

INTEGRACIÓN NUMÉRICA CONSISTENTE DE ELEMENTOS FINITOS HEXAÉDRICOS DE OCHO NODOS

Claudio E. Jouglard

Laboratorio de Mecánica Computacional. Departamento de Física.
Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.
Av. Paseo Colón 850, (1063) Buenos Aires, Argentina
e-mail: jouglard@comnet.com.ar

RESUMEN

En este trabajo se presenta una técnica de integración numérica para obtener en forma explícita las matrices de rigidez de los elementos hexaédricos isoparamétricos de ocho nodos. Esta técnica está basada en el truncamiento consistente de la expansión en series de Taylor de las matrices de rigidez de estos elementos. Se demuestra que las matrices resultantes no poseen modos espurios y pasan el test de la parcela (patch test).

INTRODUCCIÓN

Los análisis de elementos finitos en gran escala demandan un gran esfuerzo computacional. Por lo tanto resulta importante disminuir estos costos. La integración numérica mediante cuadratura de Gauss es la opción preferida para la evaluación de operadores gradiente y ecuaciones constitutivas pues puede ser aplicada eficientemente en problemas no lineales. El número mínimo de puntos de integración es determinado por condiciones de consistencia y estabilidad [1] y se lo conoce como cuadratura completa. La cuadratura completa es costosa pero el uso de un número menor de puntos de integración da elementos con modos espurios ó mecanismos [2]. El uso de una cuadratura reducida de un punto en elementos hexaédricos de ocho nodos genera inestabilidades conocidas como modos *reloj de arena* (hourglassing modes [1,2]), que se manifiestan como oscilaciones espurias superpuestas a campos de variación suave. Muchos autores [3-10] han desarrollado controles efectivos de estos modos añadiendo algún tipo de estabilización al elemento obtenido mediante cuadratura de un punto.

En este trabajo se mostrará una técnica original para integrar numéricamente en forma consistente las matrices de rigidez del elemento hexaédrico de ocho nodos. Los elementos resultantes pasan el test de la parcela (patch test [1]) y no presentan modos espurios.

ECUACIONES PARA ANÁLISIS DE TENSIONES POR ELEMENTOS FINITOS

Considere el mapeo de un elemento hexaédrico del espacio físico al espacio de coordenadas paramétricas ξ, η, ζ como se muestra en la figura 1. La configuración del elemento en las coordenadas ξ, η, ζ es un cubo triunitario $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$.

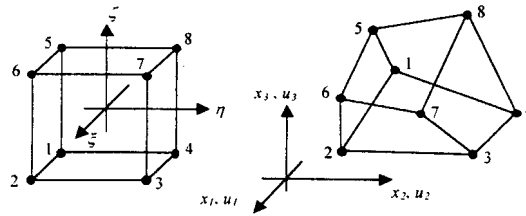


Figura 1. Mapeo del elemento hexaédrico de ocho nodos

Para este elemento las coordenadas espaciales x_i , y las componentes de desplazamiento u_i son aproximadas en el elemento por funciones de interpolación N_a en función de los valores nodales x_{ia} y u_{ia} como

$$\begin{aligned} x_i(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \eta, \zeta) x_{ia} = \mathbf{N}^T \mathbf{x}_i \\ u_i(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \eta, \zeta) u_{ia} = \mathbf{N}^T \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad i=1,2,3 \quad (1)$$

Donde

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8]^T \quad (2)$$

y las funciones de forma trilineales son

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) (1 + \zeta_a \zeta) \quad (3)$$

siendo ξ_a, η_a, ζ_a son los valores nodales de las coordenadas paramétricas ξ, η, ζ .

El principio de los desplazamientos virtuales para un cuerpo deformable puede postularse como

$$\delta W = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \delta W_{ext} = 0 \quad (4)$$

donde δW_{ext} es el trabajo virtual de las cargas externas, $\boldsymbol{\sigma}$ es el campo de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}]^T \quad (5)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ es el campo de deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23}]^T \quad (6)$$

cuyas componentes valen

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (7)$$

Reemplazando las aproximaciones a los desplazamientos (1) tenemos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (8)$$

donde \mathbf{d} es el vector de desplazamientos nodales y \mathbf{B} es la matriz gradiente

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta) \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \left(\sum_{k=0}^1 \mathbf{B}_{ijk} \xi^i \eta^j \zeta^k + \mathbf{B}_{i2j} \xi^i \eta^j \zeta^2 + \mathbf{B}_{i2j} \xi^i \eta^2 \zeta^j + \mathbf{B}_{2ij} \xi^2 \eta^j \zeta^i \right) \quad (9)$$

Las matrices \mathbf{B}_{ijk} son únicamente función de las dimensiones del elemento y pueden encontrarse en los textos usuales de elementos finitos [1,2]. J es el Jacobiano de la transformación de coordenadas

$$J(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \left(\sum_{k=0}^1 J_{ijk} \xi^i \eta^j \zeta^k + J_{j2} \xi^i \eta^j \zeta^2 + J_{i2j} \xi^i \eta^2 \zeta^j + J_{2ij} \xi^2 \eta^i \zeta^j \right) \quad (10)$$

siendo los coeficientes J_{ijk} únicamente función de las dimensiones del elemento. Se puede demostrar fácilmente que si el elemento tiene forma de paralelepípedo entonces el Jacobiano es constante y diremos que el elemento es de forma *regular*.

El vector de tensiones σ está relacionado con el vector ε por la ecuación constitutiva

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{d} \quad (11)$$

Siendo \mathbf{C} la matriz constitutiva. Para una variación arbitraria $\delta\mathbf{d}$ del vector de desplazamientos nodales la variación del campo de deformaciones y el trabajo virtual externo son

$$\delta\varepsilon = \mathbf{B}\delta\mathbf{d}, \quad \delta W_{\text{ext}} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (12)$$

donde \mathbf{f}_{ext} es el vector de fuerzas nodales externas. Luego la ecuación (4) queda

$$\delta W = \delta\mathbf{d}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \sigma \, dV - \mathbf{f}_{\text{ext}} \right) = 0 \quad (13)$$

Que debe ser válida para cualquier variación arbitraria $\delta\mathbf{d}$, por lo tanto debe verificarse que

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_V \mathbf{B}^T \sigma \, dV = \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (14)$$

siendo \mathbf{f}_{int} el vector de fuerzas internas y

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (15)$$

es la *matriz de rigidez*. Nótese que para un elemento de forma regular esta integral se puede calcular exactamente pues el integrando es simplemente un polinomio. En este caso la matriz gradiente se puede escribir como

$$\hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{J_{000}} (\hat{\mathbf{B}}_{000} + \hat{\mathbf{B}}_{100} \xi + \hat{\mathbf{B}}_{010} \eta + \hat{\mathbf{B}}_{001} \zeta + \hat{\mathbf{B}}_{110} \xi \eta + \hat{\mathbf{B}}_{101} \xi \zeta + \hat{\mathbf{B}}_{011} \eta \zeta) \quad (16)$$

donde indicamos con un símbolo $\hat{\mathbf{B}}$ a las cantidades asociadas a un elemento de forma regular. Luego la matriz de rigidez para un elemento de forma regular es

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}_{000} + \frac{1}{3} (\hat{\mathbf{K}}_{002} + \hat{\mathbf{K}}_{020} + \hat{\mathbf{K}}_{200}) + \frac{1}{9} (\hat{\mathbf{K}}_{022} + \hat{\mathbf{K}}_{202} + \hat{\mathbf{K}}_{220}) \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_{000} &= \frac{8}{J_{000}} \hat{\mathbf{B}}_{000}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_{000} & \hat{\mathbf{K}}_{220} &= \frac{8}{J_{000}} \hat{\mathbf{B}}_{110}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_{110} \\ \hat{\mathbf{K}}_{200} &= \frac{8}{J_{000}} \hat{\mathbf{B}}_{100}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_{100} & \hat{\mathbf{K}}_{202} &= \frac{8}{J_{000}} \hat{\mathbf{B}}_{101}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_{101} \\ \hat{\mathbf{K}}_{020} &= \frac{8}{J_{000}} \hat{\mathbf{B}}_{010}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_{010} & \hat{\mathbf{K}}_{022} &= \frac{8}{J_{000}} \hat{\mathbf{B}}_{011}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_{011} \\ \hat{\mathbf{K}}_{002} &= \frac{8}{J_{000}} \hat{\mathbf{B}}_{001}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_{001} & & \end{aligned} \quad (18)$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA. CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD

Para un hexaedro de forma arbitraria, el integrando de la matriz de rigidez es un cociente de polinomios en ξ, η, ζ . Aunque la integración analítica podría ser posible, como ha sido hecho en cuadriláteros [11,12], la integración numérica es la opción preferida pues puede ser aplicada eficientemente en problemas no lineales. Usualmente se emplean las fórmulas de cuadratura Gaussiana que aproximan la integral como una suma ponderada de evaluaciones del integrando en ciertos puntos del elemento conocidos como puntos de integración de Gauss. Es importante determinar la mínima cantidad de puntos requeridos pues el esfuerzo numérico es proporcional a este número.

Para asegurar la convergencia del procedimiento numérico con las matrices integradas numéricamente se deben satisfacer condiciones de consistencia y estabilidad. El requerimiento de consistencia asegura que a medida que el tamaño del elemento tiende a cero la solución aproximada tiende a la exacta. Para satisfacer este requerimiento el elemento debe pasar el test de la parcela [1,2], esto es, debe reproducir exactamente, como mínimo, cualquier estado de tensión constante. Esto implica que el vector de fuerzas internas exacto debe ser obtenido en estos casos. La condición de estabilidad requiere que la solución del sistema de ecuaciones tenga solución única sin presencia de mecanismos espurios. Estos mecanismos son debidos a la presencia de autovalores nulos impropios. Se puede demostrar [13] que si para un elemento de forma regular (Jacobiano constante) la matriz de rigidez integrada numéricamente coincide con la obtenida analíticamente entonces el elemento no tiene modos espurios.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA CONSISTENTE DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ

Considere la expansión en series de Taylor de la matriz gradiente

$$\mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{J_{000}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{B}}_{mns} \xi^m \eta^n \zeta^s \quad (19)$$

Luego la matriz de rigidez puede escribirse como

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{K}}_{ijk} \xi^i \eta^j \zeta^k \frac{d\xi d\eta d\zeta}{8} \quad (20)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ijk} = \sum_{p=p_1, q=q_1, k=r_1}^i \sum_{j=0}^j \sum_{k=0}^k \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_{pqr} j_{i-p} j_{j-q} j_{k-r} \quad (21)$$

con $p_1 = \max(0, i-2)$, $s_1 = \min(2, 3+p-i)$, $q_1 = \max(0, j-s_1)$, $t_1 = \min(2, 3+p-i, 3+q-j)$ y $r_1 = \max(0, k-t_1)$.

$$\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_{pqr} = \frac{8}{J_{000}} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r \tilde{\mathbf{B}}_{ijk} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}_{p-i, q-j, r-k} \quad (22)$$

Integrando (20) obtenemos

$$\mathbf{K} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}_{2p2q2r}}{(2p+1)(2q+1)(2r+1)} \quad (23)$$

Esta sumatoria dá la misma matriz de rigidez que se obtendría integrando analíticamente. Para aproximar consistentemente esta suma proponemos retener solo los términos que aparecen en la ecuación (17) correspondientes a un elemento de forma regular, esto es

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_{000} + \frac{1}{3}(\tilde{\mathbf{K}}_{002} + \tilde{\mathbf{K}}_{020} + \tilde{\mathbf{K}}_{200}) + \frac{1}{9}(\tilde{\mathbf{K}}_{022} + \tilde{\mathbf{K}}_{202} + \tilde{\mathbf{K}}_{220}) \quad (24)$$

Nótese que esta matriz debe coincidir con la obtenida analíticamente cuando el elemento tiene forma regular, por lo tanto se puede asegurar que no tiene modos espurios.

SIMPLIFICACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ APROXIMADA

Considere un campo lineal de desplazamientos nodales \mathbf{d}_L que dá un estado de tensiones constante $\sigma_{000} = (\mathbf{CB}_{000}/J_{000})\mathbf{d}_L$ sobre el elemento. Luego, de (14) el vector de fuerzas internas queda

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{K} \mathbf{d}_L = \frac{8}{J_{000}} \left(\mathbf{B}_{000}^T + \frac{1}{3}(\mathbf{B}_{200}^T + \mathbf{B}_{020}^T + \mathbf{B}_{002}^T) \right) \mathbf{CB}_{000} \mathbf{d}_L \quad (25)$$

Luego podemos definir una *matriz gradiente consistente* \mathbf{B}^C como

$$\mathbf{B}^C = \frac{1}{J_{000}} \left(\mathbf{B}_{000} + \frac{1}{3}(\mathbf{B}_{200} + \mathbf{B}_{020} + \mathbf{B}_{002}) \right) \quad (26)$$

y una matriz de rigidez aproximada

$$\tilde{\mathbf{K}}^* = \tilde{\mathbf{K}}_{000}^* + \frac{1}{3}(\tilde{\mathbf{K}}_{002}^* + \tilde{\mathbf{K}}_{020}^* + \tilde{\mathbf{K}}_{200}^*) + \frac{1}{9}(\tilde{\mathbf{K}}_{022}^* + \tilde{\mathbf{K}}_{202}^* + \tilde{\mathbf{K}}_{220}^*) \quad (27)$$

Siendo

$$\tilde{\mathbf{K}}_{000}^* = 8J_{000} \mathbf{B}^{C^T} \mathbf{CB}^C \quad (28)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{002}^* &= \frac{8}{J_{000}} \tilde{\mathbf{B}}_{001}^T \mathbf{CB}_{001} & \tilde{\mathbf{K}}_{022}^* &= \frac{8}{J_{000}} \tilde{\mathbf{B}}_{011}^T \mathbf{CB}_{011} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{020}^* &= \frac{8}{J_{000}} \tilde{\mathbf{B}}_{010}^T \mathbf{CB}_{010} & \tilde{\mathbf{K}}_{202}^* &= \frac{8}{J_{000}} \tilde{\mathbf{B}}_{101}^T \mathbf{CB}_{101} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{200}^* &= \frac{8}{J_{000}} \tilde{\mathbf{B}}_{100}^T \mathbf{CB}_{100} & \tilde{\mathbf{K}}_{220}^* &= \frac{8}{J_{000}} \tilde{\mathbf{B}}_{110}^T \mathbf{CB}_{110} \end{aligned} \quad (29)$$

Las expresiones para las matrices $\tilde{\mathbf{B}}_{jk}$ pueden encontrarse en [14,15], y puede demostrarse que estas matrices son ortogonales a cualquier vector lineal \mathbf{d}_L , excepto para $i = j = k = 0$. Luego la matriz (27) pasa el test de parcela para cualquier geometría del elemento.

Esta matriz simplificada es similar a la deducida originalmente por Liu y otros [10] difiriendo únicamente en la matriz gradiente consistente \mathbf{B}^C , que en la referencia mencionada solo considera el primer término. Como consecuencia dicha formulación no pasa el patch test para elementos de forma irregular. Esto fue notado y corregido posteriormente [14,15] usando matrices gradiente uniformes [5,6]. Además en dichas referencias se adoptan hipótesis que aquí son innecesarias, como asumir que el Jacobiano es constante en todo el elemento.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un procedimiento para obtener las expresiones explícitas de las matrices de rigidez de los elementos hexaédricos de ocho nodos para análisis de tensiones. Se ha demostrado que el procedimiento asegura la consistencia y estabilidad de las matrices obtenidas. Los elementos obtenidos son similares, aunque no iguales, a otros que aparecen en la literatura [10,14,15] por lo que tienen un costo computacional equivalente. La mayor diferencia radica en la forma consistente en que aquí fueron deducidas las matrices de rigidez.

REFERENCIAS

- [1] **Zienkiewicz O.C. y Taylor R.L.**, *The Finite Element Method*, McGraw Hill, Vol. I., 4 edn., McGraw-Hill, London, 1989.
- [2] **Irons B.M. y Ahmad S.**, *Techniques of Finite Elements*, Horwood, Chichester, 1980.
- [3] **Belytschko T. y Ong J.S.J.**, *Hourglass control in linear and nonlinear problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 43, págs. 251-276 (1984).
- [4] **Kosloff D. y Frazier G.A.**, *Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes*, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., vol. 2, págs. 57-72 (1978).
- [5] **Flanagan D.P. y Belytschko T.**, *A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 17, págs. 679-706 (1981).
- [6] **Belytschko T.**, *Correction of article by D.P. Flanagan and T. Belytschko*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 19, págs. 467-468 (1983).
- [7] **Liu W.K. y Belytschko T.**, *Efficient linear and nonlinear heat conduction with a quadrilateral element*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 20, págs. 931-948 (1984).
- [8] **Jacquotte O.P. y Oden J.T.**, *An accurate and efficient a posteriori control of hourglass instabilities in underintegrated linear and nonlinear elasticity*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 55, págs. 105-128 (1986).
- [9] **Schulz J.C.**, *Finite element hourglassing control*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 21, págs. 1039-1048 (1985).
- [10] **Liu W.K., Ong J.S.J. y Uras R.A.**, *Finite element stabilization matrices - a unification approach*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., vol. 53, págs. 13-46 (1985).
- [11] **Babu D.K. y Pinder G.F.**, *Analytical integration formulae for linear isoparametric finite elements*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 20, págs. 1153-1166 (1984).
- [12] **Rathod H.T.**, *Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element*, Comp. Struct., vol. 30, págs. 1101-1109 (1988).
- [13] **Jouglard C.E.**, *On the stabilization of underintegrated quadrilateral elements*, 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, San Pablo, (1999).
- [14] **Liu W.K., Hu Yu-Kan y Belytschko T.**, *Multiple quadrature underintegrated finite elements*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 37, págs. 3263-3289 (1994).
- [15] **Liu W.K., Guo Y., Tang S. y Belytschko T.**, *A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 154, págs. 69-132 (1998).