

## VIBRACIONES TRANSVERSALES LIBRES DE UN DISCO ORTÓTROPO ROTANTE CON EL BORDE ELÁSTICAMENTE VINCULADO

**Diana V. Bambill<sup>\*</sup>, Carlos A. Rossit<sup>\*</sup>, Patricio A. A. Laura<sup>\*</sup>**

Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur

Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina.

### RESUMEN

En este trabajo se hace un análisis de las vibraciones transversales de un disco rotante, constituido por un material con anisotropía cilíndrica y vinculado elásticamente a traslación y flexión en el borde. El disco gira en su plano, alrededor de un eje central con velocidad angular  $\omega$  constante. Se determinaron los coeficientes de frecuencias naturales fundamentales y velocidades críticas.

### ABSTRACT

The present study deals with transverse free vibration analysis of a disk, made of a material with polarly orthotropic characteristics and elastically restrained at the edge. The disk rotates in its plane at constant angular speed  $\omega$ . Fundamental natural frequency and critical speed coefficients are determined.

### INTRODUCCIÓN

El estudio de las vibraciones transversales libres de discos rotantes isotropos, considerando diferentes tipos de condiciones de vinculación en el borde, ya ha sido tratado por varios autores. Sin embargo en el caso de discos rotantes con ortotropía polar la información con que se cuenta es escasa. El problema es de interés tecnológico dado el uso cada vez más común de materiales compuestos.

En este trabajo, se hace un análisis del problema del disco rotante con ortotropía polar mientras ejecuta vibraciones transversales libres. La placa circular que gira está vinculada elásticamente en el borde. Tiene resortes traslacionales ubicados en el mismo plano de la placa, para restringir su desplazamiento radial y resortes a rotación que condicionan su flexión transversal (ver Figura 1). El problema que se plantea trata de la determinación del coeficiente de frecuencia fundamental de vibración transversal axisimétrica del disco rotante y la condición de inestabilidad.

Es importante hacer notar que la determinación del campo tensional de la placa circular rotante con ortotropía polar ya ha sido resuelto por Glushkov [1], según fue referenciado por Lekhnitskii [2], no teniéndose más información al respecto. En la referencia [4] se han determinado las tensiones inducidas por la rotación cuando el disco es isotropo y está vinculado elásticamente en el borde tanto a traslación como a flexión.

### SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA

La determinación de las frecuencias naturales de vibraciones transversal de un disco que rota con velocidad angular  $\omega$  constante, alrededor de su centro, requiere la minimización de la siguiente funcional en coordenadas polares:

---

<sup>\*</sup> Investigadores científicos CONICET

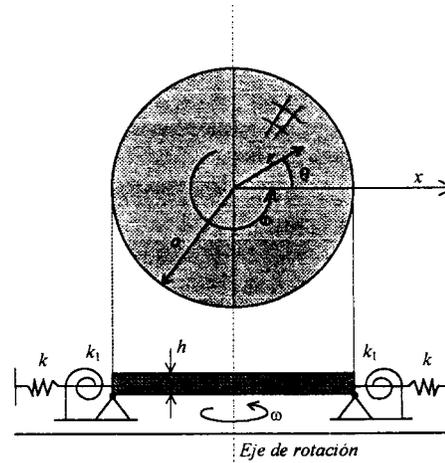


Figura 1: Disco rotante con ortotropía polar vinculado elásticamente en el borde.

$$\begin{aligned}
 J[W] = & \frac{1}{2} \iint \left[ D_r \left( \frac{d^2 W}{d r^2} \right)^2 + D_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{d W}{d r} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2 \nu_\theta D_r \frac{d^2 W}{d r^2} \frac{1}{r} \frac{d W}{d r} \right] r dr d\theta - \rho h \omega_n^2 \iint W^2 r dr d\theta + \\
 & + \frac{1}{2} \iint \sigma_r \left( \frac{d W}{d r} \right)^2 r dr d\theta + \frac{1}{2} k_1 \left( \frac{d W}{d r} \right)_{r=a}^2
 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $W$  es la deflexión del disco;  $\omega_n$  la frecuencia natural de vibración transversal;  $h$  el espesor,  $a$  el radio máximo,  $\rho$  la densidad del material,  $\sigma_r$  la tensión radial dada por la expresión

$$\sigma_r = \frac{\rho \omega^2 a^2}{9 - \kappa^2} \left[ \frac{3 + \nu_\theta + K (\kappa^2 - \nu_\theta^2)}{1 + K (\kappa - \nu_\theta)} \left( \frac{r}{a} \right)^{\kappa-1} - (3 + \nu_\theta) \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]; \text{ con } K = k \frac{a}{E_\theta h}$$

$k_1$  es la constante de los resortes a flexión, y  $k$  la constante de los resortes a traslación

Las rigideces flexionales del disco en las direcciones radial  $r$  y tangencial  $\theta$  respectivamente son:

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12 (1 - \nu_r \nu_\theta)}, \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12 (1 - \nu_r \nu_\theta)}$$

y la relación  $\kappa^2 = \frac{D_\theta}{D_r} = \frac{E_\theta}{E_r}$ .

Se asume como aproximación de la deflexión transversal del disco a la expresión:

$$W \equiv W_a(r) = \sum_{j=0}^N A_j [\alpha_j r^\gamma + \beta_j r^2 + 1] r^{(2j)} \quad (2)$$

donde cada función coordenada  $j$ -ésima cumple las condiciones de borde en  $r = a$ :

$$W_a(a, \theta) = 0 \quad (3a)$$

$$k_1 \left. \frac{dW_a}{dr} \right|_{r=a} + D_r \left( \frac{d^2 W_a}{dr^2} + \nu_\theta \frac{1}{r} \frac{dW_a}{dr} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (3b)$$

y  $\gamma$  es el parámetro de optimización de Rayleigh.

Los coeficientes  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  de la expresión coordenada  $W_a$ , se determinaron utilizando las condiciones de borde (3.a y b)

$$\alpha_j = \frac{2(1+4j+K_1+\nu_\theta)}{a^\gamma(\gamma-2)(1+\gamma+4j+K_1+\nu_\theta)}$$

$$\beta_j = \frac{\gamma(1-\gamma-4j-K_1-\nu_\theta)}{a^\gamma(\gamma-2)(1+\gamma+4j+K_1+\nu_\theta)}$$

donde  $K_1 = k_1 \frac{a}{D_r}$ .

Sustituyendo la expresión aproximada (2) de la deflexión en la expresión (1) de la funcional  $J(W_a)$  y luego minimizándola con respecto a los parámetros  $A_j$ , se obtiene un sistema homogéneo de ecuaciones en esos parámetros arbitrarios. La condición de no-trivialidad permite obtener un determinante ecuación, en el cual la menor de las raíces es la frecuencia fundamental del sistema. La expresión del coeficiente de frecuencia obtenido, se optimiza con respecto al parámetro exponencial  $\gamma$ .

El problema se planteó en forma adimensional, con ese fin se adoptaron:

$$r = \frac{r}{a}; \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\Omega_n^2 = \omega_n^2 \frac{\rho h}{D_r} a^4$$

$$\lambda = \frac{\rho \omega^2 a^4}{E_\theta h^2}$$

donde  $\Omega_n$  es el coeficiente de frecuencia natural adimensional de vibración transversal y  $\lambda$  es el coeficiente adimensional de velocidad de rotación angular del disco.

### RESULTADOS NUMÉRICOS

En la Tabla I se presentan los valores de la velocidad de rotación angular crítica  $\lambda_{cr}$ , (cuando  $\Omega = 0$ ), para el caso de un disco rotante de material isótropo ( $\nu = 0.30$ ) con diferentes tipos de resortes en el borde, (diferentes valores de  $K$  y  $K_1$ ). Los valores obtenidos con una función aproximante de  $W$  de tres términos, expresión (2), están en buen acuerdo con los obtenidos por Maretic [4].

Tabla I: Valores de la velocidad angular crítica  $\lambda_{cr} = \omega^2 \rho a^4 / E_\theta h^2$ , para el disco rotante de material isótropo. ( $\nu = \nu_\theta = \nu_r = 0.30$ ). [ $\Omega = 0$ ].

		$\lambda_{cr} = \frac{\rho \omega^2 a^4}{E_\theta h^2}$			
		$K_1$			
$K$		0	1	10	$\infty$
0		$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1		50.342 <sup>(1)</sup>	70.081	204.361	758.88
		50.259 <sup>(2)</sup>	69.836	200.342	657.048
5		7.3111	12.081	40.108	93.777
		---	---	---	---
10		5.371	8.965	29.348	62.039
		5.371	8.962	29.115	60.045
100		4.037	6.740	21.501	40.984
		4.037	6.739	21.264	40.984
$\infty$		3.909	6.523	20.501	39.075
		3.909	6.523	20.486	38.852

**NOTA:**

<sup>(1)</sup> Valores calculados en el presente trabajo (N=2).

<sup>(2)</sup> Valores dados en la referencia [4].

La Tabla II es análoga a la Tabla I, pero se refiere a un disco constituido por un material con ortotropía polar [ $\kappa^2 = D_\theta / D_r = 1.10$  y  $\nu_\theta = 0.30$ ]. Los valores de la velocidad angular crítica  $\lambda_{cr}$ , fueron calculados utilizando la expresión (2), en la que se tomaron dos y tres términos.

En la Figura 2 se puede observar cómo se comporta el coeficiente de velocidad angular crítica  $\lambda_{cr}$ , en función de la relación de ortotropía del material,  $\kappa^2 = D_\theta / D_r$ . El modelo de disco analizado tiene restringido elásticamente su borde a flexión ( $K_1 = 1$ ) y también se considera la existencia de resortes traslacionales, cuyas constantes toman valores entre uno e infinito ( $1 \leq K \leq \infty$ ).

La Figura 3 muestra la variación del coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$ , en función de la velocidad de rotación angular  $\lambda$ , para el caso en que los resortes a flexión poseen una constante  $K_1 = 1$  y rigidez de los resortes traslacionales varía entre cero e infinito. Las relaciones de ortotropía que caracterizan al material del disco son  $\kappa^2 = 2$  y  $\nu_\theta = 0.30$ .

Tabla II: Valores de la velocidad angular crítica  $\lambda_{cr} = \omega^2 \rho a^4 / E_\theta h^2$ , para el disco rotante de material con ortotropía polar. ( $\kappa^2 = D_\theta / D_r = 1.10$ ,  $\nu_\theta = 0.30$ ). [ $\Omega = 0$ ].

$$\lambda_{cr} = \frac{\rho \omega^2 a^4}{E_\theta h^2}$$

K	K <sub>1</sub>			
	0	1	10	∞
0	∞	∞	∞	∞
1	47.153 <sup>(1)</sup> 45.272 <sup>(2)</sup>	67.425 63.510	217.167 186.727	1054.28 670.10
5	7.342 7.341	11.995 11.995	39.394 39.211	91.403 89.166
10	5.529 5.529	9.101 9.101	29.421 29.381	62.699 62.299
100	4.254 4.254	6.998 6.998	21.941 21.850	43.129 42.254
∞	4.131 4.131	6.791 6.791	21.190 21.108	41.258 40.436

**NOTA:**

<sup>(1)</sup> Valores calculados en el presente trabajo con una aproximación de dos términos (N=1).

<sup>(2)</sup> Valores calculados en el presente trabajo con una aproximación de tres términos (N=2).

De los resultados obtenidos se observa que cuando no existe resorte traslacional ( $K = 0$ ), tampoco existen valores de velocidad crítica, dado que el disco rotante está sometido a tracción. Este hecho se menciona en el trabajo de la referencia [4] donde se estudian discos isotrópicos. La frecuencia fundamental de vibración transversal se incrementa al aumentar la velocidad de rotación angular del disco, evidenciándose el efecto rigidizador de la velocidad.

### AGRADECIMIENTOS

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur

### REFERENCIAS

- [1] G. S. Glushkov. Stress determination in rotating disc having different elastic properties of material in two directions. Tr. Moskov. Stanko-Instrum. S. b. III. 1934.
- [2] S. G. Lekhnitskii. *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers. New York, N. Y. 1968.
- [3] D. V. Bambill. *Problemas elastomecánicos de medios continuos inhomogéneos*. Tesis doctoral Departamento de Ingeniería. Universidad Nacional del Sur. 1999.
- [4] R. Margetic. *Vibration and stability of rotating plates with elastic edge supports*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 210(2), págs. 291-294. 1998.
- [5] S. Timoshenko y J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*, Mc. Graw Hill. Book Co. Inc. New York, N. Y. 1951.

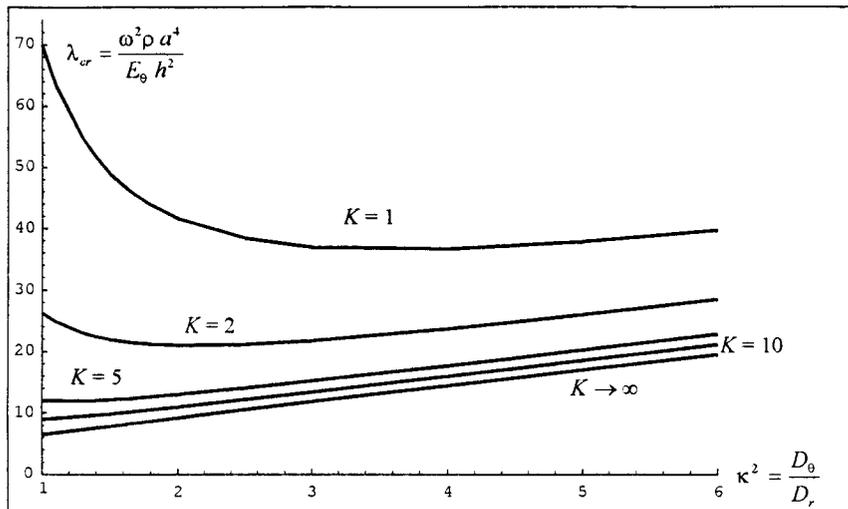


Figura 2: Valores del coeficiente de velocidad angular crítica  $\lambda_{cr} = \frac{\omega^2 \rho a^4}{E_\theta h^2}$  en función de  $\kappa^2$  y con  $K_1 = 1$ . [ $\nu_\theta = 0.30$ ].

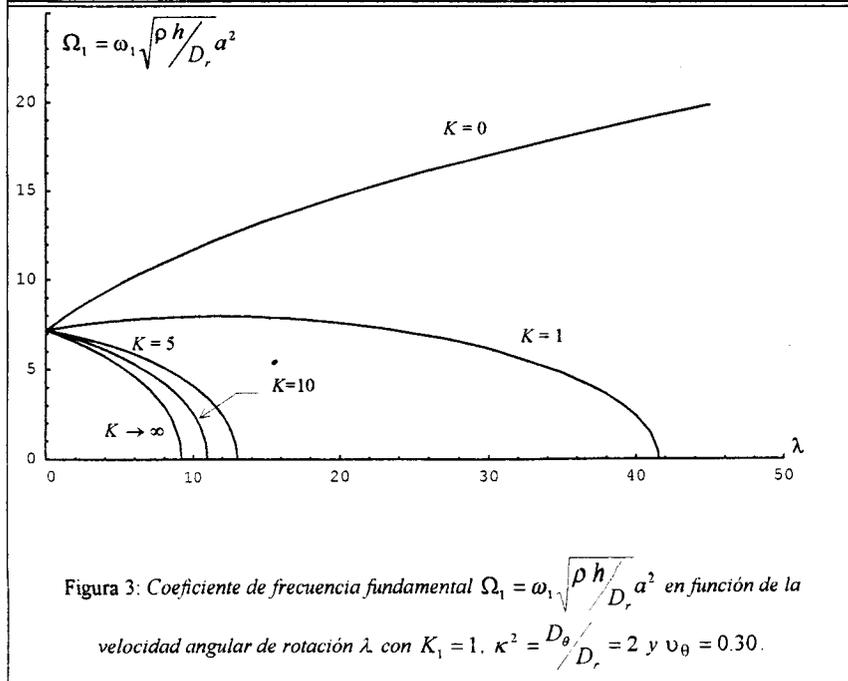


Figura 3: Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}} a^2$  en función de la velocidad angular de rotación  $\lambda$  con  $K_1 = 1$ .  $\kappa^2 = \frac{D_\theta}{D_r} = 2$  y  $\nu_\theta = 0.30$ .