

## ANÁLISIS INCREMENTAL ASINTÓTICO DE LA ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS ELÁSTICAS

**Claudio E. Jougard**

Laboratorio de Mecánica Computacional. Departamento de Física.  
Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.  
Av. Paseo Colón 850, (1063) Buenos Aires, Argentina  
e-mail: jougard@comnet.com.ar

### RESUMEN

En este trabajo se presentan las principales ecuaciones para el análisis del equilibrio, estabilidad y estados crítico de sistemas elásticos discretos obtenidas por una técnica de perturbación aplicada a las ecuaciones no lineales de equilibrio. Se describe una metodología para el trazado de caminos de equilibrio. Esta técnica es una combinación de métodos incrementales iterativos con expansiones asintóticas, las cuales son usadas como predictores de alto orden en cada paso.

### INTRODUCCIÓN

La descripción precisa de la estabilidad estática de sistemas estructurales requiere la solución de ecuaciones de equilibrio no lineales. Las soluciones de estas ecuaciones son un conjunto de curvas, usualmente llamadas *caminos de equilibrio*, y el interés primario es la búsqueda de puntos límites y de bifurcación sobre estos caminos.

Para estos tipos de problemas se pueden distinguir dos formas de solución. La primera corresponde a técnicas de representación analítica, también conocidas como técnicas de perturbación [1-4], donde las soluciones no lineales son expresadas en formas de series de potencias de un parámetro del camino. La segunda forma de solución está basada en métodos de continuación [5-8], los cuales pertenecen a la clase de procedimientos del tipo predictor-corrector, tales como el método de Newton-Raphson. Estos métodos obtienen la solución como un conjunto de puntos calculados paso a paso sobre las curvas solución. Las primeras aplicaciones presentaban un comportamiento no muy robusto en las cercanías de puntos críticos, pero estas dificultades fueron superadas mediante el uso de parámetros de continuación adaptativos [9-11].

Las técnicas de perturbación están basadas en series de potencias, por lo tanto sus resultados aproximan localmente a la solución en las cercanías de puntos conocidos de equilibrio donde los coeficientes de las series son calculados. En contraste, los métodos de continuación producen resultados que no están confinados a una región particular del espacio solución. Para extender la región de aplicación de las técnicas de perturbación es posible combinar esta técnica con los métodos de continuación usando las expansiones asintóticas como predictores de alto orden. Esto ha sido hecho por varios autores [8,12,13] usando como parámetros de

perturbación a diferentes proyecciones ó aproximaciones de la longitud de arco del camino definidas mediante ecuaciones de restricción [14].

En la referencia [15] fue empleada una técnica combinada pero usando la *verdadera* longitud de arco del camino como parámetro de perturbación. Aquí serán presentados los principales resultados de dicho trabajo junto a un ejemplo numérico.

### DESCRIPCIÓN PARAMÉTRICA DE LOS CAMINOS DE EQUILIBRIO

Considere un medio continuo elástico general discretizado por elementos finitos y cuya energía de deformación es  $U(\mathbf{u})$ , siendo  $\mathbf{u}$  un vector de coordenadas generalizadas usualmente asociado a desplazamientos nodales  $u_i$ , sometido a cargas estáticas conservativas asociadas a una función potencial  $\mathcal{Q}(\mathbf{u})$  y proporcionales a un parámetro de cargas  $\lambda$ . Luego la energía potencial total para este sistema es

$$V = U(\mathbf{u}) + \lambda \mathcal{Q}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

Las ecuaciones de equilibrio estático pueden obtenerse mediante la minimización de la energía potencial total [2,3]. Esto implica que las derivadas parciales  $V_{,u}$  deben ser nulas

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda) = V_{,u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{f} = U_{,u}$  es el vector de fuerzas internas generalizadas y  $\mathbf{p} = \mathcal{Q}_{,u}$  es el vector de fuerzas externas generalizadas de referencia, que es asumido constante.

Un camino de equilibrio puede ser descripto parametricamente por funciones  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\lambda(t)$ , donde  $t$  es el parámetro del camino. Si las relaciones funcionales  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda)$  son analíticas entonces  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\lambda(t)$  son también funciones analíticas y pueden representarse por series de Taylor:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}t + \mathbf{u}^{(2)}t^2 + \mathbf{u}^{(3)}t^3 + \dots \quad (3)$$

$$\lambda(t) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}t + \lambda^{(2)}t^2 + \lambda^{(3)}t^3 + \dots$$

donde hemos indicado al  $i$ -ésimo coeficiente de cada serie con un supraíndice entre corchetes. Estos coeficientes pueden ser obtenidos a partir de las derivadas paramétricas

$$\mathbf{u}^{(m)} = \frac{1}{m!} \mathbf{u}^{(m)} \Big|_{t=0} \quad \lambda^{(m)} = \frac{1}{m!} \lambda^{(m)} \Big|_{t=0} \quad (4)$$

donde hemos usado la notación  $(\cdot)^{(m)} = d^m(\cdot)/dt^m$  para indicar la  $m$ -ésima derivada con respecto a  $t$  y  $m!$  es el factorial de  $m$ , esto es,  $m! = m(m-1)(m-2)\dots 1$  y  $0! = 1$ .

El parámetro  $t$  es arbitrario, pero es conveniente identificarlo con alguna variable que asegure la existencia de las relaciones funcionales  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\lambda(t)$ . Esta identificación es impuesta por ecuaciones de restricción paramétricas que vinculan los coeficientes de las series (3).

Si llamamos  $\rho(t)$  al vector posición de la curva definida por  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\lambda(t)$ , entonces el vector tangente a la curva en cada punto es

$$\rho^{(1)} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left\{ u_1^{(1)} \quad u_2^{(1)} \quad u_3^{(1)} \quad \dots \quad \lambda^{(1)} \right\}^T \quad (5)$$

La condición necesaria y suficiente para asegurar que el parámetro del camino  $t$  sea coincidente con la longitud de arco  $s$ , es que el vector tangente sea un vector unitario en todo punto

$$\rho^{(1)\cdot 2} - 1 = \mathbf{u}^{(1)\cdot} \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda^{(1)})^2 - 1 = 0 \quad (6)$$

Si derivamos sucesivamente esta ecuación con respecto a  $t$  y la evaluamos en  $t = 0$  obtenemos

$$\mathbf{u}^{(1)r} \mathbf{u}^{(m)} + \lambda^{(1)} \lambda^{(m)} = \beta_m \quad (7)$$

donde  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$  y para  $m > 2$

$$\beta_m = -\sum_{p=2}^{m-1} \frac{p(m-p+1)}{2m} \left( \mathbf{u}^{(p)r} \mathbf{u}^{(m-p+1)} + \lambda^{(p)} \lambda^{(m-p+1)} \right) \quad (m > 2) \quad (8)$$

Las ecuaciones (7) son las ecuaciones de restricción paramétrica que definen a la longitud de arco como parámetro del camino. Nótese que existe una relación biunívoca entre la longitud de arco y cada punto del camino. Esto implica que las relaciones funcionales  $\mathbf{u}(s)$ ,  $\lambda(s)$  existen en todo punto de la curva y además, para este caso, el radio de convergencia de las series de Taylor (3) debe ser infinito.

### APROXIMACIÓN ASINTÓTICA DE LOS CAMINOS DE EQUILIBRIO

Considere una representación paramétrica  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\lambda(t)$  donde el origen  $t = 0$  coincide con una configuración equilibrada  $(\mathbf{u}_E, \lambda_E)$  que satisface las ecuaciones de equilibrio (2). Si derivamos sucesivamente estas ecuaciones respecto del parámetro  $t$  y evaluamos en  $t = 0$  obtenemos

$$\mathbf{F}_{\mathbf{u}_E} \mathbf{u}^{(m)} = -\mathbf{F}_{\lambda_E} \lambda^{(m)} - \mathbf{g}_m \quad (8)$$

donde  $\mathbf{F}_u$ ,  $\mathbf{F}_\lambda$  son las derivadas parciales respecto de las coordenadas generalizadas  $u_i$  y el parámetro de cargas  $\lambda$ , respectivamente. Estas ecuaciones son llamadas *ecuaciones de equilibrio de m-ésimo orden* [3]. Los vectores  $\mathbf{g}_m$  tienen unidades de fuerzas generalizadas y son llamados *vectores de fuerzas geométricas de m-ésimo orden*, siendo  $\mathbf{g}_1 = 0$ , y para  $m > 1$

$$\mathbf{g}_m = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{m-1}{p!} \left( \mathbf{F}_{\mathbf{u}_E}^{(p)} \mathbf{u}^{(m-p)} + \mathbf{F}_{\lambda_E}^{(p)} \lambda^{(m-p)} \right) \quad (m > 1) \quad (9)$$

Definiendo a la *matriz de rigidez tangente*  $\mathbf{K}_T^E = \mathbf{F}_u|_E$ , y notando que  $\mathbf{F}_\lambda|_E = \mathbf{p}$  tenemos

$$\mathbf{K}_T^E \mathbf{u}^{(m)} = \lambda^{(m)} \mathbf{p} - \mathbf{g}_m \quad (10)$$

Nótese que la matriz  $\mathbf{K}_T^E$  es la misma para todas las ecuaciones de equilibrio de  $m$ -ésimo orden. Si adoptamos la longitud de arco como parámetro del camino, definida por las ecuaciones (7), entonces se puede demostrar [15] que si la matriz  $\mathbf{K}_T^E$  es *no singular* en la configuración  $E$ , entonces las ecuaciones (7) y (10) tienen una solución única para cada par  $\mathbf{u}^{(m)}$ ,  $\lambda^{(m)}$ .

Para que una configuración de equilibrio de un sistema conservativo sea estable es necesario que su energía potencial total sea mínima en dicha configuración [2,3]. Esto se puede verificar indirectamente a través de los autovalores  $\omega$  de la matriz de rigidez tangente [15]. Si todos los autovalores son positivos la configuración de equilibrio es estable, si algún autovalor es negativo la configuración de equilibrio es inestable y si algún autovalor se anula tenemos una configuración de equilibrio crítico.

Tenemos dos tipos de configuraciones de equilibrio crítico: puntos límites y bifurcaciones. En el primer caso la solución es única y se caracteriza por la presencia de un extremo, máximo ó mínimo, del parámetro de cargas en el punto crítico y se identifica por la condición  $\xi^r \mathbf{p} \neq 0$ , donde  $\xi$  es el autovector asociado al autovalor crítico. En el segundo caso, tenemos  $\xi^r \mathbf{p} = 0$ , y se puede demostrar que en el punto crítico coexisten dos soluciones, esto es, se produce una

intersección de caminos de equilibrio llamada *bifurcación*. Uno de estos caminos, llamado *fundamental*, presenta siempre una componente  $\lambda_F^{(1)} \neq 0$ . Si el otro camino de la intersección, llamado *secundario*, presenta una componente  $\lambda_S^{(1)} \neq 0$ , la bifurcación se dice *asimétrica*, y si  $\lambda_S^{(1)} = 0$ , la bifurcación se dice *simétrica* y se caracteriza por la presencia de un extremo del parámetro de cargas en el punto crítico para el camino secundario.

Si las ecuaciones de equilibrio  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda)$  son funciones analíticas de  $\mathbf{u}$  y  $\lambda$ , se puede demostrar [15] que los autovalores  $\omega(t)$  también deben ser funciones analíticas en el parámetro  $t$ . Por lo tanto, un autovalor crítico  $\omega_C(t)$  puede expresarse, en torno de un punto crítico, como

$$\omega_C(t) = \omega_C^{(1)}t + \omega_C^{(2)}t^2 + \omega_C^{(3)}t^3 + \dots \quad (11)$$

Se puede demostrar [15] que en un punto límite ó sobre el camino fundamental de una bifurcación se tiene  $\omega_C^{(1)} \neq 0$ . Esto implica que sobre estos caminos siempre hay una pérdida de estabilidad en el punto crítico. Además, para una bifurcación asimétrica se debe cumplir [15]

$$\omega_{C\ S}^{(1)} = -\frac{\lambda_S^{(1)}}{\lambda_F^{(1)}} \omega_{C\ F}^{(1)} \quad (12)$$

Esta ecuación representa la transición del grado de inestabilidad en una bifurcación asimétrica, esto es, si para cargas crecientes un camino pierde estabilidad el otro debe ganarla en igual grado. Si la bifurcación es simétrica ( $\lambda_S^{(1)} = 0$ ) se tiene  $\omega_{C\ S}^{(1)} = 0$ . Esto implica que el grado de estabilidad de un camino secundario de una bifurcación simétrica no cambia y se puede demostrar [15] que

$$\omega_{C\ S}^{(2)} = -\frac{2\lambda_S^{(2)}}{\lambda_F^{(1)}} \omega_{C\ F}^{(1)} \quad (13)$$

Esta ecuación relaciona la estabilidad del camino secundario de una bifurcación simétrica con su curvatura en el punto crítico y con la pérdida de estabilidad del camino fundamental.

Las ecuaciones (12) y (13), que confirman resultados previos basados en argumentos topológicos [2,16], son interesantes dado que relacionan la variación de estabilidad sólo con la variación de la geometría de los caminos, y no parecen haber sido previamente publicadas.

### IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE CONTINUACIÓN ASINTÓTICO

Se implementó una técnica de continuación para el análisis de estabilidad de pórticos planos basada en el método de Newton-Raphson. Se usaron los primeros cinco términos de las series (3) como predictores de alto orden y se usó un control adaptativo del incremento del paso analizando el error de truncamiento de las series [15]. Los puntos críticos fueron calculados por el método sugerido por Wriggers y Simo [17].

Fue analizado un arco triangular rebajado bajo carga central usando 32 elementos finitos. Las dimensiones del arco son: longitud = 65.712 cm, altura = 0.98 cm, módulo de Young = 7200000 N/cm<sup>2</sup>, área = 1.18 cm<sup>2</sup>, inercia = 0.003784 cm<sup>4</sup>. Este arco presenta dos puntos límites y dos bifurcaciones simétricas antes del primer punto límite. En las figuras 2 y 3 tenemos la variación de la carga P con los desplazamientos central  $v_1$  y en el medio del lado  $v_2$ .

Se puede concluir que el algoritmo se comporta de manera eficiente, tanto para la detección de puntos críticos como para el trazado de los caminos de equilibrio.

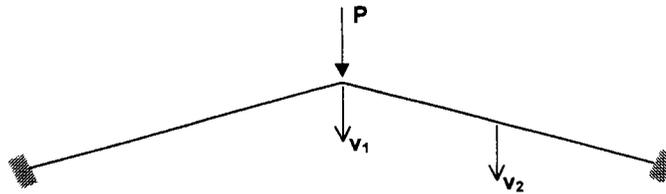


Figura 1: Arco triangular abatido biempotrado.

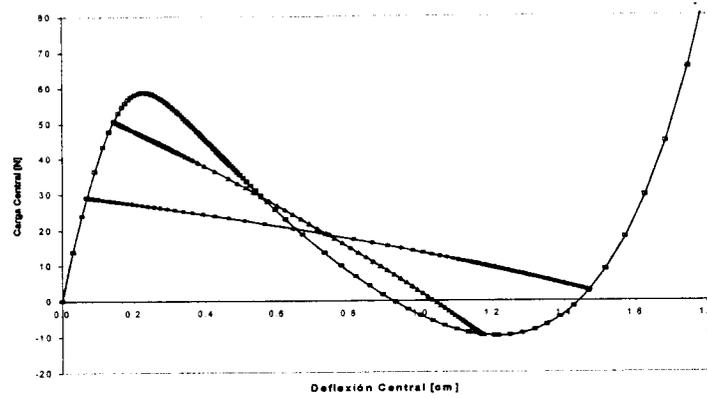


Figura 2: Variación de la carga con desplazamiento central.

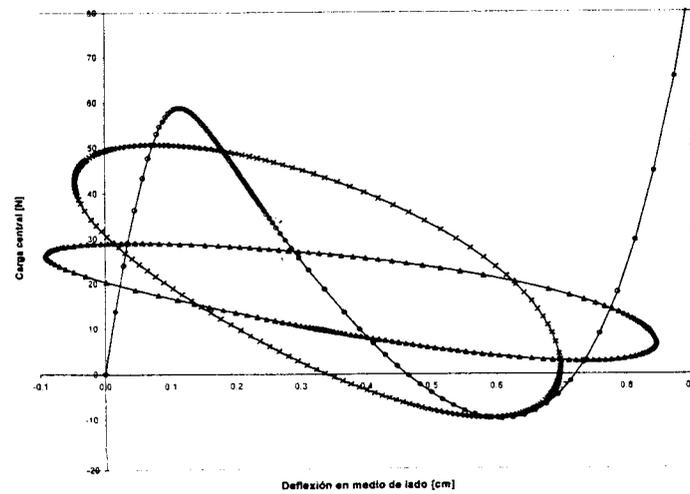


Figura 3: Variación de la carga con desplazamiento en medio de lado.

## REFERENCIAS

- [1] Koiter W.T., *The Stability of Elastic Equilibrium*, traducción al Inglés del original Holandés de 1945. Reporte AFFDL-TR-70-25, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, OH, (1970).
- [2] Thompson J.M.T. y Hunt G.W., *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, London, (1973).
- [3] Thompson J.M.T. y Hunt G.W., *Elastic Instability Phenomena*, John Wiley, London, (1984).
- [4] Godoy L., Flores F., Raichman S. y Mirasso A., *Técnicas de perturbación en el análisis no lineal mediante elementos finitos*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, (1990).
- [5] Riks E., *Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 47, 219-259, (1984).
- [6] Rheinboldt W.C., *Numerical Analysis of Continuation Methods for Nonlinear Structural Problems*, Computers & Structures, Vol. 13, 103-113, (1981).
- [7] Argyris J.H., *Continua and Discontinua*, en: Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Engineering, 11-189, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, OH, AFFDL-TR-66-80 (1967).
- [8] Walker A.C., *A Nonlinear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 5, 97-107, (1969).
- [9] Riks E., *An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, 529-551, (1979).
- [10] Ramm E., *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points*, en Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, W. Wunderlich, E. Stein y K.J. Bathe (eds.), Springer-Verlag, Berlin, 63-89, (1981).
- [11] Crisfield M.A., *An Arc-Length Method Including Line Search and Acceleration*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, 1269-1289, (1983).
- [12] Eriksson A., *On Accurate Descriptions for Primary and Secondary Paths in Equilibrium Problems*, Computers & Structures, Vol. 44, Nº 1/2, 229-242, (1992).
- [13] Cochelin B., *A Path-Following Technique Via an Asymptotic-Numerical Method*, Computers & Structures, Vol. 53, Nº 5, 1181-1192, (1994).
- [14] Eriksson A., *On Linear Constraints for Newton-Raphson Corrections and Critical Point Searches in Structural F.E. Problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, 1317-1334, (1989).
- [15] Jouglard C.E., *Análise Não-Linear Incremental Assintótica da Estabilidade de Estruturas Elásticas*, M. Sc. Tesis. COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, (1993).
- [16] Bazant Z.P. y Cedolin L., *Stability of Structures*, Oxford University Press, New York, (1991).
- [17] Wriggers P. y Simo J.C., "A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, 155-176, (1990).