDIF from MINPAK.

INTRODUCCIÓN

Debido a su eficiencia computacional los métodos de contorno han ganado en popularidad durante los últimos años. Esto es consecuencia de que los mismos requieren sólo de la discretización de la frontera del problema. Al mismo tiempo estos métodos han demostrado ser especialmente convenientes para la el tratamiento de problemas de mecánica de fractura[1,2].

El Método de las Soluciones Fundamentales (MSF) es un método relativamente nuevo para la solución de ciertos problemas elípticos. El mismo puede ser visto ya sea como una formulación indirecta del Método de los Elementos de Contorno, o una modificación del método de Trefftz en el que la solución es aproximada mediante una combinación lineal de soluciones fundamentales con puntos fuentes colocados fuera del dominio del problema[3]. La posición de los puntos fuente puede ser predeterminada o calculada junto con los coeficientes de la combinación lineal de forma tal que la solución aproximada satisfaga las condiciones de contorno del problema de la mejor forma posible. El método es sencillo de implementar y posee una gran adaptabilidad.

EL METODO DE LAS SOLUCIONES FUNDAMENTALES

Sea Ω un recinto finito con su contorno Γ dado por Γ_1 y Γ_2 , de forma que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, en el que se propone resolver las ecuaciones de Navier para elasticidad para los desplazamientos u_i en un sólido isótropo en ausencia de fuerzas de volumen

$$(\lambda + \mu)u_{i,ij} + \mu u_{i,ij} = 0 \quad (1)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé. La expresión (1) está sujeta a las condiciones de contorno $u_i = \bar{u}_i$ en Γ_1 y $t_i = \bar{t}_i$ en Γ_2 , donde t_i son las tracciones superficiales.

En el MSF, las soluciones para los desplazamientos y las tracciones son aproximadas por la combinación lineal de sus soluciones fundamentales u_{ij}^* y t_{ij}^* como sigue:

$$u_i(P) \cong \bar{u}_i(a, b, Q, P) = \sum_{j=1}^N a_j u_{i1}^*(P, Q_j) + \sum_{j=1}^N b_j u_{i2}^*(P, Q_j) = \mathbf{d}^T \mathbf{u}^*(P) \quad (2)$$

$$t_i(P) \cong \bar{t}_i(a, b, Q, P) = \sum_{j=1}^N a_j t_{i1}^*(P, Q_j) + \sum_{j=1}^N b_j t_{i2}^*(P, Q_j) = \mathbf{d}^T \mathbf{q}^*(P) \quad (3)$$

donde $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ y Q es un vector de dimensión $2N$ que para el caso bidimensional contiene las coordenadas de los puntos fuente Q_j .

Las soluciones fundamentales de desplazamientos y tracciones para el caso bidimensional en condiciones de deformación plana son [4]

$$u_{ij}^*(P, Q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left\{ (3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r_i r_j \right\} \quad (4)$$

$$t_{ij}^*(P, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_j r_i] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \right\} \quad (5)$$

donde $r = r(Q, P)$ representa la distancia entre el punto fuente Q y el punto sobre el contorno P , y sus derivadas son tomadas con respecto a la coordenada de P . Dado que las soluciones fundamentales poseen una singularidad en $P=Q$ los puntos fuente son colocados sobre un contorno imaginario que encierra al dominio del problema Ω .

Dado que (2) y (3) no satisfacen las condiciones de contorno en forma exacta, existen residuos dados por

$$P \in \Gamma_1 : R_1 \cong \bar{u} - u \neq 0 \quad \text{y} \quad P \in \Gamma_2 : R_2 \cong \bar{t} - t \neq 0 \quad (6)$$

Los coeficientes incógnita d deben entonces ser determinados de forma tal de minimizar en forma simultánea los residuos R_1 y R_2 .

Tomando a \bar{t} y $-\bar{u}$ como funciones de peso de los residuos R_1 y R_2 respectivamente, se obtiene la siguiente ecuación de residuos ponderados

$$\int_{\Gamma_1} \bar{t} R_1 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{u} R_2 d\Gamma = 0 \quad (7)$$

en la que sustituyendo (2) y (3)

$$\int_{\Gamma_1} \bar{t}^T \mathbf{d} (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{d} - \mathbf{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{u}^T \mathbf{d} (\mathbf{t}^{*T} \mathbf{d} - \mathbf{t}) d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{d}^T \left[\int_{\Gamma_1} \bar{t}^* (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{d} - \mathbf{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{u}^* (\mathbf{t}^{*T} \mathbf{d} - \mathbf{t}) d\Gamma \right] = 0$$

donde el término entre corchetes es nulo. Reordenado este a su vez puede escribirse

$$\left[\int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^* \mathbf{u}^{*T} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^* \mathbf{t}^{*T} d\Gamma \right] \mathbf{d} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^* \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^* \mathbf{t} d\Gamma \quad (8)$$

el que expresado en forma matricial resulta en

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (9)$$

donde la dimensión de \mathbf{A} es $[2N \times 2N]$, siendo N el número de puntos fuente Q .

FUERZAS DE VOLUMEN

Consideremos ahora la solución de la ecuación de Navier pero con un término de fuerza de volumen b_i

$$\left(\frac{1}{1-2\nu} \right) u_{i,jj} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu} b_i = 0 \quad (10)$$

Una forma directa de resolver la expresión (12) evitando una integral de dominio es mediante un cambio de variables de forma tal que el término de dominio desaparezca. Esto puede hacerse sumando una solución particular a una nueva variable

$$u = \hat{u} + u^p \quad \text{y} \quad t = \hat{t} + t^p \quad (11)$$

donde la solución particular u^p satisface (10), mientras que \hat{u} satisface (1) con condiciones de contorno derivadas de las expresiones (11):

$$\hat{u}_i = u_i - u_i^p \quad \text{en } \Gamma_1 \quad \text{y} \quad \hat{t}_i = t_i - t_i^p \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (12)$$

En el caso de fuerza centrífuga debida a la rotación alrededor del origen de coordenadas, un juego de soluciones particulares es el dado por Sokolnikoff[5]:

$$u_i^p(x) = \frac{-\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)} (x_k x_k) x_i \quad (13)$$

$$t_i^p(x) = \frac{-\rho\omega^2}{4(\lambda+2\mu)} \left[(2\lambda + \mu) x_n x_n n_i + 2\mu \alpha_i (x_j x_j) \right] \quad (14)$$

donde es la ρ densidad del material y ω la velocidad angular. De igual forma existen soluciones particulares que permiten abordar problemas con cargas gravitatorias y termoelásticas que respondan a distribuciones de temperatura sencillas[6].

SUSTRACCION DE LA SINGULARIDAD

La adaptabilidad del MSF permite incorporar singularidades en su formulación, lográndose así una representación precisa de la solución[7]. Mediante la técnica de sustracción de la singularidad se formula el problema de forma el un campo modelado numéricamente sea regular. En general los campos de desplazamientos y tracciones pueden ser escritos como

$$u = u^R + u^S \quad \text{y} \quad t = t^R + t^S \quad (15)$$

donde u^R y t^R representan los campos regulares y u^S y t^S los singulares.

Los campos de desplazamientos y tracciones en el vértice de fisura donde las singularidades tienen lugar son bien conocidos⁸. Los mismos responden a la forma

$$u^S = \frac{K_I}{\mu} \frac{r}{2\pi} f\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\mu} \frac{r}{2\pi} f\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{y} \quad t^S = \frac{K_I}{2\pi r} f\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{2\pi r} f\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (16)$$

donde los coeficientes K_I y K_{II} son los factores de intensidad de tensiones y (r, θ) representan un sistema de coordenadas plano centrado en el vértice de fisura.

Estas expresiones pueden ser utilizadas para modificar el MSF de forma de remover la

singularidad, donde las nuevas funciones regulares de desplazamiento y tracciones son

$$u^R = u - u^S \quad \text{y} \quad t^R = t - t^S \quad (17)$$

con condiciones de contorno dadas por

$$u_i^R = u_i - u_i^S \quad \text{en } \Gamma_1 \quad \text{y} \quad t_i^R = t_i - t_i^S \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (18)$$

De esta forma los coeficientes K_I y K_{II} son ahora incógnitas del problema. Siguiendo el procedimiento de las secciones anteriores la expresión matricial del problema resulta en

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{K}_I \\ \mathbf{K}_{II} \end{Bmatrix} = \mathbf{f} \quad (19)$$

IMPLEMENTACION

En este trabajo la geometría del problema se define mediante elementos de contorno cuadráticos de tres nodos. La evaluación de las integrales es sencilla pudiéndose emplear cuadratura de Gauss. Esto se debe al hecho que los puntos fuente no se encuentran sobre el contorno, con lo que se evitan las integrales singulares.

En el MSF no solo los coeficientes de la combinación lineal, sino que también la posición de las fuentes Q deben ser determinados. Siguiendo el trabajo de Karageorghis et al. [7] estos son determinados de forma de minimizar el residuo de las condiciones de contorno, dado por el funcional

$$F(d, Q) = \sum_i^{2M_1} u_i - u^2 + \sum_i^{2M_2} t_i - t^2 \quad (20)$$

donde los puntos M están uniformemente distribuidos sobre el contorno del problema. El funcional F es minimizado utilizando la rutina LMDIF de las librerías MINPAK[9], la que utiliza una versión modificada del algoritmo de Levenberg-Marquardt y minimiza el cuadrado de los residuos de m funciones no lineales (residuos en los puntos M) con n variables (posiciones de las N fuentes). Siguiendo a la Ref.[7], se adopta el número de funciones $m=3n$.

Los puntos fuente Q son en todos los casos inicialmente distribuidos alrededor del modelo en forma uniforme sobre una circunferencia de radio r centrada en el baricentro de la geometría del problema. Se exploran en este trabajo tres esquemas para optimizar la posición de las fuentes: en la primera las fuentes están siempre colocadas sobre una circunferencia cuyo radio es la única variable del problema ($n=1$); en el segundo caso cada fuente está libre de moverse sobre un radio cuyo centro coincide con el baricentro ($n=N$); mientras que el tercero las fuentes pueden moverse libremente ($n=2N$).

EJEMPLOS

Cilindro presurizado con fisura interna

Se analiza en este ejemplo el caso de un cilindro de pared gruesa sometido a presión interna como se ilustra en la Fig. 1. La relación de radios del cilindro $R_1/R_2=0.5$. El cilindro posee dos fisuras internas opuestas en dirección radial y de longitud $a=0.5t$. Aprovechando la simetría del problema sólo un cuarto del mismo es analizado. La Tabla 1 resume los resultados obtenidos para 16, 32 y 64 puntos fuente para distintas posiciones iniciales r/r_0 y utilizando los tres esquemas de optimización propuestos. Se reporta también el número de iteraciones realizadas en cada caso. El valor de $K=K_I/\sigma(R_1)\sqrt{\pi a}=1.312$ corresponde a la Ref.[10]. La Fig. 2 ilustra para el caso de 16 puntos fuente las posiciones inicial y final de las fuentes.

Cilindro rotante

Se analiza en este ejemplo un cilindro de iguales características al ejemplo anterior pero que rota con velocidad angular $\omega=1\text{rad/seg}$ y sin presión interna. Los resultados obtenidos están reportados en la **Tabla 2**. El valor de $K=K_1/\sigma(R_1)\sqrt{\pi}$ $a=1.312$ corresponde a la Ref.[10].

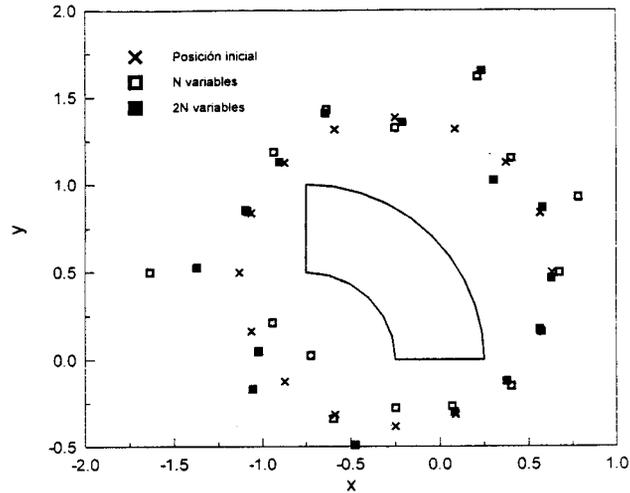
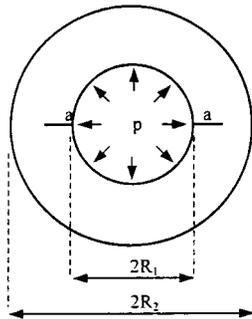


Figura 1: Geometría del modelo fuentes

Figura 2: Optimización de la posición de las fuentes

r/r_0	N	1 variable			N variables			2N variables		
		K	Dif %	Iter.	K	Dif %	Iter.	K	Dif %	Iter.
1.10	16	2.384	81.7	3	2.091	59.3	2	1.307	0.38	42
	32	1.275	2.82	3	1.288	1.83	2	1.299	0.99	12
	64	1.298	1.07	2	1.303	0.76	2	1.307	0.38	2
1.25	16	1.283	2.21	5	1.286	1.98	2	1.303	0.69	35
	32	1.342	2.29	2	1.300	0.91	2	1.314	0.15	3
	64	1.288	1.83	3	1.301	0.84	9	1.308	0.30	2
1.50	16	1.283	2.21	7	1.311	0.07	8	1.308	0.30	23
	32	1.322	0.76	3	1.308	0.30	2	1.317	0.38	2
	64	1.307	0.38	2	1.304	0.61	3	1.303	0.69	2
2.00	16	1.283	2.21	12	1.339	2.06	2	1.307	0.38	23
	32	1.298	1.07	1	1.300	0.91	2	1.305	0.53	3
	64	1.298	1.07	1	1.299	0.99	1	1.301	0.84	1

Tabla 1. Resultados para el cilindro de pared gruesa (Ref. $K=1.312$)

r/r_0	N	1 variable			N variables		
		K	Dif %	Iter.	K	Dif %	Iter.
1.50	16	1.401	1.41	5	1.423	0.14	100
	32	1.431	0.70	1	1.418	0.21	4
	64	1.418	0.21	2	1.418	0.21	4
2.00	16	1.422	0.07	7	1.426	0.35	8
	32	1.411	0.70	1	1.409	0.84	5
	64	1.411	0.70	1	1.425	0.28	2

Tabla 2. Cilindro rotante (Ref. $K=1.421$)

CONCLUSIONES

Se demuestra en este trabajo la sencillez y adaptabilidad del Método de las Soluciones Fundamentales para resolver problemas de mecánica de fractura con fuerzas de volumen. Se utiliza una formulación de Galerkin donde las fuerzas de volumen son consideradas mediante el empleo de soluciones particulares. Los factores de intensidad de tensiones son introducidos en la formulación del método como incógnitas del problema empleando la técnica de sustracción de la singularidad.

Se exploran tres esquemas para optimizar la posición de los puntos fuentes. En este sentido los resultados obtenidos permiten observar que para los ejemplos propuestos los tres esquemas permiten obtener buenos resultados. Los resultados más pobres corresponden al esquema de una variable con un reducido número de puntos fuente. Los esquemas de N y $2N$ variables arrojan en general resultados con errores por debajo del 1%.

Una desventaja del MSF es su costo computacional que proviene de la utilización de un algoritmo iterativo para minimizar los residuos en las condiciones de contorno. Se observa en general un aumento en el número de fuentes no solo aumenta la exactitud de los resultados, sino que reduce también el costo computacional al disminuir el número de iteraciones. Se observa así mismo que para un número reducido de fuentes la calidad de la solución es sensible a la posición inicial de las mismas. De esto se desprende que la elección de la rutina de minimización es clave en lo que concierne a la reducción del costo computacional del método.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Agencia de Promoción Científica de la República Argentina (PICT 12-04586) y la Universidad de la República.

REFERENCIAS

1. Aliabadi MH. *Boundary element formulations in fracture mechanics*, Appl. Mech. Review, 2, 1997
2. Leitao VMA. *Applications of multi-region Trefftz-collocation to fracture mechanics*, Engng. Anal. Boundary Elements, 22, 251-256, 1998
3. Fairweather G. Y Karageorghis A. *The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems*, Advances in Computational Mathematics, 9, 69-95, 1998
4. Brebbia CA, Telles JCF and Wrobel LC. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, 1984
5. Sokolnikof I. *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1956, New York
6. Banerjee P. *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw Hill, London, 1994
7. Karageorghis A and Fairweather G. *Methods of fundamental solutions for harmonic and biharmonic boundary value problems*. Computational Mechanics, 21, 1998, 416-423
8. Aliabadi MH y Rooke DP. *Numerical Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1991
9. Gargow BS, Hillstron KE y Moré JJ. MINPACK Project, Argonne National Laboratory, 1980
10. Wu X-R and Carlsson AJ. *Weight Functions and Stress Intensity Factor Solutions*. Pergamon Press, 1991, Oxford, UK