Mecánica Computacional, Volumen XIX, pp. 335-346
Compilado por: F. Quintana y S. Felicelli
San Çarlos de Bariloche, Noviembre de 2000

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES POR EL METODO DE LOS INCREMENTOS FINITOS (MIF).

Una propiedad de las soluciones de eddp lineales con coeficientes constantes.

PARTE 1

A Alma, mi madre y a Estela, mi esposa.

H.E.Retamales
LAMA-UTN-RM
Rodríguez N° 273 - Mendoza

RESUMEN DE PARTE 1:

Se presenta una aplicación del MIF a la solución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (eddp) y resultados que permiten mejorar la eficiencia de los procedimientos de cálculo presentados en las referencias. Se enuncia una propiedad de las soluciones de eddp con coeficientes constantes que, como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, es la base sobre la que se asienta el procedimiento propuesto.
Como en la referencia [8] y teniendo en cuenta el menor costo numérico que representa la construcción de sucesiones recursivas, el cálculo de la solución numérica de eddp se reduce al cálculo de los valores iniciales de tales sucesiones.

Este trabajo es una extensión del realizado en la referencia [8]

ABSTRACT (PART 1)

An application of MIF for a numerical solution of partial differential equations (eddp) and results which allow an improvement on the efficiency of the computation procedures shown in references. A singular attribute of the solution of differential equations related to MIF is annunciated. That is the basis of the procedure proposed.
As in reference [8] and taking into account the lower numerical cost of the recursive sequence construction, the computation of the eddp numerical solution is reduced to the computation of the initial values of such sequences.
This paper is an extension of that in reference [8].

INTRODUCCIÓN:

En las referencias se indican trabajos donde se dan los fundamentos del MIF. En el presente trabajo indicaremos resultados adicionales que permiten, a partir de ciertas propiedades de las soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, disminuir el costo computacional de la metodología utilizada para resolverlas. Para esto se utilizan algoritmos basados en formas recursivas que permiten construir, en un punto interior del dominio de definición de la solución, el vector (Taylor), que se define a continuación, cuyas componentes son los valores de función y derivadas de la función solución de la eddp en ese punto. Luego, a partir del mismo, y mediante la fórmula de Taylor, calcular valores aproximados de la función y/ó sus derivadas en cualquier otro punto del dominio.

Definición:

*Llamaremos **Taylor de u=u(X) en punto X=X(x,y) de su dominio y lo denotaremos por U'** al vector que tiene por componentes a los valores de función y las derivadas de u en X, hasta un cierto orden, ordenadas de la siguiente forma:*

$$U'(X)=[u,u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy},\ \ldots\ ,u_{x}^{j}{}_{y}^{j},\ \ldots\ ] \qquad (1)$$

El cálculo del Taylor U' en un punto del dominio se realiza mediante una combinación alternada de valores iniciales y términos de una sucesión recursiva, o mas precisamente, bi-recursiva.

Procedimiento:

El MIF consiste en hacer una utilización de la fórmula de Taylor por la que, conocido el Taylor U' de una función u=u(X) en un punto X de su dominio, se pueden conocer valores que aproximan a los valores de u y sus derivadas, en otro punto X1 del dominio, mediante el producto (escalar) de U' por los vectores definidos en la referencia [1].

Así:

$$\begin{aligned} &u(X1) = U'(X)\Delta' X1 \\ &u_x(X1) = U'(X)\Delta' X1 \qquad\qquad (2) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &u_{x^i y^j}(X1) = U'(X)\Delta_{x^i y^j}' X1 \end{aligned}$$

Diversas aproximaciones a los valores de función y derivadas se logran con truncamientos de diferentes cantidades de componentes (número finito de términos) de las expresiones de arriba.

Propiedad:

En el caso de ser u=u(X) solución de una eddp lineal con coeficientes constantes, las componentes del Taylor de u en cada punto del dominio verifican la relación establecida en la expresión analítica de la eddp misma y de sus derivadas. Esta propiedad (ver [1]) permite disminuir el costo computacional de resolución numérica de la respectiva eddp.

En este trabajo mostramos el procedimiento que, mediante la aplicación de la propiedad enunciada, resuelve una eddp.

Consideremos un arreglo bidimensional de las componentes del Taylor de la solución de una eddp, como sigue:

$$\begin{bmatrix} u & u_x & u_{x^2} & u_{x^3} & u_{x^4} & u_{x^5} & u_{x^6} & u_{x^7} \\ u_y & u_{xy} & u_{x^2y} & u_{x^3y} & u_{x^4y} & u_{x^5y} & u_{x^6y} & \\ u_{y^2} & u_{xy^2} & u_{x^2y^2} & u_{x^3y^2} & u_{x^4y^2} & u_{x^5y^2} & & \\ u_{y^3} & u_{xy^3} & u_{x^2y^3} & u_{x^3y^3} & u_{x^4y^3} & & & \\ u_{y^4} & u_{xy^4} & u_{x^2y^4} & u_{x^3y^4} & & & & \\ u_{y^5} & u_{xy^5} & u_{x^2y^5} & & & & & \\ u_{y^6} & u_{xy^6} & & & & & & \\ u_{y^7} & & & & & & & \end{bmatrix} \qquad (3)$$

El arreglo bidimensional correspondiente de las componentes del vector Δ'X1 es:

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta x & \Delta x^2/2! & \dots & \dots & \dots & \dots & \Delta x^7/7! \\ \Delta y & \Delta x\Delta y & \Delta x^2\Delta y/2! & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \Delta y^2/2! & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ \dots & \dots & \Delta x^2\Delta y^5/(2!.5!) & \dots & \dots & & & \\ \dots & \Delta x\Delta y^6/6! & & \dots & \dots & & & \\ \Delta y^7/7! & & & & & & & \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Observemos que en los arreglos (3) y (4) son tales que las diagonales contienen las derivadas que aparecen en la diferencial de u=u(x) ordenadas crecientemente, así la última indicada corresponde a las de la diferencial de orden séptimo, esto es todas las de la forma : y, correspondientemente, con i+j = 7.

El segundo miembro de la primer igualdad de (2) indica la sumatoria de los productos de los términos que ocupan la misma posición en (3) y (4).

El segundo miembro de la segunda igualdad de (2) indica la sumatoria de los productos de los términos que se superponen cuando el arreglo (4) se ubica sobre el (3) de tal manera que la posición (1,1) de (4) coincida con la posición (1,2) de (3) y, consecuentemente, los restantes.

El segundo miembro de la última igualdad de (2) indica la sumatoria de los productos de los términos que se superponen cuando el arreglo (4) se ubica sobre el (3) de tal manera que la posición (1,1) de (4) coincida con la posición (i,j) de (3) y, consecuentemente, los restantes.

Esto es conocidos los arreglos (3) y (4) en un punto del dominio de u=u(X),pueden calcularse los valores de función y cualquier derivada en otro punto de tal dominio(Taylor).

Sea la eddp lineal con coeficientes constantes:

$$\Phi(u,n,m) = \sum_{ij=0.0}^{n,m} a_{ij} u_{x^i y^j} = 0 \qquad (5)$$

que indicaremos por:

$$U'\Phi' = 0 \qquad (6)$$

donde

$$\Phi' = [a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots\ldots]' = \{a_{ij}\} \qquad (7)$$

Las componentes necesarias para compatibilizar el producto (6) se completan con ceros.

Las derivadas de la relación (5) se concretan reordenamientos de las componentes de (7), así:

$$\Phi'_{x^k y^h}(u,n,m) = \sum_{ij=0,0}^{n,m} a_{ij} u_{x^{i+k} y^{j+h}} = 0 \qquad (8)$$

Es claro que si u=u(x) es solución de (5) su derivada k-ésima en x y h-ésima en y, es solución de (8)

La relación (5) de arriba vincula un conjunto de nxm derivadas, que estarán distribuidas en el arreglo (3), observemos tal distribución se desplaza dentro de (3) un lugar hacia la derecha cuando se deriva respecto de x a (5), y se desplaza un lugar hacia abajo cuando se deriva (5) respecto de y. Así, las derivadas que aparecen en la expresión (8), son las que aparecen con igual distribución que las de (5),desplazadas respecto de ellas, k lugares hacia la derecha y h lugares hacia abajo.

Veamos como ejemplo la eddp:

$$u_{x^2} + 3u_{xy} - u_y = 0 \qquad (i)$$

y sus derivadas:

$u_{x^3} + 3u_{x^2y} - u_{xy} = 0$; *respecto_ de_x,_* $u_{x^2y} + 3u_{x^2y^2} - u_{y^2} = 0$; respecto de y. Se observa que la primera relación contiene derivadas en las posiciones (1,3),(2,1) y (2,3) y que la derivada respecto de x contiene las derivadas en las posiciones (1,4),(2,2) y (2,4) esto es, un corrimiento hacia la derecha. La derivada respecto de y contiene las derivadas en las posiciones (2,3),(3,1) y (3,3) esto es, un corrimiento hacia abajo de la distribución inicial en el arreglo bidimensional (3).

Por otra parte, si u=u(x) es solución de (5), esta expresión permite el cálculo de una de las derivadas que aparecen en (5) a partir de los restantes. Además, como consecuencia de la afirmación de arriba respecto de (8), se puede extender esta observación a todas las derivadas de orden superior a uno que indicaremos como **primer término recursivo.**

La relación (i) de arriba y sus derivadas, muestran que es posible el cálculo de alguna de ellas a partir de las dos restantes, digamos la de la posición (2,3) a partir de las (1,3) y (2,1). La derivada respecto de x de (i), nos permite calcular (2,4) a partir de (1,4) y (2,2). Es decir, si conocemos toda la primera fila y las posiciones (2,1) y (2,2), podemos calcular el resto de la segunda fila mediante las relaciones derivadas de (i) respecto de x.

Con razonamiento análogo, conocida toda la primera y segunda columnas y relaciones derivadas respecto de y de la relación (i), se puede calcular la tercera columna y completar las sucesivas filas como se indicó para la segunda fila.

Los valores indicados arriba como conocidos , son los **valores iniciales** de los procedimientos recursivos mencionados.

Como en la referencia [1] y teniendo en cuenta el menor costo numérico que representa la construcción de sucesiones recursivas, el cálculo del Taylor de la solución de eddp se reduce al cálculo de los valores iniciales de tales sucesiones.

En el caso bidimensional no se da la posibilidad de establecer una fórmula recursiva que permita, a partir de un conjunto de valores iniciales, construir el Taylor de la solución de la eddp en forma simple como en una edo (ver [1]). En el caso presente, los valores iniciales necesarios para el cálculo de las componentes del Taylor de la solución de una eddp no pueden obtenerse inicialmente y luego, recursivamente calcular las restantes. En cambio, si se puede calcular inicialmente los valores iniciales necesarios para obtener recursivanente, las restantes derivadas correspondientes a la diferencial de orden n de la solución en un punto. Ambas etapas de ese procedimiento se fijan en el siguiente esquema numérico.

$$\begin{bmatrix} \Delta_0^{'} x1 \\ \Delta_0^{'} x2 \\ \Delta_0^{'} x3 \\ \Phi^{'} \\ \Phi^{'}_x \\ \Phi^{'}_y \end{bmatrix} .U^{'}(X0) = \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

5. -H.Retamales. retamales.doc.Una propiedad....

$$
\begin{bmatrix} \Delta_0^{\cdot}x1 \\ \Delta_0^{\cdot}x2 \\ \Delta_0^{\cdot}x3 \\ \Phi^{\cdot} \\ \Phi^{\cdot}_x \\ \Phi^{\cdot}_y \\ \Delta_0^{\cdot}x4 \\ \Delta_0^{\cdot}x5 \\ \Phi^{\cdot}_{xx} \\ \Phi^{\cdot}_{xy} \end{bmatrix} .U^{\cdot}(X0) = \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u4 \\ u5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10)
$$

Los sistemas de ecuaciones lineales (seal) (9) y (10) indican dos etapas del procedimiento mencionado, esto es, (9) permite el cálculo de las primeras 6 componentes del Taylor de la solución de (5) en X=X0. Las tres primeras filas corresponden a los valores iniciales de la pseudo recursividad de las representada por las tres últimas filas. Esta última se concreta en la forma implícita del cálculo de unas derivadas a partir de otras como ocurre en las tres últimas filas del sistema de ecuaciones algebraicas lineales (seal) (9).

En el seal (10), se calculan las primeras 10 componentes del Taylor de la solución de (5) en X=X0, como extensión de lo calculado en (9). En este caso, se agrega el cálculo de 2 valores iniciales (filas 7 y 8) y dos términos recursivos (filas 9 y 10), aquí también en su esquema implícito .

Es claro que el procedimiento puede extenderse hasta el orden de derivadas que se requiera para lograr la aproximación de resultados exigidas por la aplicación. Las dificultades a encontrar serán las derivadas de la solución de seal s de gran tamaño. Esto mismo determinará el alejamiento máximo que permite la aplicación, respecto del punto de cálculo. Será esto además, lo que determine la necesidad de partición del dominio en elementos de dimensión finita para lograr la precisión deseada en todo el dominio. Se espera, de todos modos, que tales elementos se comporten como macro elementos y conserven las ventajas de bajo costo numérico señalada arriba.

A continuación se muestra un ejemplo de resolución de la ecuación de Laplace en su versión bidimensional .

Se debe aproximar la solución u = u(x,y) de la eddp: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ con las condiciones de borde indicadas en el siguiente cuadro.

DATOS						RESULTADO
	Abscisa	Ordenada	Tipo de cond. De borde	Valor		Componentes del TAYLOR de u en $X_0 = (1.8 ; 0.4)$
1	1.2	0,9	1	1		0.53715031
2	1.2	0.9	2	0		0.037963415
3	1.4	0.9	1	1		0,12137984
4	1.6	0.905	1	1		0.013945865
5	1.8	0.912	1	1		0,25118085E-02
6	2	0.93	1	1		0.47454333E-02
7	2.1	0,94	1	1		-0.87314386E-03
8	2.11	0.8	1	1		0,15970357E-02
9	2.16	0.6	1	1		0,20100947E-03
10	2.28	0.4	1	1		0,39004684E-03
11	2.4	0.3	1	1		0.65468778E-04
12	2.5	0.27	1	1		0.46374338E-05
13	1.2	0,024	2	0		0.16478526E-03
14	1.2	0,024	1	0		-0.12312849E-03
15	1.4	0,024	1	0		-0,23303777E-03
16	1.6	0.023	1	0		-0.35214376E-03

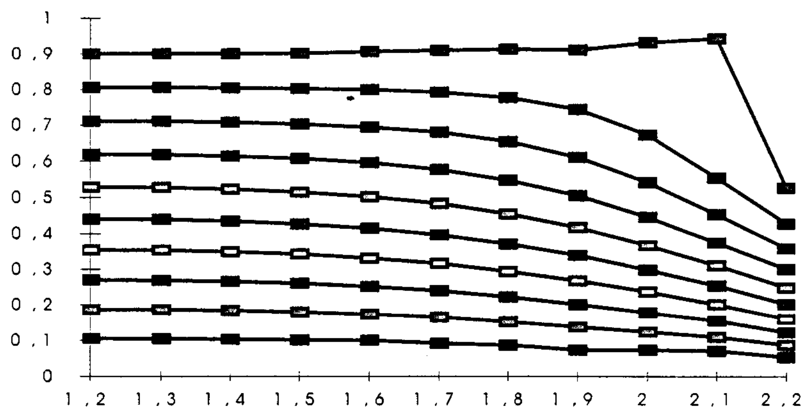
17	1,8	0,022	1	0		0.20279077E-03
18	2	0,021	1	0		-0,9030617E-03
19	2,2	0,02	1	0		0,40367479E-03
20	2,4	0.015	1	0		-0,14553954E-02
21	1,2	0.7905	2	0		0,10900176E-02
22	1,2	0.681	2	0		-0,13904934E-02
23	1,2	0,5715	2	0		-0,17408317E-02
24	1,2	0,462	2	0		-0,70076527E-03
25	1,2	0,3525	2	0		0,15006974E-02
26	1,2	0,243	2	0		-0,12137709E-03
27	1,2	0,1335	2	0		0,56311083E-03

Las condiciones de borde tipo 1 corresponden a valores función en el punto dado, la tipo 2 corresponde a valores de derivadas respecto de y. El Taylor de la solución u(x,y) se calculó en X=(1.8, 0.4) y los resultados obtenidos se muestran en la última columna de la tabla anterior.

La gráfica 1 siguiente muestra las curvas de los valores obtenidos a partir del Taylor calculado.

En el ejemplo comentado se calcularon también los valores de derivadas primeras en los puntos del dominio que se usaron para la representación gráfica de los valores de función. Estos resultados mostraron también gran regularidad.

Figura 1: Curvas equipotenciales (Lineas de corriente).



REFERENCIAS

1.- H.E.Retamales.
El método de los incrementos finitos. San Juan.1986

2.- H.E.Retamales
Aproximación numérica de magnitudes múltiplemente paramétricas.
Informe N° 1 presentado a SECYT.San Juan.1988

3.- H.E.Retamales.
Solución numérica de la ecuación de Laplace mediante un computador de muy pequeña capacidad. Aplicación a la distribución de presiones en la lenteja de una válvula mariposa.
Resumen enviado al MECOM 1988.Córdoba.

4.- H.E.Retamales y colaboradores.
Aplicación de Técnicas de Interpolación y Filtrado a un estudio gravimétrico Areal
(Informe N°1) Subsidio de la U.N.S.J. Secr. de Investigaciones.

5. H.E.Retamales y A. Sarazúa.

Aplicación de técnicas de interpolación y filtrado a un estudio gravimétrico areal. Informe N°
2. San Juan. 1991
6. H.E.Retamales
Solución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales mediante una forma finito incremental.
LAMA UTN- Mza. Mendoza, 1995.
7.- H.E.Retamales
Interpolación n-dimensional mediante una forma finito incremental.
LAMA UTN- Mza. Mendoza, 1995.
8. H.E.Retamales
Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de los incrementos finitos(MIF). Una propiedad de las soluciones.
Mendoza, dic. 1996.

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES POR EL METODO DE LOS INCREMENTOS FINITOS (MIF).

Una propiedad de las soluciones de eddp lineales con coeficientes constantes.

PARTE 2

H.E.Retamales
LAMA-UTN-RM
Rodríguez N° 273 Mendoza

RESUMEN DE PARTE 2:

Presentamos aquí la segunda parte del trabajo de la referencia [9] que consiste en una forma alternativa de proceder, respecto de la presentada en la parte 1, que genera una forma compacta de resolución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales (seal) al que se reduce el cálculo de las componentes del Taylor de la solución en un punto del dominio. Tal forma compacta es la mínima que contiene los valores iniciales de la sucesión recursiva (ó bi-recursiva) asociada con el Taylor.

ABSTRACT

The second part of the paper of reference [9] is presented , it is an alternative way of that on part 1 which gives a compact form for solving the algebraic system of equations (seal) as it is reduced solution Taylors components computation in a dominion point. Such compact form is the minimum which contains the initial values of the recursive sequence associated with the Taylor.

INTRODUCCIÓN

La disminución del costo computacional del procedimiento presentado se debe evaluar comparando la resolución del seal de n ecuaciones simultáneas por cualquier método y el de la resolución del seal equivalente representado por uno de k ecuaciones simultáneas y el calculo de las n-k restantes por un procedimiento recursivo (fuera de secuencia).

El segundo aspecto distintivo es el referido a la precisión de los resultados obtenidos por los dos métodos de la comparación anterior. Así, en el propuesto en este trabajo, se trata de los errores asociados a la resolución de un seal de una cantidad reducida de ecuaciones frente al de original, y dado que los errores del procedimiento recursivo no son acumulativos, consecuentemente podemos considerar que estas operaciones son exactas frente a la magnitud de los que resultan de la solución directa de los dos seals involucrados.

En la resolución de un problema modelado por una relación diferencial con condiciones de contorno dadas por un conjunto k de condiciones sobre un conjunto discreto de puntos del contorno de un dominio dado, y con una precisión también preestablecida, cuando para su resolución numérica se utiliza el MIF, se plantean dos caminos, a saber:

1) Cálculo del Taylor en un solo punto del dominio, con tantas componentes como exige la precisión preestablecida, o bien,

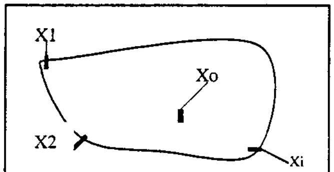


Figura 1. **Dominio**

2)Partición del dominio en celdas de dimensión limitada por la precisión exigida y pocas componentes del Taylor.

Cualquiera de los dos caminos produce resultados equivalentes en lo que a precisión se refiere, pero con costos computacionales diferentes.

<u>Calculo del Taylor en un solo punto del dominio:</u>

La primera opción, ofrece la oportunidad de minimizar tal costo computacional por utilización conveniente de las propiedades consideradas en la parte 1. Hemos visto que el MIF permite plantear en forma directa el seal que permite el cálculo del Taylor de la función que aproxima a la solución. Si en este seal se agrupan las ecuaciones correspondientes a las k condiciones de contorno, en las primeras k filas del sistema y si, por otra parte, son n-k las restantes igualdades que completarán el seal, con el que se calcula un Taylor de n componentes, se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \Delta' X_1 \\ \Delta' X_2 \\ \ldots\ldots \\ \Delta' X_K \\ \pounds \\ \pounds_x \\ \pounds_y \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \pounds_{x^i y^j} \end{bmatrix} \cdot \left[U_0'\right] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots\ldots \\ u_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Las n-k últimas filas agrupan a las igualdades correspondientes a las relaciones diferenciales y sus derivadas en orden creciente. En particular, como se señalara en la parte 1, estas igualdades representan n-k pasos del algoritmo recursivo que permite la generación de las correspondientes componentes del Taylor en a partir de los k valores iniciales de las primeras k componentes .El bloque matricial de (1) que contiene los coeficientes de estas n-k igualdades, es muy ralo y los elementos no nulos están ubicados dentro de una banda que contiene a los elementos de la diagonal principal desde la fila k+1 hasta la n-enésima. Por tanto, se exige una selección adecuada del método de resolución del seal, para evitar operaciones innecesarias con ceros y consecuentes inexactitudes por propagación de errores.

Una forma admisible de operar dentro de los condicionantes indicados arriba, es mediante operaciones de filas que permitan anular las n-k columnas de la derecha de las primeras k filas. Esto genera un seal de k ecuaciones que permite el cálculo de las k primeras componentes del Taylor. Como señalaramos arriba, el bloque banda restante permite el cálculo de las n-k restantes componentes del Taylor a partir de las k primeras.

La disminución del costo computacional de este procedimiento se debe evaluar comparando la resolución del seal de n ecuaciones simultáneas por cualquier método y el de la resolución del seal equivalente representado por uno de k ecuaciones simultáneas y el calculo de las n-k restantes por un procedimiento recursivo (fuera de secuencia).

El segundo aspecto distintivo es el referido a la precisión de los resultados obtenidos por los dos métodos de la comparación anterior. Así, en el propuesto en este trabajo, se trata de los errores asociados a la resolución de un seal de k ecuaciones frente al de n ecuaciones, dado que los errores del porcedimiento recursivo no son acumulativos y, consecuentemente podemos considerar que estas operaciones son exactas frente a la magnitud de los que resultan de la solución de los dos seals considerados.

Partición del dominio en celdas:

La segunda opción, aplicable a casos de no linealidades, como se indica en la Figura 2, se trata de la partición de un dominio en elementos cualesquiera, dentro de los cuales se elige un punto Xi0 en el que se determina el Taylor correspondiente que verifica las relaciones diferenciales y las condiciones de borde o de continuidad en su contorno. Esta opción y la anterior no son incompatibles, por el contrario, la misma propiedad que se aplicó en aquel caso es aplicable aquí y a consecuencia de esto los elementos de esta participación pueden ser mas grandes. Esto es, los Taylors calculados calculados en el punto interior de un elemento cualquiera tienen tantas componentes como exige la precisión de resultados, y minimizada la cantidad de puntos de condiciones de borde y de condiciones de continuidad en el elemento, las restantes condiciones serán las diferenciales y sus derivadas hasta el orden necesario. La matriz del seal con el que se calculan los Taylors de cada elemento es una rala por bloques. Los bloques diagonales tienen una forma semejante a la de la amtriz del seal de la opción primera. Por lo tanto, le son aplicables las mismas operaciones que en aquel caso. Los bloques no nulos ni diagonales son tales que sus únicas líneas no nulas son las correspondientes a las condiciones de continuidad con los elementos contiguos, así el bloque Aij contiene solo las condiciones de continuidad entre el elemento i con el elemento j calculados con el Taylor del elemento j. Las mismas condiciones continuidad se completan, calculadas con el Taylor del elemento i y aparecen en las mismas líneas del bloque diagonal Aii.Entonces en los bloques no diagonales no aparecen las relaciones diferenciales ni sus derivadas.

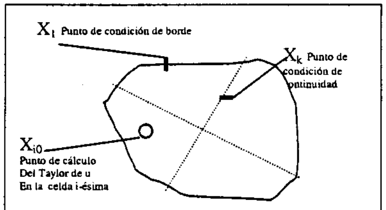


Figura 2: **Partición del Dominio**

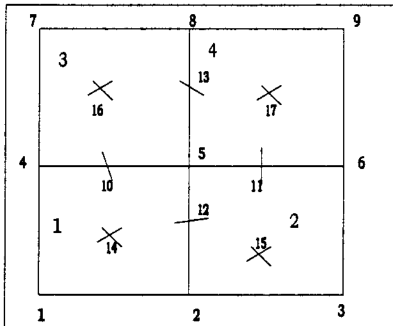


Figura 3: Ejemplo

Ejemplo:

Veamos el siguiente ejemplo: En la Figura 3 se muestra la partición en cuatro elementos rectangulares del dominio de un problema diferencial que indicaremos así:

Aproximar la solución de la siguiente eddp

$$a_{01}u_x + a_{11}u_{xy} + a_{20}u_{yy} \qquad \text{(i)}$$

en el contorno rectangular dado por los puntos 1,3,7 y 9 de la figura, con las condiciones de borde:

$$u(X_j) = u_j \text{ ; para } j=1,2,3,4,5,6,7,8 \text{ y } 9 \qquad \text{(ii)}$$

con una precisión tal que los Taylors de cada elemento tengan 10 componentes y regularidad tal que se deban introducir condiciones de continuidad en la función, en los puntos 2,4,5,6,8,10,11,12 y 13.

Los puntos de cálculo de los Taylors, condiciones de borde y de continuidad se muestran en la siguiente tabla.

El seal que resuelve el cálculo de los 4 Taylors es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \\ U_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}$$

Donde:

$$U_i' = \begin{bmatrix} U_i \\ U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{xxi} \\ U_{xyi} \\ U_{yyi} \\ U_{xxxi} \\ U_{xxyi} \\ U_{xyyi} \\ U_{yyyi} \end{bmatrix}; i = 1,2,3, \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} \Delta_1 X_1 \\ \Delta_1 X_2 \\ \Delta_1 X_4 \\ \Delta_1 X_5 \\ \Delta_{x1}' X_5 \\ \Delta_{y1} X_5 \\ \Delta_1 X_{11} \\ \pounds \\ \pounds_x \\ \pounds_y \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ -\Delta_2' X_5 \\ -\Delta_{x2}' X_5 \\ -\Delta_{y2}' X_5 \\ -\Delta_2' X_{11} \\ [0] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \pounds \\ \pounds_x \\ \pounds_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{01} & 0 & 0 & a_{11} & a_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{01} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{01} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{20} \end{bmatrix}$$

En forma análoga se plantean los demás elementos de (iii).

Por aplicación del procedimiento de eliminación de filas comentado en la opción primera , se eliminan las columnas correspondientes a , resultando un sistema de bloques 7x7 en vez de 10x10 y, consecuentemente, un seal de 27 ecuaciones en vez de uno de 40.

La modificación se resume en las filas correspondientes a los vectores como se indican a continuación:

$$
\left[\Delta_i X_k\right]^t = \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta X_k - \frac{\partial a_{01}}{\partial a_{20}} \Delta y_k^2 / 2! \\ \Delta Y_k \\ \Delta X_k^2 / 2! - \frac{\partial a_{01}}{\partial a_{20}} \Delta X_k \Delta Y_k^2 / 2! + \frac{\partial a_{01} \partial a_{11}}{\partial^2 a_{20}} \Delta Y_k^3 / 3! \\ \left(1 - \frac{\partial a_{01}}{\partial a_{20}} \Delta Y_k^3 / 3!\right) \Delta X_k \Delta Y_k + \frac{\partial a_{01} \partial a_{11}}{\partial^2 a_{20}} \Delta Y_k^2 / 2! \\ \Delta X_k^3 / 3! \\ \Delta X_k^2 \Delta Y_k / 2! - \frac{\partial a_{11}}{\partial a_{20}} \Delta X_k \Delta Y_k^2 / 2! \end{bmatrix}
$$

Es claro que se tiene alguna libertad para la elección de cuales son los puntos donde es conveniente considerar las condiciones de continuidad y el tipo de tal condición. En el ejemplo anterior hemos incluido continuidad de función y de derivadas de primer orden en cada variable.

Para el caso de considerar Taylors de mayor dimensión: 15,21, 28,... deben incluirse condiciones de continuidad en derivadas de mayor orden y 3,4 ó 5, respectivamente, relaciones diferenciales adicionales. Así, el seal correspondiente podrá reducirse de 60 a 36, de 84 a 44 y de 112 a 62, respectivamente. Se observa que el porcentaje de reducción lograda es mayor cuanto mas alta sea la dimensión del Taylor.

El ejemplo numérico de solución de la ecuación de Laplace, mostrado en la primera parte de este trabajo, fué realizado con la segunda de estas opciones. En aquel caso, como se señalara, las disminución de operaciones consecuencia de la resolución de seals de 27 ecuaciones en vez de otros de 171 permitió utilizar computadores de muy pequeña capacidad(64 Kb).

REFERENCIAS

1.- H.E.Retamales.
El método de los incrementos finitos. San Juan.1986

2.. H.E.Retamales
A finite increment method for a numerical solution of partial differential equations
Mza. febrero de 1987

3.- H.E.Retamales
Aproximación numérica de magnitudes múltiplemente paramétricas.
Informe N° 1 presentado a SECYT.San Juan.1988

4.- H.E.Retamales.
Solución numérica de la ecuación de Laplace mediante un computador de muy pequeña capacidad. Aplicación a la distribución de presiones en la lenteja de una válvula mariposa.
Resumen enviado al MECOM 1988.Córdoba.

5.- H.E.Retamales y colaboradores.
Aplicación de Técnicas de Interpolación y Filtrado a un estudio gravimétrico Areal
(Informe N°1) Subsidio de la U.N.S.J. Secr. de Investigaciones.

6. H.E.Retamales y A. Sarazúa.
Aplicación de técnicas de interpolación y filtrado a un estudio gravimétrico areal.
Informe N° 2. San Juan. 1991

7. H.E.Retamales
Solución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales mediante una forma finito incremental.
LAMA UTN- Mza. Mendoza,1995.

8.- H.E.Retamales
Interpolación n-dimensional mediante una forma finito incremental.
LAMA UTN- Mza. Mendoza,1995.

9. H.E.Retamales
Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de los incrementos finitos(MIF). Una propiedad de las soluciones.
LAMA-UTN.Mendoza, dic.1996.

10. H.E.Retamales
S OLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES POR EL METODO DE LOS INCREMENTOS FINITOS (MIF). Una propiedad de las soluciones de eddp lineales con coeficientes constantes. PARTE I

12. *-H.Retamales. retamales.doc.Una propiedad....*

LAMA-UTN-Mendoza, dic.1996