

ANÁLISIS NUMÉRICO DE PROBLEMAS DE FLUJOS TÉRMICAMENTE ACOPLADOS CON SUPERFICIES MÓVILES

Marcela Cruchaga y Diego Celentano

Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Santiago de Chile
Av. Bdo. O'Higgins 3363, Santiago, CHILE - e-mail: mcruchag@lauca.usach.cl

RESUMEN

En este trabajo se presenta el análisis numérico de problemas de flujos térmicamente acoplados con efectos de cambio de fase para situaciones que incluyen una superficie interfaz entre dos medios que no se mezclan. La forma débil de las ecuaciones completas de Navier-Stokes para flujo incompresible se obtiene en el marco del método de elementos finitos utilizando una metodología de ponderación generalizada a contracorriente. Los efectos de cambio de fase son descritos utilizando una formulación basada en la temperatura. La superficie interfaz se identifica con una malla de puntos independientes cuya posición se actualiza en forma lagrangeana. Con la metodología propuesta se analiza el llenado isotérmico de un molde en S y el proceso no isotérmico del escurrimiento en un canal vertical que presenta una obstrucción.

ABSTRACT

In the present work, a finite element formulation for non-isothermal incompressible flows is presented including phase-change effects and moving interfaces between immiscible fluids. The weak form of the full Navier-Stokes equations is written using a generalized upwinding technique. A temperature-based algorithm is applied in the solution of the phase-change terms. The interface is defined using an independent mesh which is updated using a lagrangean scheme. The proposed methodology is applied in the numerical analyses of the isothermal filling of a step shaped mould and the non-isothermal flow in a vertical obstructed channel problem.

1. INTRODUCCIÓN

La solución numérica de problemas de flujos térmicamente acoplados en los que se necesita seguir una superficie de separación de dos medios que no se mezclan es de particular interés en el proceso de llenado de moldes. Dicho análisis requiere de la solución de las ecuaciones de flujos transitorios térmicamente acoplados incluyendo efectos de cambio de fase en presencia de dos medios fluidos de cuya interfaz se necesita conocer la posición durante el proceso.

Las dificultades en el análisis numérico del tipo de problemas descritos proviene de los distintos fenómenos físicos involucrados en los mismos. La transferencia de calor con cambio de fase ha sido estudiada por diversos autores utilizando diferentes métodos de análisis los que pueden, en general, agruparse en métodos con seguimiento del frente de solidificación, particularmente aplicables a cambio de fase isotérmico, y métodos de dominio fijo los cuales incluyen la condición del movimiento de la zona de cambio de fase intrínsecamente en la forma débil del problema. Dentro de este último grupo el efecto del calor latente puede ser evaluado utilizando la entalpía como variable de estado. Más recientemente se ha propuesto una formulación en donde la temperatura se conserva como variable única de estado y se

utiliza una integración especial en el dominio para capturar adecuadamente la discontinuidad en el campo de dicha variable para el caso de cambio de fase isotérmico no siendo necesario el uso de ningún tipo de regularización [1-3]. El seguimiento de una superficie de separación entre dos medios acoplada con la mecánica de fluidos ha sido estudiado mediante diversas metodologías entre las que se puede identificar aquéllas en las que la discretización del dominio en las que se calcula el problema de mecánica de fluidos se modifica junto con la posición de la interfaz y las técnicas de malla fija. Entre estas últimas se ha propuesto en [4-6] utilizar una malla independiente de puntos que describa la interfaz actualizando su posición en forma lagrangeana.

En este trabajo se propone obtener una solución numérica a problemas sencillos de llenado de moldes en el marco del método de elementos finitos utilizando una formulación de flujo incompresible térmicamente acoplada. La forma débil de las ecuaciones se obtiene mediante el método de ponderación generalizado a contracorriente [7] y las ecuaciones discretizadas se escriben en función de las variables primitivas del problema: velocidad, presión y temperatura. La metodología de análisis propuesta permite utilizar una malla fija para el cálculo del flujo y otra independiente móvil para el seguimiento de la superficie interfaz cuyo movimiento se describe en forma lagrangeana. Para la descripción de los efectos de cambio de fase se utiliza una formulación basada en la temperatura presentada en [1-2] que ha sido extendida a problemas con efectos convectivos en [3]. La formulación de mecánica de fluidos térmicamente acoplados resultante se resuelve utilizando un esquema tipo Newton-Raphson alternado convergido y la discretización temporal de las variables se realiza utilizando la regla del medio punto.

En la Sección 2 se presentan brevemente las ecuaciones fundamentales del continuo utilizadas y el esquema de solución numérica adoptado. En la Sección 3 se analiza el llenado isotérmico de un canal en forma de S, descrito con anterioridad en [8], con la finalidad de evaluar el comportamiento de la formulación de seguimiento de una interfaz en este tipo de problemas. El segundo ejemplo numérico es el llenado por gravedad con aluminio de un canal vertical obstruido en el que se evalúa la influencia del efecto de cambio de fase durante el proceso.

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES

El movimiento de fluidos newtoneanos incompresibles térmicamente acoplados queda definido por las conocidas ecuaciones [9-10]:

- *conservación de la cantidad de movimiento:*

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p - \nabla \cdot (2\mu\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho\mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \times Y \quad (\text{i})$$

- *continuidad:*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times Y \quad (\text{ii})$$

- *ecuación de la energía:*

$$\rho \left[c + L \frac{\partial f_{pc}}{\partial T} \right] \dot{T} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k\nabla T) + \rho r \quad \text{en } \Omega \times Y \quad (\text{iii})$$

que junto a adecuadas condiciones iniciales y de contorno definen el problema a estudiar. Además se deberá definir una relación constitutiva para la función f_{pc} de cambio de fase. El dominio de análisis es Ω y Y el tiempo. La nomenclatura usada en dichas expresiones es: ρ es

la densidad del fluido, μ es la viscosidad dinámica, c es el calor específico, k es el coeficiente de conductividad, L es el calor latente específico de cambio de fase, \mathbf{b} son las fuerzas de masa por unidad de volumen y r es una fuente específica de calor. Además: \mathbf{v} es el vector velocidad, p es la presión, ϵ tensor tasa de deformación, T es la temperatura, ∇ es el operador gradiente y el punto superpuesto indica derivada parcial respecto del tiempo.

El seguimiento de la superficie interfaz en el tiempo se realiza mediante un algoritmo de avance lagrangeano. La superficie de separación de dos medios que no se mezclan se identifica por puntos que le pertenecen P cuya trayectoria queda definida por:

$$\mathbf{X}_P^{t+\Delta t} = \mathbf{X}_P^t + \Delta t \mathbf{V}_P^{t+\Delta t} \quad (\text{iv})$$

donde \mathbf{X}_P^t es la posición conocida del punto P , $\mathbf{X}_P^{t+\Delta t}$ es la nueva posición de dicho punto que se desea conocer después de un intervalo Δt y $\mathbf{V}_P^{t+\Delta t}$ es la velocidad de P .

La forma discretizada por medio del método de elementos finitos del sistema de ecuaciones (i-iii) que describen el movimiento en un dominio donde hay dos materiales presentes puede resumirse en

$$\mathbf{R}_V \equiv \mathbf{F}_V - \mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} - \mathbf{K}_V \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (\text{v})$$

$$\mathbf{R}_T \equiv \mathbf{F}_T - (\mathbf{C} + \mathbf{C}_{pc}) \dot{\mathbf{T}} - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{ad} + \mathbf{K}_{ad-pc}) \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (\text{vi})$$

donde: \mathbf{F}_V es el vector generalizado de fuerzas de volumen, \mathbf{F}_T es el vector de flujo de calor externo, \mathbf{M} es la matriz de masa generalizada, \mathbf{C} es la matriz de capacidad, \mathbf{C}_{pc} es la matriz de capacidad con efectos de cambio de fase, \mathbf{K}_V es la matriz generalizada de convección-difusión, \mathbf{K} es la matriz de conductividad, \mathbf{K}_{ad} es la matriz de convección térmica, \mathbf{K}_{ad-pc} es la matriz de convección térmica con efectos de cambio de fase, \mathbf{V} es el vector de incógnitas (velocidades y presiones) nodales, \mathbf{T} es el vector de temperaturas nodales. Es importante destacar que la ecuación (iv) está implícitamente considerada en el sistema (v)-(vi). Por último, la solución del sistema térmicamente acoplado se realiza mediante un esquema alternado

3. EJEMPLOS NUMÉRICOS

3.1 Llenado de un molde en forma de S

Este problema ha sido propuesto en [8] como prueba de formulaciones aplicables a problemas de llenado. En este trabajo se realiza un estudio isotérmico del mismo y se lo presenta con la finalidad de validar numéricamente de la metodología propuesta del seguimiento de la superficie interfaz aplicada a este tipo de problemas. La geometría y propiedades utilizadas se muestran en la Figura 1 y corresponden a las indicadas en la referencia. En este problema se han considerado deslizantes las paredes de la cavidad. Sin embargo los resultados presentados en [8] consideran el efecto de una fuerza de fricción sobre las mismas por lo que en el presente estudio se espera que las posiciones del frente material estén ligeramente adelantadas en el espacio para un mismo tiempo de análisis. En la Figura 2 se presenta la posición de la interfaz a distintos tiempos de cálculo obtenidos utilizando la presente metodología. La evolución y forma de dicha superficie son comparables y presentan los mismos aspectos descritos en [8]. En particular, la curvatura desarrollada en los primeros tiempos del análisis debido al efecto gravitatorio y la forma obtenida durante la evolución del proceso comparan satisfactoriamente con el mencionado trabajo.

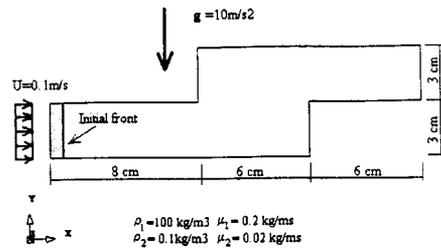


Figura 1: Llenado de un molde en S. Geometría y propiedades utilizadas.

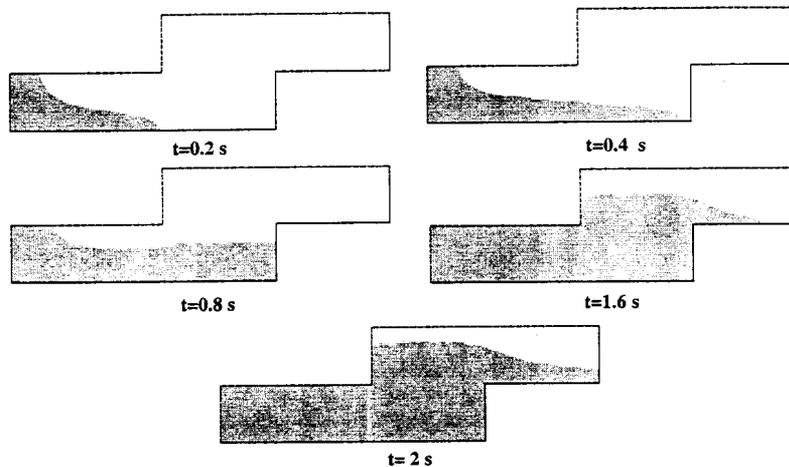


Figura 2: Llenado de un molde en S. Posición de la interfaz a diferentes tiempos.

3.2 Canal de llenado con obstrucción

En el ejemplo propuesto se realiza un estudio de mecánica de fluidos térmicamente acoplados del problema de un canal vertical de llenado. La geometría utilizada se muestra en la Figura 3 junto con las propiedades del aluminio y aire utilizadas en el análisis transitorio. Se realizaron dos análisis considerando un proceso sin cambio de fase y otro con cambio de fase se muestra en la Figura 4 siendo muy similar a la obtenida en el caso sin cambio de fase.

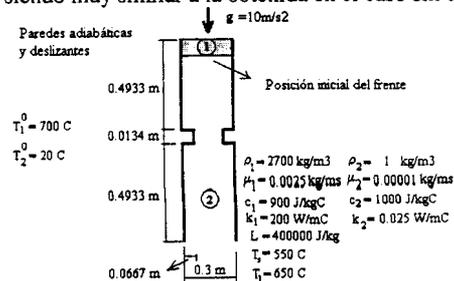


Figura 3: Canal de llenado vertical obstruido. Geometría y propiedades utilizadas.

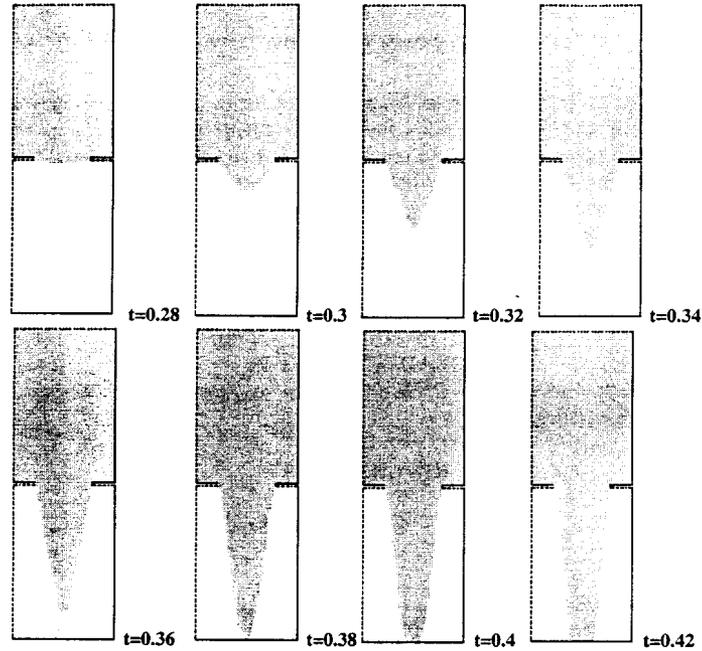


Figura 4: Canal de llenado vertical obstruido. Posición de la interfaz a distintos tiempos.

La Figura 5 muestra la evolución de la temperatura en puntos del eje vertical de simetría en ambos análisis presentados. Puede observarse que la temperatura a la que llega el frente material a las diversas cotas analizadas es menor que la temperatura de la masa de aluminio líquido que escurre por el canal. Este enfriamiento se debe al contacto con la masa de aire que está siendo desalojada y que se encuentra a temperaturas menores. Sin embargo, del análisis con cambio de fase puede observarse que el frente permanece dentro del rango de temperaturas de cambio de fase hecho que sustenta que no hay solidificación completa del material de llenado durante el proceso estudiado.

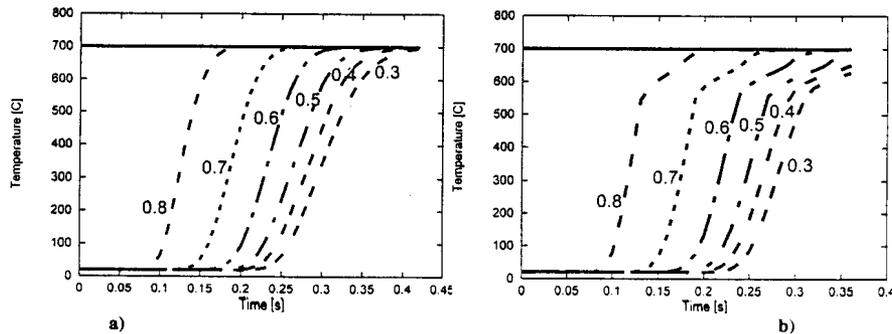


Figura 5: Canal de llenado vertical obstruido. Evolución de la temperatura en puntos del eje ubicados a diferentes alturas: a) sin cambio de fase, b) con cambio de fase.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el análisis de problemas de llenado isotérmicos y no isotérmicos con y sin cambio de fase utilizando una formulación acoplada para la resolución de las ecuaciones completas de Navier-Stokes. Dicha formulación, escrita en el contexto del método de elementos finitos, utiliza una metodología de ponderación generalizada a contracorriente y preserva las variables primitivas en su postulación. Esta metodología de dominio fijo, en conjunto con el seguimiento lagrangeano del frente material, ha brindado resultados satisfactorios en los ejemplos numéricos analizados y que se aplican a problemas de llenado de moldes. Sin embargo, una exhaustiva validación deberá realizarse en futuros trabajos analizando otros problemas presentados en la literatura.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte de CONICYT a través del Proyecto N° 1980054 en el marco del cual se realiza este trabajo.

REFERENCIAS

- 1) Celentano D., Oñate E. and Oller S.: "A temperature-based formulation for finite element analysis of generalized phase-change problems", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol 37, 3441-3465, (1994).
- 2) Celentano D. and Pérez E.: "A phase-change formulation including general latent heat effects", *Int. J. Numerical Methods Heat Fluid Flow*, Vol 6, 71-79, (1996).
- 3) Celentano D.: "A finite element formulation for phase-change problems with advective effects", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol 14, 719-730, (1998).
- 4) Cruchaga M., Oñate E. and Idelsohn S.: "On the Pseudomaterial approach for the analysis of transient forming processes", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol 11, 137-148 (1995).
- 5) Cruchaga M.A. and Oñate E. "A finite element formulation for incompressible flow problems using a generalized streamline operator", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 143, 49-67 (1997).
- 6) Cruchaga M. and Oñate E. "A generalized streamline finite element approach for the analysis of incompressible flow problems including moving surfaces", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 173, 241-255 (1999).
- 7) Celentano D. and Cruchaga M. "A thermally coupled flow formulation with microstructural evolution for hypoeutectic cast-iron solidification", *Metallurgical and Materials Transactions*, Vol 30B, 731-744 (1999).
- 8) Dhatt G., Gao D.M., and Ben Cheikh A., 1990, 'A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds', *Int. J. For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, 821-831.
- 9) Zienkiewicz O. and Taylor R.: *The finite element method - 4th ed., Vols. 1 & 2.* MacGraw-Hill, London (1989).
- 10) Huang H. and Usmani A.: *Finite element analysis for heat transfer: Theory and Software.* Springer-Verlag, London (1994).