Mecánica Computacional, Volumen XIX, pp. 207-212
Compilado por: F. Quintana y S. Felicelli
San Carlos de Bariloche, Noviembre de 2000

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE CAMBIO DE FASE EN UN PROBLEMA DE CONDUCCION DEL CALOR CON CONDICION CONVECTIVA

María C. Sanziel
Instituto de Matemática Beppo Levi - Fac. de Cs.Exactas Ing. y Agrimensura - UNR
Av. Pellegrini 250-2000 Rosario- Argentina

RESUMEN

Se considera un problema unidimensional de conducción del calor planteado en una barra de longitud finita L, con temperatura inicial superior a la del cambio de fase. En uno de los bordes se impone una condición de flujo de calor y en el otro una condición convectiva. A través de un método de diferencias finitas, se discretiza el problema y se demuestra que la solución del problema discreto converge a la solución del problema discreto con condición de temperatura, cuando el coeficiente de transferencia del calor tiende a infinito. Se obtienen además condiciones suficientes para asegurar la presencia de cambio de fase en el problema discreto.

ABSTRACT

We consider a one-dimensional heat conduction problem in a slab of length L, with initial temperature greater than the phase-change temperature. There is a heat flux condition on one of the edges and a convective condition on the other.Through a finite difference method we obtain a discrete problem and we show that the solution of this discrete probleme converges to the solution of the discrete problem with temperature condition, when the heat transfer coefficient tends to infinity. We also obtain sufficient conditions in order to have a phase change in the discrete problem.

1.- INTRODUCCION

Se considera una barra de material representada por el intervalo [0, L], que se encuentra a temperatura inicial $\theta_o(x)$. En el borde izquierdo, $x = 0$, hay una condición de flujo de calor saliente y en el borde derecho, $x = L$, una condición de tipo convectiva, con coeficiente de transferencia de calor α.
Suponiendo una temperatura de cambio de fase de 0°, el problema se plantea a través de las siguientes ecuaciones:

$$(P_\alpha) \quad \begin{cases} \rho\, c \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - k \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0, & (1) \\ \theta(x,0) = \theta_o(x) > 0, \qquad 0 \le x \le L, & (2) \\ k \dfrac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = q(t) > 0, \qquad t > 0, & (3) \\ -k \dfrac{\partial\theta}{\partial x}(L,t) = \alpha(\theta(L,t) - b(t)), \qquad t > 0, & (4) \end{cases}$$

Las constantes ρ, c y k representan la densidad de masa, el calor específico y la conductividad térmica respectivamente.
Según sean los datos θ_o, q y b, puede ocurrir que se trate de un problema de conducción del calor para todo tiempo, o que ocurra un cambio de fase.
Para el caso estacionario, se establecieron en [1] condiciones sobre los datos del problema para garantizar el cambio de fase.

Por otra parte, en [2] se demostró que cuando el coeficiente de transferencia de calor α tiende a infinito, la solución del problema estacionario se aproxima a la solución del caso estacionario del problema de Stefan a dos fases.
Si en el problema (1) – (4) se reemplaza la condición (4) por

$$\theta(L, t) = b(t) \tag{5}$$

se obtiene un problema al que llamaremos (P), que fue considerado en [3], donde se probó que son necesarias y/o suficientes ciertas condiciones sobre los datos para garantizar la presencia de un cambio de fase, a partir de un cierto tiempo t_o. El problema discreto correspondiente fue estudiado en [4].

En el presente trabajo, utilizando el método de diferencias finitas, se discretiza al problema (P_α) y se demuestra que la solución de dicho problema discretizado verifica las siguientes propiedades:
1) se aproxima a la solución del problema (P) discretizado, cuando el parámetro α tiende a infinito.
2) es decreciente en el tiempo.
3) es siempre menor o igual que la solución del problema (P) discretizado.
4) es monótona respecto del parámetro α.

2.- DISCRETIZACION DEL PROBLEMA

Para discretizar el problem (P_α), se establece un mallado con paso $\Delta x = \frac{L}{N}$ (N es un número natural) para la variable espacial x y con paso Δt para la variable temporal. Se indica con U_i^j al valor aproximado de la temperatura θ en el punto $(x_i, t_j) = (i\Delta x\, , j\Delta t)$, es decir que

$$U_i^j \approx \theta\,(x_i, t_j) \qquad i = 0, 1, \ldots, N \ \text{ y } \ j = 1,2,3,\ldots, \tag{6}$$

Se aproxima la ecuación diferencial (1) por la ecuación en diferencias:

$$\frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{\Delta t} - \frac{k}{\rho\, c}\, \frac{U_{i-1}^j - 2\,U_i^j + U_{i+1}^j}{\Delta x^2} = 0 \qquad i = 1, \ldots, N\text{-}1, \quad j = 1,2,3,\ldots \tag{7}$$

cuando se utiliza un esquema implícito, o por la ecuación en diferencias

$$\frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{\Delta t} - \frac{k}{\rho\, c}\, \frac{U_{i-1}^{j-1} - 2\,U_i^{j-1} + U_{i+1}^{j-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad i = 1, \ldots, N\text{-}1\, , j = 1,2,3,\ldots \tag{8}$$

cuando se utiliza un esquema explícito.
Las condiciones (2), (3) y (4) se traducen respectivamente en:

$$U_i^o = \theta_o(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, N \tag{9}$$

$$U_o^j = U_1^j - \frac{\Delta x}{k}\, q(t_j) \qquad j = 1,2,3,\ldots \tag{10}$$

$$U_N^j = \frac{U_{N-1}^j + \alpha\, \Delta x\, b(t_j)}{1 + \alpha\, \Delta x} \qquad j = 1,2,3,\ldots \tag{11}$$

El problema discreto representado por las ecuaciones (7), (9), (10) y (11), puede ser expresado en forma matricial por :

$$\mathbf{A}_\alpha\, \mathbf{U}^j = \mathbf{U}^{j-1} + \mathbf{c}_\alpha^j \tag{12}$$

donde $\mathbf{U}^j = (U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{N-1}^j)^t$, $\mathbf{A}_\alpha$ es la matriz cuadrada N-1-dimensional

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & : & : & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & : & 0 \\ 0 & -\lambda & : & & : & 0 \\ 0 & : & : & : & : & 0 \\ : & & & & : & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & : & -\lambda & 1+2\lambda - \frac{\lambda}{1+\alpha\,\Delta x} \end{pmatrix} \tag{13}$$

y $\mathbf{c}_\alpha^j$ es el vector N-1-dimensional

$$\mathbf{c}_\alpha^j = \left(-\lambda \frac{\Delta x}{k}\, q(t_j), 0, \ldots, 0, \frac{\lambda\,\alpha\,\Delta x\, b(t_j)}{1+\alpha\,\Delta x} \right)^t \tag{14}$$

siendo $\lambda = \frac{k\,\Delta t}{\rho\, c\, \Delta x^2}$.
En el caso del problema (P), la condición (5) se discretiza como

$$V_N^j = b(t_j) \qquad j = 1,2,3,\ldots \tag{15}$$

Utilizando un esquema implícito en diferencias finitas se obtiene para el problema (P), la siguiente ecuación matricial

$$\mathbf{A}\mathbf{V}^j = \mathbf{V}^{j-1} + \mathbf{c}^j \tag{16}$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz cuadrada N-1-dimensional

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & : & : & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & : & 0 \\ 0 & -\lambda & : & & : & 0 \\ 0 & : & : & : & : & 0 \\ : & & & & : & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & : & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \tag{17}$$

y $\mathbf{c}^j$ es el vector N-1-dimensional

$$\mathbf{c}^j = \left(-\lambda \frac{\Delta x}{k}\, q(t_j), 0, \ldots, 0, \lambda\, b(t_j) \right)^t \tag{18}$$

3.- CONVERGENCIA DE LA SOLUCION DISCRETA CUANDO $\alpha \to +\infty$

En este párrafo se demostrará que cuando el coeficiente de transferencia de calor $\alpha \to +\infty$, la solución del problema (12) se aproxima a la solución del problema (16).

Teorema 1: *Suponiendo que la temperatura inicial θ_0, el flujo q y la temperatura b son constantes, $b = \theta_0$, la solución discreta del problema (P_α) converge a la solución discreta del problema (P) cuando el coeficiente de transferencia de calor tiende a infinito.*
Demostración

Las matrices $\mathbf{A}_\alpha = \left(a_{ij}^\alpha\right)$ y $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ son matrices estrictamente dominantes diagonalmente, en consecuencia son inversibles, pueden calcularse

$$\delta_{\mathbf{A}_\alpha} = \min_i \left\{ \left|a_{ii}^\alpha\right| - \sum_{j\neq i}\left|a_{ij}^\alpha\right| \right\} = 1 \qquad \text{y} \qquad \delta_{\mathbf{A}} = \min_i \left\{ \left|a_{ii}\right| - \sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right| \right\} = 1 \tag{19}$$

y se demuestra que se verifica[5]:

$$\|\mathbf{A}_\alpha^{-1}\|_\infty \leq \delta_{\mathbf{A}_\alpha}^{-1} = 1 \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \leq \delta_{\mathbf{A}}^{-1} = 1 \tag{20}$$

Las matrices y vectores de las ecuaciones (12) y (16) se relacionan por

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} + \mathbf{H}(\alpha) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c}_\alpha^j = \mathbf{c}^j + \mathbf{h}^j(\alpha) \tag{21}$$

siendo

$$\mathbf{H}(\alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{1+\alpha\,\Delta x} & 0 & 0 & : & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & & : & 0 \\ 0 & : & : & : & : & 0 \\ : & & & & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h}^j(\alpha) = \left(0, 0, \ldots, 0, -\frac{\lambda\, b(t_j)}{1+\alpha\,\Delta x}\right)^t \tag{22}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones se obtiene:

$$\mathbf{U}^j - \mathbf{V}^j = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{U}^{j-1} - \mathbf{V}^{j-1}) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}^j(\alpha) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}(\alpha)\left(\mathbf{A}_\alpha^{-1}(\mathbf{U}^{j-1} + \mathbf{c}_\alpha^j)\right) \tag{23}$$

Dado que los datos son constantes $\mathbf{h}^j(\alpha) = \mathbf{h}(\alpha)$ y $\mathbf{c}_\alpha^j = \mathbf{c}_\alpha$ para $j = 1, 2, \ldots$, entonces, a partir de las desigualdades (20) resulta

$$\|\mathbf{U}^j - \mathbf{V}^j\|_\infty \leq \|\mathbf{U}^{j-1} - \mathbf{V}^{j-1}\|_\infty + \|\mathbf{h}(\alpha)\|_\infty + \|\mathbf{H}(\alpha)\|_\infty\left(\|\mathbf{U}^{j-1}\|_\infty + \|\mathbf{c}_\alpha\|_\infty\right) =$$

$$= \|\mathbf{U}^{j-1} - \mathbf{V}^{j-1}\|_\infty + \frac{\lambda\, b}{1+\alpha\,\Delta x} + \frac{\lambda}{1+\alpha\,\Delta x}\left(\|\mathbf{U}^{j-1}\|_\infty + M\right) \tag{24}$$

donde se ha designado con $M = max\left\{\lambda\frac{\Delta x}{k}\, q, \lambda\, b\right\} \geq max\left\{\lambda\frac{\Delta x}{k}\, q\,, \frac{\lambda\,\alpha\,\Delta x\, b}{1+\alpha\,\Delta x}\right\} = M_\alpha$.
A partir de (24), se demuestra por inducción que

$$\|\mathbf{U}^j - \mathbf{V}^j\|_\infty \leq \frac{\lambda}{1+\alpha\,\Delta x}\left(j\,\theta_o + \frac{j\,(j+1)}{2}M\right) + \frac{j\,\lambda\, b}{1+\alpha\,\Delta x} \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

de donde resulta la tesis. ■

4.- PROPIEDADES DE LA SOLUCION DISCRETA

En este párrafo se demostrará que la solución discreta del problema (P_α) es decreciente en el tiempo , se mantiene siempre por debajo de la solución discreta del problema (P) y es monótona respecto del parámetro α.

Teorema 2: *Con las mismas hipótesis del teorema 1 y suponiendo $\lambda < \frac{1}{2}$, la solución discreta del problema (P_α) es decreciente en el tiempo.*

Demostración:

Por inducción se probará que

$$U_i^j \leq U_i^{j-1}, \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, N, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Considerando el esquema explícito (8):

$$U_i^1 = U_i^0 = \theta_\circ \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N-1 \tag{27}$$

además, a partir de (10)

$$U_\circ^1 = U_1^1 - \frac{\Delta x}{k} q < \theta_\circ = U_\circ^0 \tag{28}$$

y por la condición (11) y (27)

$$U_N^1 = \frac{U_{N-1}^1 + \alpha\, \Delta x\, \theta_\circ}{1 + \alpha\, \Delta x} = \theta_\circ = U_N^0 \tag{29}$$

en consecuencia se verifica (26) para $j = 1$.

Suponiendo que (26) es cierta para $j = k$, aplicando el esquema (8), con $\lambda < \frac{1}{2}$, $\forall\, i = 1, \ldots, N-1$:

$$U_i^k - U_i^{k+1} = (1 - 2\lambda)(U_i^{k-1} - U_i^k) + \lambda\Big((U_{i+1}^{k-1} - U_{i+1}^k) + (U_{i-1}^{k-1} - U_{i-1}^k)\Big) > 0 \tag{30}$$

y teniendo en cuenta las condiciones (10) y (11),

$$U_\circ^k \geq U_\circ^{k+1} \qquad\qquad U_N^k \geq U_N^{k+1}, \tag{31}$$

es decir la tesis.

■

Teorema 3: *Con las mismas hipótesis del teorema 2, la solución discreta del problema (P_α) es menor o igual que la solución discreta del problema (P).*

Demostración:

Considerando el esquema explícito (8) y las condiciones (9), (10) y (11), para la solución U_i^j del problema (P_α) y el mismo esquema (8) con las condiciones (9), (10) y (15) para la solución V_i^j del problema (P), se prueba por inducción sobre j, que para todo $i = 0, 1, \ldots, N$ resulta

$$U_i^j \leq V_i^j, \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

■

Teorema 4: *Con las mismas hipótesis del teorema 2, la solución discreta del problema (P_α) es monótona respecto del parámetro α.*

Demostración:

Por inducción se probará que si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ entonces

$$^{\alpha_1}U_i^j \leq {}^{\alpha_2}U_i^j, \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, N, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

donde se ha indicado con $^{\alpha_k}U_i^j$ la solución correspondiente al dato α_k, $k = 1, 2$.

Cuando $j = 1$,

$$^{\alpha_1}U_i^1 = {}^{\alpha_2}U_i^1 = \theta_o \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N-1, \tag{34}$$

a partir del esquema (8) y la condición inicial (9). Además, teniendo en cuenta (34), por la condición (10) resulta:

$$^{\alpha_1}U_o^1 = {}^{\alpha_2}U_o^1 \tag{35}$$

y por la condición (11) y el teorema 2, resulta:

$$^{\alpha_1}U_N^1 - {}^{\alpha_2}U_N^1 = \frac{\Delta x\,(\alpha_1-\alpha_2)\,(\theta_o - {}^{\alpha_1}U_{N-1}^1)}{(1+\alpha_1\,\Delta x)\,(1+\alpha_2\,\Delta x)} \leq 0 \tag{36}$$

En forma similar, suponiendo la validez de (33) para $j = k$, a partir del esquema (8) y las condiciones (9), (10), (11) y el teorema 2, resulta

$$^{\alpha_1}U_i^{k+1} \leq {}^{\alpha_2}U_i^{k+1}, \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, N \tag{37}$$

es decir la tesis. ■

5.- CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta las propiedades demostradas en los párrafos anteriores, resulta que si los datos constantes θ_o y q verifican las condiciones suficientes [4]:

$$q > \frac{\theta_o\, k}{\Delta x\, P_o^j(\lambda)} \tag{38}$$

siendo

$$P_o^j(x) = \sum_{m=0}^{j-1} a_m(j)\, x^m \qquad \text{con} \quad a_o(j) = 1, \qquad a_1(j) = j-1$$

$$a_m(j) = \frac{(-1)^{m+1} 2^{m-1} (2m-3)!!\, (j-1)!}{(m!)^2\, (j-(m+1))!} \qquad m = 2, \ldots, j-1$$

se producirá un cambio de fase en el problema (P_α) para todo tiempo $t \geq t_j = j\,\Delta t$.

AGRADECIMIENTOS: Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática" (UNR) y "Problemas de Frontera Libre para la Ecuación del Calor-Difusión unidimensional" (CONICET-UA).

REFERENCIAS

[1] **TABACMAN, E. – TARZIA, D.A.** *Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem,* J.Diff.Eq., Vol.77, 1989, págs.16-37.

[2] **TARZIA, D.A.** *Una familia de problemas que converge hacia el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases,* Mathematicae Notae, Vol.XXVII, 1980, págs.157-165.

[3]**TARZIA, D.A. – TURNER, C.V.** *A note on the existence of a waiting time por a two-phase Stefan problem*, Quart. Appl. Math., Vol. 50, 1992, págs. 1-10.

[4] **SANZIEL, M.C.** *Existence of a waiting time in a discrete two-phase Stefan problem,* Applied Mathematics and Computation, Vol.113, 2000, págs. 275-288.

[5] **CIARLET, P.G.** *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation,* Masson, Paris, 1990.