

## UN MODELO PARA LA DETERMINACION DE ESPECTROS PROMEDIO DE RESPUESTA EN ESTRUCTURAS LINEALES

**Jorge E. Crempien Laborie**

Facultad de Ingeniería Civil, Universidad de los Andes  
San Carlos de Apoquindo 2200, Las Condes, Santiago, Chile

### RESUMEN

El presente trabajo introduce un método para la determinación de espectros promedio de respuesta para estructuras lineales, el cual supone que los movimientos sísmicos corresponden a un modelo no estacionario en amplitudes y frecuencia basado en procesos estocásticos gaussianos tipo series de tiempo. La respuesta máxima de la estructura (espectro de respuesta), se determina a partir de la estructura probabilística de la respuesta, para esto se usa un modelo de ocurrencia temporal de máximos el cual es evaluado numéricamente.

### ABSTRACT

In the present work a method for the evaluation of average response spectrum of linear structures is presented. This method assumes that earthquake ground motions can be represented by an evolutive model made up by Gaussian non stationary random processes, similar to the time series type. The maximum response of the structure (average response spectrum) is determined from the probabilistic structure of the response, for this purpose a temporal occurrence of maximum is used and evaluated numerically.

### INTRODUCCION

En los terremotos ocurridos en la última década ha quedado de manifiesto que el efecto de los sismos sobre las estructuras depende de varios factores, que además de aceleración máxima [1] controlan el comportamiento sísmico, como la intensidad de Arias [2], el potencial destructivo  $P_D$  [3], los cuales tampoco pueden ser usados por si solos, si no que en conjunto para incorporar más características de los sismos.

El tiempo de duración del sismo es un factor importante [4], por lo que la familia de parámetros que se use debe estar relacionada con la evolución temporal de las amplitudes y de las frecuencias [5,6,7]. Como ejemplos de terremotos se usarán el registro de aceleraciones de Orion 8244 de 1972, ocurrido en California, que representa la actividad de sismos en fallas transcurvas; y el registro de Viña del Mar 1985, ocurrido en Chile, que representa la actividad sísmica típica de fallas subductivas. Ambos registros se muestran en las figuras 1 y 2.

### MODELO DE TERREMOTO

Muchos autores han propuesto modelos de terremotos evolucionarios [8,9,10], en este trabajo se usará un modelo gaussiano no separable formado a partir de la suma de varios procesos estacionarios factorados por funciones de potencia de modo que cada producto representa la evolución en una banda de frecuencia [11,12]. Este modelo tiene la forma:

$$\ddot{\mathbf{u}}_g(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^m \psi_k(\mathbf{t}) s_k(\mathbf{t}) \quad (1)$$

en que  $\psi_k$  es la función de potencia y  $s_k$  es el proceso estocástico estacionario que aporta el contenido de frecuencias en una banda  $D_k$ , tal que no se traslapan y cubren todo el dominio de frecuencia. Los procesos estocásticos  $s_k$  son Gaussianos y tienen media nula y varianza unitaria. En cuanto a las

procesos estocásticos  $s_k$  son Gaussianos y tienen media nula y varianza unitaria. En cuanto a las funciones de potencia se usarán funciones tipo gamma para modelar la distribución de energía en el tiempo en cada banda, es decir:

$$\psi_k(t) = \beta_k \cdot e^{-\frac{\alpha_k}{2} \cdot t^{\gamma_k}} \quad (2)$$

en que  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  y  $\gamma_k$  son constantes que se determinan utilizando los momentos temporales [13] de la banda de frecuencia correspondiente de un acelerograma objeto o de acuerdo a regresiones [12].

La estructura probabilística de este modelo está dada por sus momentos de primer y segundo orden solamente. De la Ec. 1 se ve que la media temporal del proceso es nula en tanto que la autocorrelación está dada por:

$$\Phi(t_1, t_2) = E\{\ddot{u}_g(t_1)\ddot{u}_g(t_2)\} = E\left\{\sum_{k=1}^m \varphi_k(t_1)s_k(t_1)\sum_{l=1}^m \varphi_k(t_2)s_l(t_2)\right\} \quad (3)$$

Pero como cada  $s_k$  se define solamente en una banda de frecuencia, entonces resultan ser independientes entre sí en términos probabilísticos por lo cual:

$$\Phi(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2)R_{kk}(t_1, t_2) \quad (4)$$

en que  $R_{kk}(t_1, t_2)$  es la función de correlación del proceso estacionario  $s_k$ , la cual depende de la diferencia de los tiempos  $t_2 - t_1$ . De esta forma la estructura probabilística del modelo de terremoto queda totalmente determinada.

### RESPUESTA ESTRUCTURAL

Si el sistema estructural es representado por una estructura de 1 grado de libertad (IGDL), lineal y elástico, con frecuencia natural  $\omega_n$  y amortiguamiento  $\eta$  la respuesta está dada por:

$$\ddot{u}(t) = \int_0^t h(t-\tau)\ddot{u}_g(\tau)d\tau \quad (5)$$

En que  $h(t-\tau)$  es la función de respuesta a un pulso unitario dada por:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\omega_d} e^{-\eta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (6)$$

A partir de la expresión 6 se puede encontrar la estructura probabilística de la respuesta. Como la media del proceso de excitación es cero, entonces la media de la respuesta también es cero. La estructura probabilística de segundo orden estará dada por la función de autocorrelación, la cual está dada por el valor esperado:

$$E\{u(t_1)u(t_2)\} = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)E\{\ddot{u}_g(\tau_1)\ddot{u}_g(\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \quad (7)$$

Esta ecuación, después de alguna manipulación algebraica y para el caso en que  $t_1 = t_2$  se transforma en el valor cuadrático esperado de la respuesta, correspondiendo a la varianza, esto es:

$$E\{u^2(t)\} = \sigma_u^2(t) = \sum_{k=1}^m \int_0^t \int_0^t h(t-\tau_1)h(t-\tau_2)\varphi_k(\tau_1)\varphi_k(\tau_2)\mathbf{R}_{k,ss}(\tau_2-\tau_1)d\tau_1d\tau_2 \quad (8)$$

En esta última ecuación, usando el teorema de Wiener - Kchintchine y reagrupando términos se llega a la expresión más compacta:

$$\sigma_u^2(t) = \sum_{k=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{k,ss}(\omega) \|\mathbf{I}_k(\omega, t)\|^2 d\omega \quad (9)$$

Donde  $\mathbf{I}(\omega, t)$  es la convolución de la función de impulso y la función de potencia, esto es:

$$\mathbf{I}_k(\omega, t) = \int_0^t h(t-\tau)\varphi_k(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (10)$$

Con la Ec. 10, se tiene la estructura probabilística de la respuesta.

#### EVALUACION NUMERICA DE LA RESPUESTA MEDIA CUADRATICA.

Para evaluar la expresión de la Ec. 10 es necesario recurrir a métodos numéricos por que las integrales involucradas en ella tienen expresión analítica cerrada solo en contados casos muy simples. En el caso de este trabajo es necesario proceder en forma numérica obteniendo primeramente  $\mathbf{I}(\omega, t)$  a partir de:

$$\ddot{\mathbf{I}}(\omega, t) + 2\eta\omega\dot{\mathbf{I}}(\omega, t) + \omega^2\mathbf{I}(\omega, t) = \varphi_k(t) e^{-i\omega t} \quad (11)$$

y que puede ser evaluada por medios tales como la familia de métodos de Newmark. De esa forma se tiene la función de respuesta evaluada para una frecuencia. El error cometido a través de estos métodos es controlable y se puede mantener a un nivel razonable, lo mismo que la estabilidad incondicional [14]. Por último, la expresión 9 se puede evaluar por simple agregación esto es:

$$\sigma^2(t) = \sum_{i=0}^n \Gamma_k(i\Delta\omega) \|\mathbf{I}(i\Delta\omega, t)\|^2 \Delta\omega \quad (12)$$

En la figuras 3.  $\mathbf{I}(\omega, t)$  es evaluada para distintos valores de  $\omega$ . Se puede apreciar que el comportamiento pasado un número de ciclos se concentra en torno a la frecuencia natural. En las figuras 4 se muestran las funciones de valor cuadrático esperado para el registro de Orión con distintas frecuencias naturales de vibrar y amortiguamiento 5% del crítico. Se puede ver que la función de varianza varía suavemente con  $t$  desde un valor cero, creciendo hasta un máximo para tender a cero nuevamente.

#### EVALUACION DEL ESPECTRO ESPERADO DE RESPUESTA

Para determinar el espectro esperado de respuesta se usa una técnica [4] basada en un trabajo para procesos estacionarios [15], la cual permite una evaluación de sencilla de los máximos de la respuesta. El método es aplicable a la respuesta de estructuras solicitadas por terremotos de duración razonable.

en que la zona de movimiento fuerte es relativamente estacionaria durante un tiempo de por lo menos cuatro períodos estructurales.

La respuesta estructural en este caso se puede considerar estacionaria en una zona  $\Delta t_{es}$  que concentra el 80% de la intensidad en evolución de Arias. Si se estima la varianza de la respuesta como:

$$\sigma = 0.85\sigma(t)_{\max} \quad (13)$$

El valor del espectro esperado de respuesta queda dado por la expresión de Davenport:

$$S(T, \eta) = \sigma \left\{ \lambda' + \frac{0.5772}{\lambda'} \right\} \text{ en que } \lambda' = \sqrt{2 \ln \left( \frac{\Delta t_{es}}{T} \right)} \quad (16)$$

En las figuras 5 y 6 se muestra la respuesta esperada máxima o espectro promedio para modelos de terremotos correspondientes a los terremotos de las Figs. 1 y 2. Estos resultados se comparan con el espectro real de respuesta a esos terremotos. En el caso del registro de Orión los resultados son muy bueno, sin embargo se puede ver que para el caso de Viña del Mar no coinciden tanto, lo cual se puede explicar por que el contenido de frecuencias de este registro es predominantemente alto. Además hay que tener presente que una curva representa el promedio de las respuestas de un proceso estocástico, o sea una familia de aceleraciones que tienen las mismas características globales que el terremoto real.

### CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método aproximado, fácil de emplear, que entrega buenos resultados en la estimación de la respuesta máxima de estructuras lineales. Este método se ha empleado en definir espectros de diseño y como herramienta de análisis para ver la influencia de distintos parámetros estructurales y sísmico en la respuesta.

### REFERENCIAS

- [1] Bertero, V.,V., Herrera, R., Mahin, S., "Establishment of Design Earthquakes- Evaluation of Present Methods". Proceedings, International Symposium on Earthquake Engineering, pp. 551, Saint Luis, Missouri, 1976.
- [2] Arias, A., "A measure of earthquake intensity", in R. Hansen (Ed.), Seismic Design for Nuclear Power Plants, MIT Press, Cambridge, MA, 1970.
- [3] Araya, R., y Saragoni R., "Earthquake accelerogram destructiveness potencial factor", Proceedings, Eighth World Conference on Earthquake Engineering, Vol II, pp. 835-843, San Francisco, California, 1984.
- [4] Crempien, J., **Influencia de la duración de movimientos sísmicos en la respuesta de estructuras elásticas**. Tesis para optar al grado de Magister en Ingeniería, Universidad de Chile. Santiago, pp. 96, 1977.
- [5] Crempien, J., **A time-frequency evolutionary model for earthquake motion and structural response**, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, 1988.
- [6] Der Kiureghian, A., Crempien, J., "An evolutionary model for earthquake ground motion", Structural Safety, Vol. 6, pp. 235-246, 1989.
- [7] Crempien, J., Jurie, Y., "Evolución Temporal del Contenido de Frecuencia en Acelerogramas de Terremotos." Memorias XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Vol. 4, pp. 13-24, Tucumán, Argentina, 1995.
- [8] Housner, G., Jennings, P., "Generation of Artificial Earthquakes", J. Eng. Mech. Div., ASCE. Vol. 90, EM1, pp. 113-150, 1964.

- [9] Saragoni, R., Hart, G., "Simulation of artificial earthquakes", Earthquake and Structural Dynamics, Vol. 2, No. 3, pp. 249-267, 1974.
- [10] Crempien, J., "Un Modelo Evolucionario para la Caracterización, Análisis y Simulación de Terremotos", Memorias. VI Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Estructural, Vol I, pp. 221-230, Santiago, 1993.
- [11] Crempien, J., y Aravena, E. "Análisis Dinámico de Estructuras con Equipos Livianos", Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Vol. 8, No. 4, pp. 407-416, 1992.
- [12] Figueroa, P. "Simulación de Acelerogramas Consistentes con la Sismicidad Local", Informe de Habilitación Profesional para optar al título de Ingeniero Civil, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción, pp. 136, 1993.
- [13] Valenzuela, P., "Análisis de Registros de Terremotos", Informe de Habilitación Profesional para optar al título de Ingeniero Civil, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción, pp. 67, Concepción, Chile, 1995.
- [14] Hilber, H.M., Hughes, T.R.J., Taylor, R.L., "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, pp. 283-292, 1977.
- [15] Davenport, A.G. "Note on the distribution of largest value of random function with application to gust loading", Proceedings Institution of Civil Engineers, Vol. 28, Paper 6739, pp. 187-196, 1964.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado en parte por el fondo de investigación de la Universidad de los Andes a través del proyecto No. 001-99, esta ayuda es ampliamente agradecida.

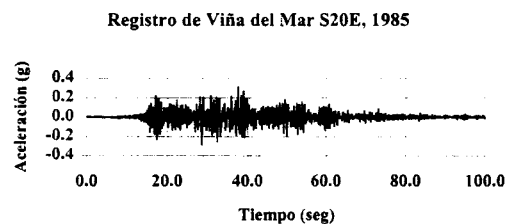


Fig. 1 Registro de aceleraciones obtenido en Viña del Mar para el terremoto de Chile de 1985, componente S20W.

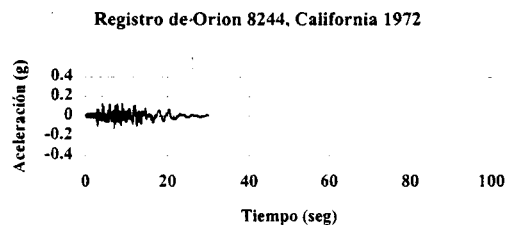


Fig. 2 Registro de aceleraciones obtenido en Orion 8244, San Fernando, California, para el terremoto de 1972.

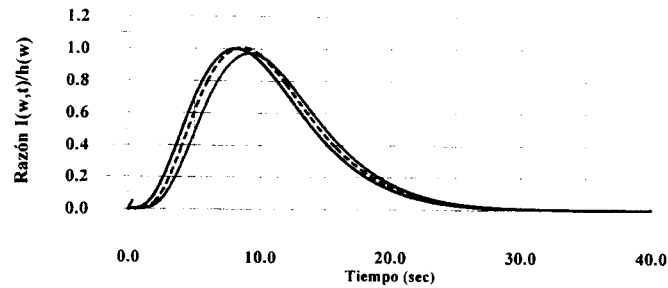


Fig. 3 Función de respuesta a impulso unitario en evolución normalizada para una función de potencia tipo gamma, normalizada a la función de respuesta de impulso unitaria estacionaria

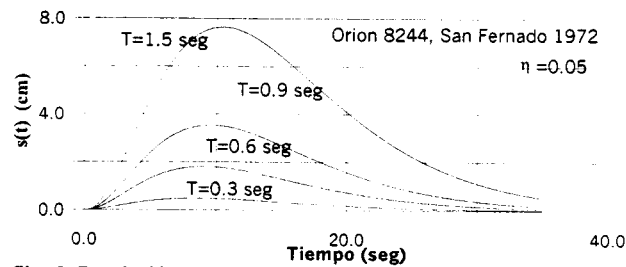


Fig. 4 Desviación estándar de la respuesta de un oscilador de 1GDL al registro de aceleración del sismo de San Fernando, California de 1972 para distintos periodos.

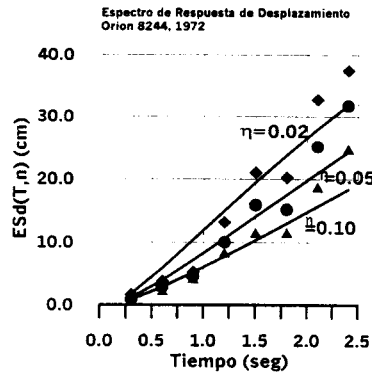


Fig. 5 Espectro esperado de respuesta modelo de Orion 8244, 1972..

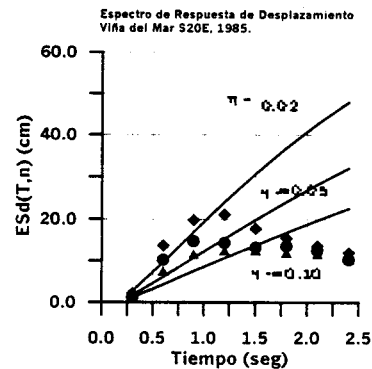


Fig. 6 Espectro esperado de respuesta para Viña del Mar 1985.