

## REFINAMIENTO ADAPTATIVO DE MALLAS APLICABLE A PROBLEMAS BI- Y TRIDIMENSIONALES

Gustavo A. Ríos Rodríguez, Ezequiel López, Norberto Nigro, Mario Storti

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería CIMEC  
Universidad Nacional del Litoral, CONICET  
Güemes 3450, 3000, Santa Fe, Argentina  
e-mail: gusadrr@yahoo.com.ar, web page: <http://www.cimec.org.ar>

**Palabras clave:** Refinamiento adaptativo, calidad de malla, nodos irregulares.

**Abstract.** *Se presenta una técnica para implementar el refinamiento adaptativo de mallas a problemas de la mecánica computacional en general y en especial en este trabajo, se aplica a la mecánica de fluidos computacional. Se adopta el criterio de admitir la presencia de un único nodo irregular entre dos elementos adyacentes, por lo cual la solución en los mismos deberá estar restringida. El criterio de un sólo nodo irregular implica que no puede haber una diferencia de más de un nivel de refinamiento entre elementos que compartan al menos una arista y/o una cara. Por lo tanto, si un nuevo refinamiento generara una diferencia de dos niveles entre elementos adyacentes, también deberían incluirse en la lista de elementos a refinar a todos aquellos elementos que sean necesarios de forma tal que se respete dicho criterio. El refinamiento se realiza manteniendo el tipo de elemento. Esto permite conservar la ventaja de tener un único tipo de elementos en toda la malla. Se observa que la calidad de los elementos refinados nunca es menor que un cierto factor constante por la calidad de los elementos originales. Por otra parte, se presentan resultados de varios tests realizados con distintos indicadores de calidad de los elementos y de la malla. Los mismos permiten observar que la calidad de los elementos refinados no se degrada demasiado. Se presentan resultados de aplicar el refinamiento adaptativo a problemas de flujos 2-D y 3-D.*

## 1 INTRODUCCIÓN

Se presenta una estrategia para implementar el refinamiento adaptativo a mallas constituidas por un mismo tipo de elementos. Dicha estrategia realiza un refinamiento de la malla del tipo-h, particionando a los elementos de la misma en elementos más pequeños del mismo tipo. El objetivo de realizar el refinamiento adaptativo de mallas es refinar solamente aquellas zonas del dominio donde se lo requiere. A su vez, el requerimiento de refinar puede estar dado por distintos factores entre los que se pueden considerar el mejorar la precisión con la que se resuelven fenómenos localizados propios de un problema o aproximar con mayor precisión los contornos curvos del dominio mallado. Todo ello permite reducir el error en la solución obtenido por el solver de elementos finitos que se esté utilizando, empleando sólo una cantidad restringida de elementos. Aquí no se discute cuál podría ser el mejor criterio o indicador de error para un tipo específico de problema o de situación con una malla dada. Solamente se presenta una estrategia para refinar una malla en forma localizada, conservando el tipo de elemento y sin degradar la calidad de la misma, independientemente de cual sea el indicador que dicte en dónde y por qué se realizará el refinamiento.

Los sucesivos niveles de refinamiento se van aplicando según lo mencionado de manera tal que siempre se respeta el criterio de admitir la presencia de, a lo sumo, un único nodo irregular entre dos elementos “vecinos”. Este es el principal criterio que rige a la forma en que se realiza el refinamiento. La presencia de nodos irregulares en las mitades de las aristas hace que la solución en dichos nodos sea restringida al valor promedio de la solución en los nodos que definen a las aristas sobre las cuales han surgido estos nodos irregulares, a la vez que obligan a que no pueda haber diferencias de más de un nivel de refinamiento entre elementos vecinos. Esto último hace que se deban agregar elementos, en forma recursiva, a la lista de elementos a refinar dada por el indicador o criterio elegido.

En primer lugar se presentan resultados de un análisis previo a la elección de la estrategia de refinamiento. El análisis se enfoca en la medición de la calidad de los elementos que se obtienen del refinamiento. Si bien no se demuestran en forma teórica los resultados obtenidos, se cree que los mismos son lo suficientemente convincentes como para adoptar esta estrategia de refinamiento frente a otras. Luego se describe la estrategia de refinamiento propiamente dicha.

Luego se comentan en forma breve algunas cuestiones sobre el desarrollo de una herramienta en Octave que permite aplicar la estrategia de refinamiento adaptativo. Se menciona rápidamente la estructura de datos utilizada y algunas consideraciones que se tuvieron en cuenta al momento de desarrollar dicha herramienta. Esta se desarrolla en Octave dada la facilidad de programación que permite el lenguaje interpretado. Se sabe de las limitaciones en cuanto a eficiencia que esto impone con respecto a otros lenguajes de programación como C++, sin embargo, dada la etapa de desarrollo en la que se encuentra este trabajo, se ha decidido concentrar los esfuerzos en la exploración y análisis de las distintas situaciones que plantea el utilizar este tipo de estrategia de refinamiento más que en la eficiencia del código. Por otra parte, Octave permitiría acoplar el refinador de mallas al solver de las ecuaciones (PETScFEM), con lo cual el refinamiento podría realizarse en forma verdaderamente adaptativa.

Finalmente, se muestran resultados obtenidos de la aplicación de la estrategia de refinamiento a dos problemas típicos de la dinámica de gases: una cuña bidimensional y un cono resuelto en forma 3-D, ambos a Mach 1.5. Ambos problemas se resuelven con el módulo ADVDIF de PETScFEM.

## 2 ANÁLISIS PREVIO A LA ELECCIÓN DE LA ESTRATEGIA DE REFINAMIENTO

Surge la necesidad de determinar una estrategia adecuada para realizar el refinamiento localizado de mallas tridimensionales. El principal requerimiento es que no se degrade, o se degrade de manera acotada y admisible, la calidad de la malla que se obtiene luego de aplicar el refinamiento. Se presentan dos alternativas

- Refinar tanto hexaedros como tetraedros en hexaedros en un primer nivel de refinamiento y en los siguientes niveles de refinamiento, seguir particionando los hexaedros en hexaedros. Esta opción presenta como mayor ventaja que los hexaedros, a medida que se refinan, no sólo mantienen su calidad, sino que además pueden mejorarla. Las mayores desventajas son que se debe mantener una malla con distintos tipos de elementos si se parte de una malla de tetraedros y que los hexaedros que se obtiene de refinar un tetraedro pueden ser de muy baja calidad.
- Refinar conservando el tipo de elemento de la malla original. En este caso, surge la necesidad de analizar cuánto se degrada la calidad de los elementos que surgen del refinamiento para el caso particular de tetraedros. En dicho análisis debe tenerse en cuenta que hay más de una forma de realizar la partición de un tetraedro, por lo que debe considerarse la influencia que cada una de ellas tiene sobre la calidad de los elementos obtenidos.

Se decidió explorar en mayor profundidad la segunda alternativa, dada la ventaja de que permite conservar el tipo de elemento de la malla de partida. Para ello, se debe encontrar primero cuales son las formas de particionar un tetraedro en tetraedros y hexaedros en hexaedros. Dicha información se presenta en.<sup>1</sup> Además, allí se plantea que es posible mantener la calidad de los tetraedros que se obtienen del refinamiento, lo cual motiva aún más a analizar en detalle la segunda alternativa.

Dado que debe analizarse la calidad de los elementos, se plantea el problema de las métricas de calidad a utilizar tanto para el elemento como para la malla. En este trabajo en particular se utilizaron las siguientes métricas de calidad para un elemento

- Angulos diedros máximos y mínimos.
- Relación

$$Q = 36\sqrt{2} \frac{V}{\sum_{i=1}^6 l_i^3}$$

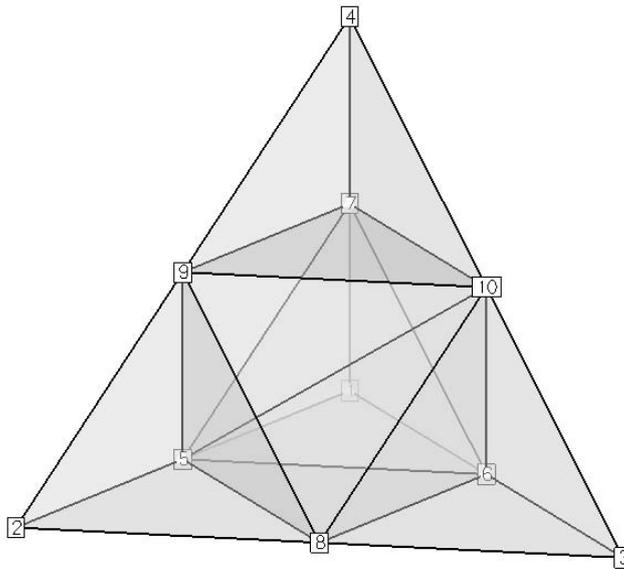


Figure 1: Refinamiento tetraedro - tetraedro

entre el volumen  $V$  del tetraedro y la sumatoria de las longitudes al cubo de cada una de sus aristas, afectadas por una constante tal que  $Q = 1$  para el tetraedro regular.

Por otra parte, se asume que la calidad de la malla viene dada por la calidad del peor elemento de la malla, sea cual fuere la métrica de calidad utilizada.

Tal como se menciona en,<sup>1</sup> la partición del tetraedro en tetraedros se realiza calculando las coordenadas de los 6 nuevos nodos que surgen en las mitades de las aristas del tetraedro de partida y uniendo estos nodos entre sí. Con ello se obtiene de forma única 4 tetraedros semejantes al original, ubicados en los vértices del mismo. Luego debe realizarse la partición del octaedro que resulta en el centro del tetraedro de partida, con lo que se obtienen 4 tetraedros más. Sin embargo, dependiendo de como se efectúe dicha partición, será distinto el resultado que se obtenga en cuanto a la calidad de los elementos. Existen tres alternativas, dependiendo cual sea la diagonal del octaedro elegida para particionarlo. En la figura 1 se muestra el caso en que se tome la diagonal 5-10 para particionar al octaedro. Las otras diagonales alternativas son las 9-6 y 7-8.

La primer experiencia consistió en analizar el comportamiento de las métricas de calidad según la forma de particionar al tetraedro. Se aplicó el algoritmo de refinamiento a todos los elementos que surgen de cada etapa de refinamiento. De esta experiencia se determinó que la mejor alternativa para refinar los tetraedros es utilizar siempre la diagonal más corta, ya que si se utiliza cualquiera de las otras dos diagonales, el valor de la métrica  $Q$  para el peor elemento, disminuye siempre en cada paso de refinamiento. Si se utiliza la diagonal más corta, sólo se

observa una disminución de  $Q$  en el primer nivel de refinamiento. En los niveles de refinamiento posteriores, el valor de  $Q$  se mantiene constante o incluso puede mejorar respecto al nivel de refinamiento anterior. En la figura2 se pueden observar los resultados para el caso particular en que el tetraedro de partida sea el regular.

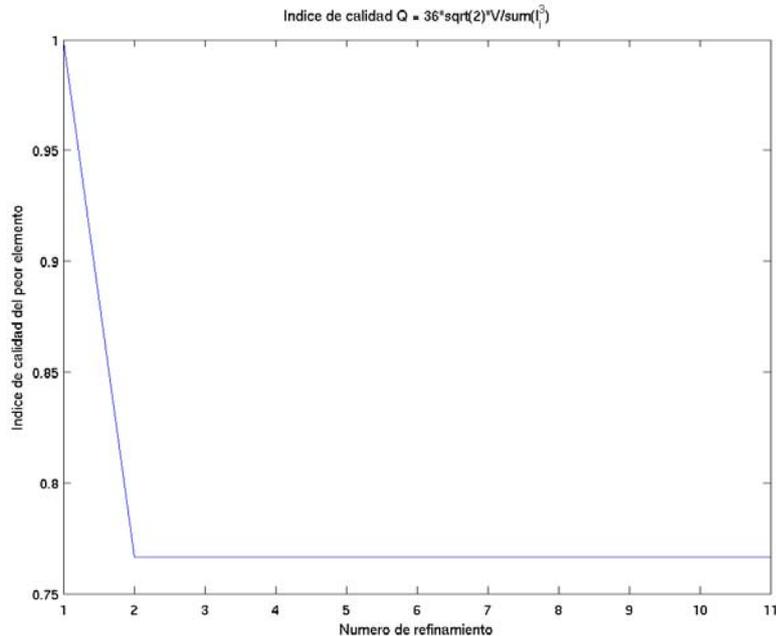


Figure 2:  $Q$  del peor elemento en función de los niveles de refinamiento partiendo del tetraedro regular.

La segunda experiencia tuvo como objetivo estudiar la sensibilidad de la variación de la calidad del peor tetraedro obtenido en el primer paso de refinamiento en función de la calidad del elemento de partida. Se tomó como referencia para los elementos de partida a un tetraedro regular y luego se lo deformó hasta obtener un sliver. La forma en que se deformó al elemento fue la siguiente: se tomó uno de los vértices del tetraedro regular y se lo desplazó en forma paralela al plano opuesto al mismo, en distintas direcciones, con lo cual el elemento de partida varía su forma y por lo tanto su calidad respecto de la del tetraedro regular. El resultado obtenido se muestra en la figura3, donde se presenta la variación de la relación de los índices de calidad entre el correspondiente al peor de los elementos obtenidos con respecto al índice de calidad del elemento de partida, en función de la posición del vértice. De la misma puede concluirse que el comportamiento de la variación del  $Q$  es no lineal respecto del  $Q$  del elemento de partida. Para un elemento cuya calidad es igual o cercana a la del tetraedro regular, al refinarlo, la calidad del peor elemento obtenido es mucho menor que la del elemento de partida. Si la calidad del elemento de partida empeora, dado el desplazamiento del vértice, la calidad del peor elemento obtenido puede llegar a ser igual que la del que surgió. Si se sigue deformando al elemento de partida, desplazando al vértice cada vez más lejos, la calidad del peor de los hijos

respecto de la calidad del elemento del que surgió vuelve a empeorar otra vez. Todo esto sucede sólo en el primer nivel de refinamiento, considerando la diagonal más corta para particionar al octaedro. También se observa que hay una sensibilidad respecto de la dirección radial en la cual desplazamos el vértice.

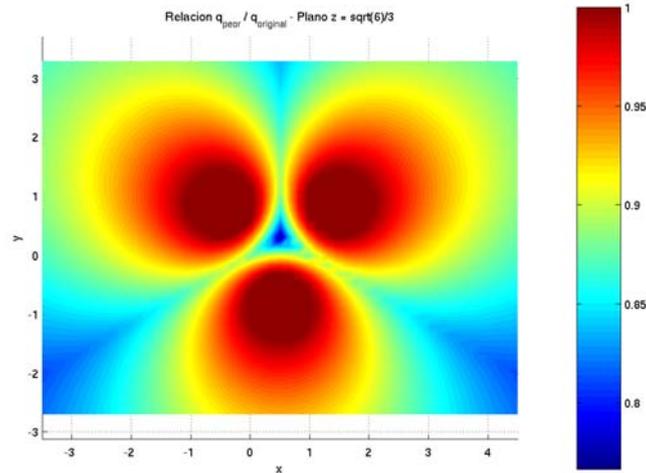


Figure 3: Relacion entre el indice Q del peor “hijo” y el Q del “padre”.

De ambas experiencias, se concluye lo siguiente

- Los tetraedros que se encuentran en las esquinas del tetraedro de partida son semejantes al mismo, por lo que la calidad de los mismos nunca podrá ser peor que la de su “padre”.
- La calidad del peor de los cuatro tetraedros restantes se comporta de la siguiente manera
  - Primera etapa de refinamiento: el comportamiento de la calidad depende de como sea el elemento de partida. Si dicho elemento es un tetraedro regular o similar al mismo, la calidad del peor de los “hijos” disminuye siempre en esta etapa. Si el elemento de partida posee un índice de calidad muy bajo, entonces ninguno de los tetraedros obtenidos del refinamiento posee peor calidad que la del elemento de partida. Sin embargo, no existe un comportamiento monótono del índice de calidad para los casos intermedios a estos dos.
  - Segunda etapa de refinamiento y posteriores: se observa que la calidad del peor de los tetraedros obtenidos nunca empeora respecto de la peor calidad obtenida en el paso anterior.

Por lo tanto, se puede concluir que sólo hay un deterioro de la peor calidad en el primer paso de refinamiento si se parte de elementos que poseen una elevada calidad, mientras que si la calidad

del elemento de partida es baja, la peor calidad incluso puede ser igual, siempre que se adopte el criterio de particionar al octaedro central por la diagonal más corta. Por lo tanto, la segunda estrategia de refinamiento es viable siempre que se tenga en cuenta lo anterior, y es la estrategia adoptada para desarrollar la herramienta de refinamiento.

### 3 DESCRIPCIÓN DEL REFINADOR

El programa que realiza el refinamiento está confeccionado en Octave. Cuenta con la capacidad de aplicar la estrategia de refinamiento adaptativo a mallas bidimensionales de cuadriláteros y triángulos, y a mallas tridimensionales de hexaedros y tetraedros.

En la primera etapa, se procede a la lectura de los archivos que se utilizan como datos para ejecutar el solver del problema (en este caso PETScFEM), típicamente archivos de coordenadas de nodos, conectividades, fijaciones, restricciones, etc., y el estado obtenido por el solver. Además, si el caso que se resuelve lo requiere, se puede proporcionar información adicional al refinador mediante una serie de archivos los cuales permiten especificar propiedades a caras o aristas, de forma tal que cualquier nodo que nazca sobre esas caras o aristas asuma, para el grado de libertad especificado, el valor que toma una función definida por el usuario. Esto último se puede aplicar al caso de fijaciones (una variación lineal, constante o de cualquier tipo aplicada a alguno o todos los grados de libertad del problema en una cara o una arista), contornos curvos (una ley geométrica que defina a un tramo del contorno), y resulta útil cuando no se quiere que el valor en algún grado de libertad, en un nodo que nace sobre una arista o sobre una cara, sea obtenido como el promedio de los valores para los respectivos grados de libertad de los nodos que definen a la cara o arista sobre la que nació, que es el procedimiento por defecto, sino que se desea que los valores en los nodos que nacen sobre la cara o arista respondan a una ley en particular.

Con esta información se genera la estructura de datos que se necesita para poder realizar el refinamiento. En esta etapa se construyen, sólo para el primer nivel de refinamiento, arreglos que poseen información sobre los elementos, las caras, las aristas, y aquellos que vinculan a los elementos con sus caras, a estas con sus aristas y a estas últimas con sus nodos. Se identifica a las caras y/o aristas que están sobre el contorno, sus propiedades, y se indican estas con distintos flags en sus respectivos arreglos. Estos flags serán heredados luego en el proceso de refinamiento de padres a hijos.

A continuación se identifica, mediante algún criterio de refinamiento, cuáles son los elementos que se deben refinar en este nivel. Dicha lista puede construirse según algún criterio geométrico, según un indicador de error de la solución o por cualquier otro criterio. La lista de elementos a refinar también puede obtenerse con un indicador externo al programa de refinamiento, y sólo se le pasa al programa dicha lista.

Luego se realiza el refinamiento de los elementos según la estrategia adoptada en el apartado anterior. La rutina de refinamiento es la que se encarga de que se respete el criterio de un único nodo irregular. Para ello, la misma se llama recursivamente de forma tal de ir agregando en cada llamada, a la lista de elementos a refinar que ella misma se envía, todos los elementos que sean necesarios para que el criterio de un único nodo irregular sea satisfecho. Una vez

que se determina que no hay más elementos que agregar a tal lista, el proceso de recursión se interrumpe y se procede a refinar los elementos. Ahora deben generarse los nuevos nodos, actualizarse la lista de conectividades y se deben actualizar los arreglos que constituyen a la estructura de datos de los objetos que constituyen la malla, tales como los arreglos “aristas”, “caras” y aquellos que las relacionan.

En una etapa de post-procesamiento se generan los archivos necesarios para que pueda aplicarse el solver tomando ahora como datos a estos archivos. El nuevo estado inicial que se proporciona al solver es una interpolación lineal del estado realizada por el post-procesamiento para los nodos nuevos que surgen en la malla refinada. También se actualizan los arreglos que poseen información sobre las fijaciones, restricciones, etc., y se escriben los correspondientes archivos. Se obtiene además un archivo en el que se especifican las restricciones sobre los nodos irregulares de la malla. Si hay nodos que pertenecen a contornos curvos, se corrigen las coordenadas de estos nodos proyectándolos sobre la superficie o contorno que corresponda.

Por otra parte, el refinador mantiene una serie de arreglos que permiten guardar la historia del refinamiento. Estos arreglos poseen información que permite conocer la herencia de propiedades (fijaciones, restricciones tipo deslizamiento o restricciones periódicas, o si pertenecen a un tramo del contorno el cual obedece a una función, etc.) entre los objetos que constituyen la malla, con sus padres y con sus hijos. En las etapas posteriores de refinamiento, esta estructura de datos actualizada es cargada y aplicada sobre la malla obtenida en el nivel de refinamiento anterior.

#### 4 CASOS RESUELTOS

A modo de ejemplo se aplica la herramienta de refinamiento a dos problemas de la dinámica de gases. El primero de ellos es representado utilizando una grilla estructurada de cuadrángulos y el segundo mediante una malla no estructurada de tetraedros. En ambos casos se utilizó el módulo de advección-difusión de PETScFEM para resolverlos.

##### 4.1 Flujo bidimensional supersónico invíscido en una cuña

El problema que se pretende resolver es el de una cuña que posee un semiángulo de  $25^\circ$  en un flujo supersónico y no viscoso. El Mach de la corriente libre es 1.5 y el ángulo de ataque es  $0^\circ$ . Para esta condición se sabe que la onda está despegada del vértice de la cuña. Además, dada la simetría del flujo, el problema se resuelve aplicando condición de simetría. Se pueden utilizar las relaciones de choque recto para obtener los parámetros por detrás de la onda sobre el eje  $y=0$ . Estas relaciones arrojan los siguientes valores asumiendo que la relación de calores específicos es  $\gamma = 1.4$  :  $M_2=0.701088$ ,  $p_2/p_1=2.458333$ ,  $\rho_2/\rho_1 = 1.86$ . Las condiciones de borde que se imponen son

- sección de entrada: densidad = 1, presión = 0.3176,  $u=1$ ,  $v=0$ .
- sección de salida: libre.
- sobre la cuña: restricción de velocidad normal nula.

- sobre la línea  $y=0=cte.$ : velocidad en  $y=0$ .

La malla inicial consta de 496 nodos y 450 elementos. La misma se presenta en la figura 4 junto con la solución obtenida para el Mach, la presión y la densidad, en todo el campo de movimiento, luego de haber corrido 600 pasos de tiempo para un Courant=1. También se muestran los valores de la solución sobre la línea  $y=0$ . Dado que el solver se corrió sin utilizar shock capturing, se observan overshoots y undershoots en la solución.

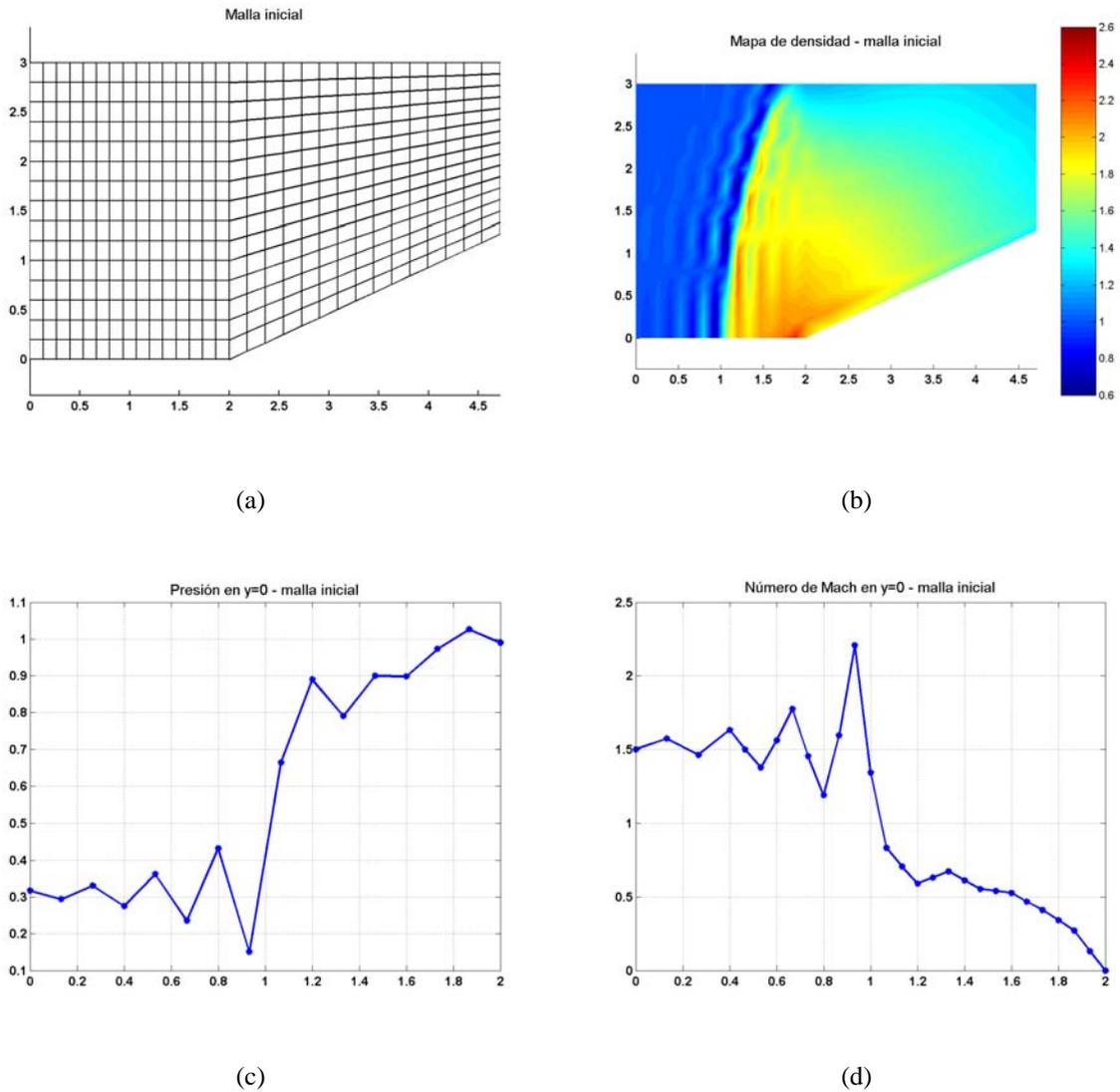
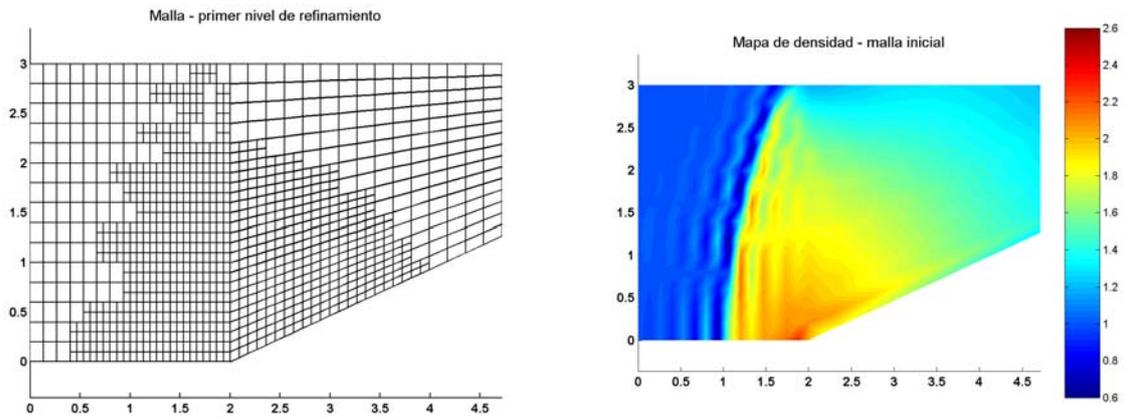


Figure 4: malla original

Se procede a refinar la malla utilizando el siguiente criterio: se refinan los 80 elementos con el gradiente de presiones mas grande, para tratar de definir con mejor precisión la onda de choque, y todos aquellos elementos tales que sus cuatro nodos posean un valor de presión entre 0.6 y la presión máxima, a los fines de refinar en las cercanías del vértice de la cuña y en la zona por detrás de la onda de choque hasta donde se cree que se pueda encontrar la línea sónica. La malla obtenida está constituida por 1141 nodos y 1044 elementos. La misma, junto con la solución interpolada se pueden observar en la figura 5.



(a)

(b)

Figure 5: Primer nivel de refinamiento. Solución interpolada

Se refina ahora esta malla con un criterio similar al anterior: se consideran los 200 elementos con el gradiente de presiones más grande y aquellos elementos tales que sus cuatro nodos poseen un valor de la presión entre 0.7 y la presión máxima. La malla obtenida consta de 2851 nodos y 2670 elementos. La malla y la solución interpolada en la misma se observan en la figura 6, y es utilizada como estado inicial para realizar una nueva corrida en el solver.

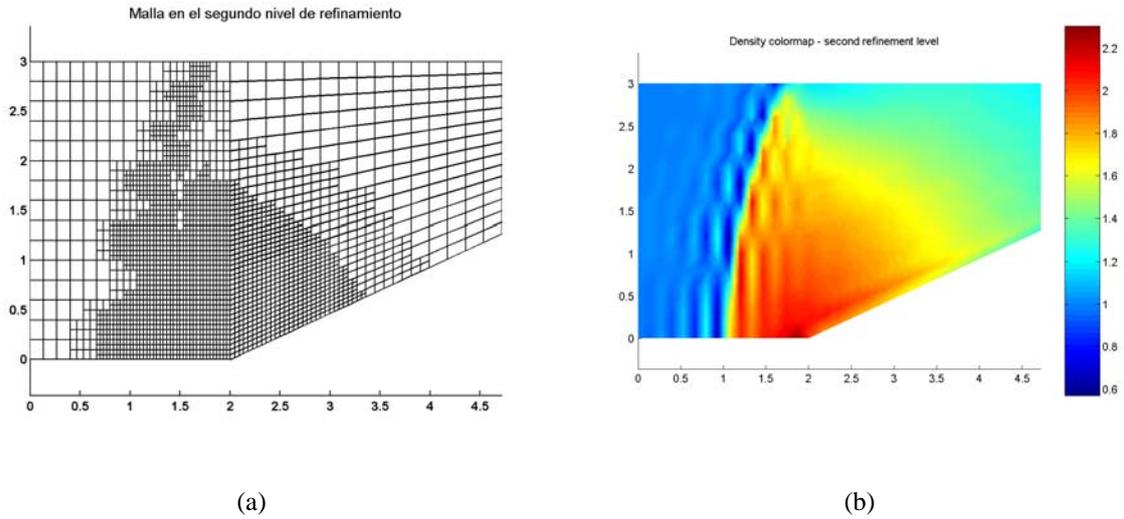


Figure 6: Segundo nivel de refinamiento. Solución interpolada.

En este caso se utiliza shock capturing. El Courant sigue siendo 1 y el número de pasos de tiempo utilizados es 40. La solución obtenida es la que se muestra en la figura 8. Se observa una mejor definición del choque al tiempo que se han eliminado las oscilaciones cerca del mismo.

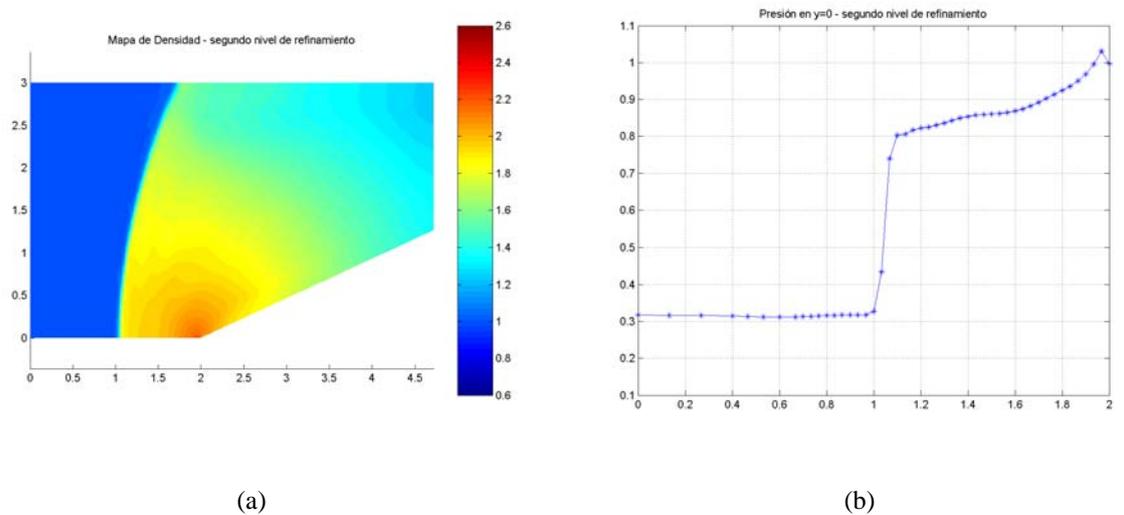
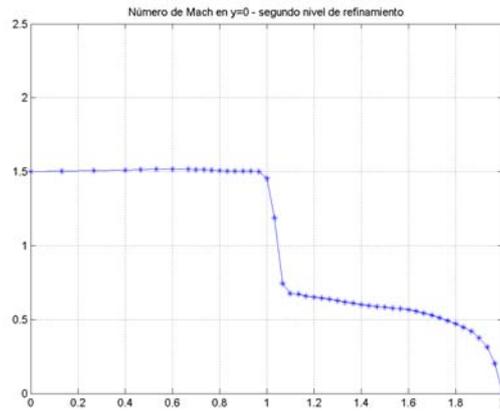


Figure 7: Segundo nivel de refinamiento. Solución computada.

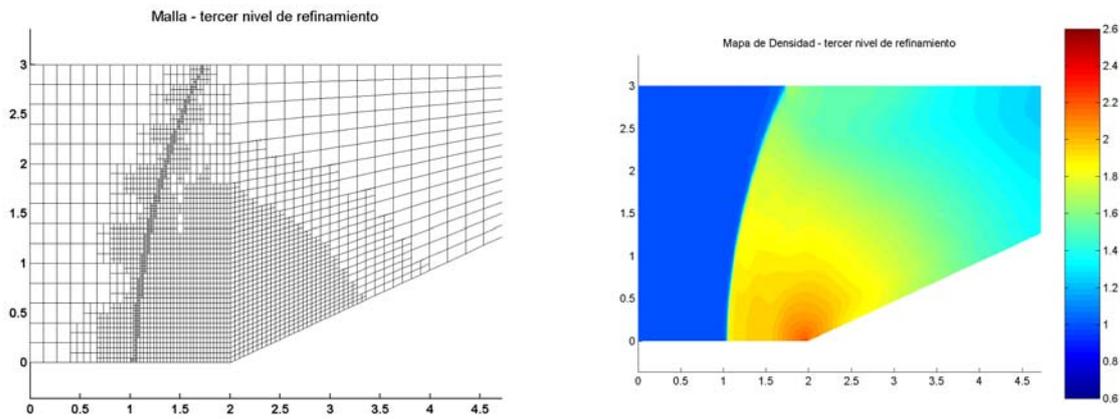
El último refinamiento se realiza en función de lo siguiente: se consideran los 200 elementos con el gradiente de presiones más grande. La malla obtenida posee 3251 nodos y 2991



(a)

Figure 8: Segundo nivel de refinamiento. Solución computada.

elementos. Se realiza una nueva corrida de 40 pasos de tiempo a Courant=1, obteniéndose los resultados de la figura 10.



(a)

(b)

Figure 9: Tercer nivel de refinamiento. Solución computada

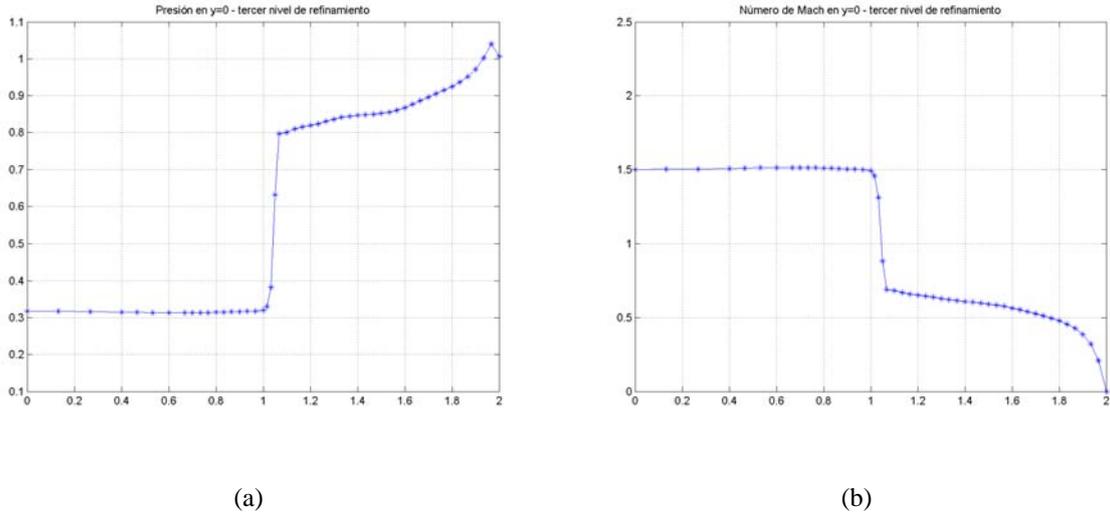


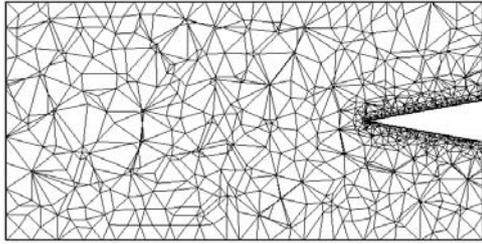
Figure 10: Tercer nivel de refinamiento. Solución computada.

Se observa que los valores de las variables del flujo por detrás de la onda de choque concuerdan muy bien con los que indica la teoría. Además, se pudo definir a la onda de choque con bastante precisión y con pocos elementos.

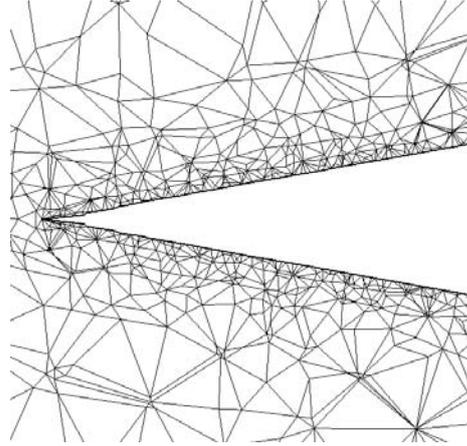
#### 4.2 Flujo tridimensional supersónico e invíscido alrededor de un cono.

En este caso se pretende resolver el flujo supersónico e invíscido alrededor de un cono cuyo semiángulo es  $\theta_c = 10^\circ$ . El Mach de la corriente libre es  $M_1 = 1.5$ . Para esta condición se sabe que el choque está pegado al vértice del cono. Luego, se pueden utilizar las relaciones de choque oblicuo o las tablas que se encuentran en<sup>2</sup> para verificar los valores del flujo por detrás de la onda de choque. Así se obtiene que el ángulo de inclinación de la onda de choque es  $\sigma = 44^\circ$ , por lo que el Mach atrás de la onda es aprox.  $M_2 = 1.46$ . Las relaciones de densidad y de presión son respectivamente  $\rho_2/\rho_1 = 1.03847$ ,  $p_2/p_1 = 1.05427$ , y de la tabla 7 de<sup>2</sup> el Mach sobre el cono es  $M_c = 1.35$ .

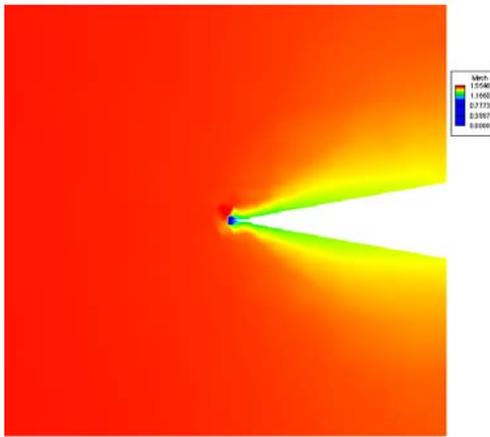
Para este caso se utiliza una malla no estructurada de tetraedros. La misma se generó especificando el tamaño de los elementos sobre la superficie del cono de forma tal de concentrar más elementos sobre la superficie del mismo. Se encuentra constituida por 3854 nodos y 17130 elementos. Los valores mínimos y promedio de  $Q$  para esta malla son  $Q_{min} = 0.0818$  y  $Q_{prom} = 0.6963$ , mientras que los ángulos diedros mínimo y máximo en radianes son  $\phi_{min} = .2513$  y  $\phi_{max} = 2.8025$ . La malla así como la solución obtenida con la misma luego de haber corrido el módulo ADVDF de PETScFEM 40 pasos de tiempo con un Courant=2, con shock capturing, se muestran en la figura 11.



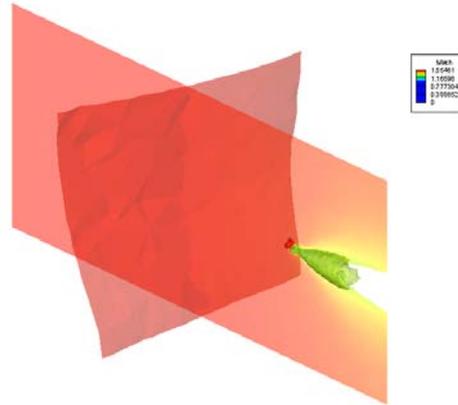
(a) Malla en el plano  $y=0.5=cte$



(b) Detalle malla sobre el cono. Plano  $y=0.5=cte$



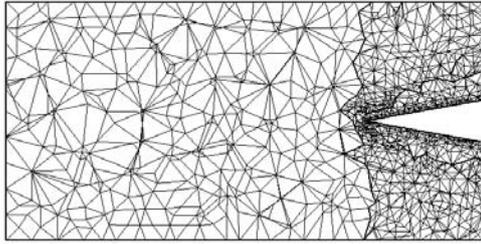
(c) Mach en el plano  $y=0.5=cte$



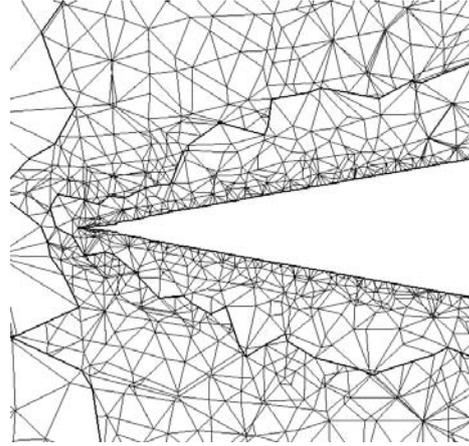
(d) Isosuperficies de Mach 1.35 y 1.49995

Figure 11: malla original

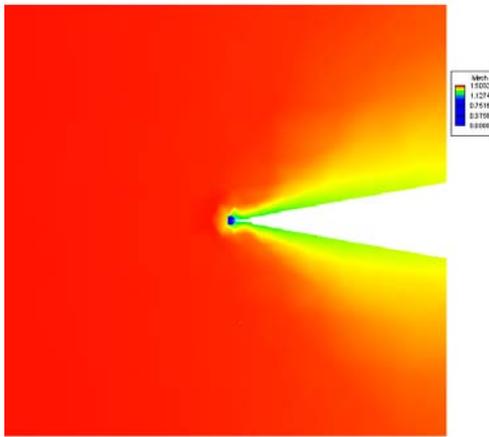
Dado que en este caso se sabe cual es la posición que tomará la onda de choque, se procede a refinar aquellos elementos que están en una zona cercana. Esta malla está constituida por 7911 nodos y 36800 elementos. La misma junto con la solución obtenida luego de haber ejecutado una corrida de 40 pasos de tiempo con un Courant=2 se presentan en la figura 12. Los valores mínimos y promedio de  $Q$  para esta malla son  $Q_{min} = 0.0818$  y  $Q_{prom} = 0.7078$ , mientras que los ángulos diedros mínimo y máximo son iguales que los de la malla anterior.



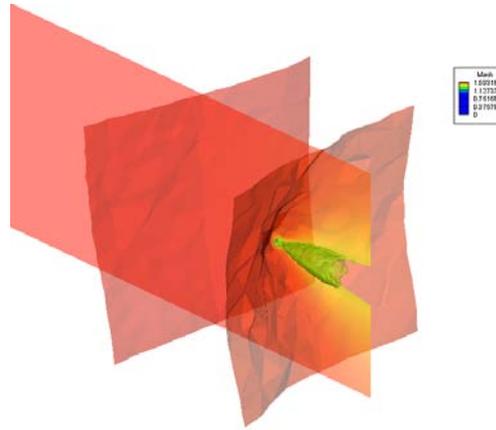
(a) Malla en el plano  $y=0.5=cte$



(b) Detalle malla sobre el cono. Plano  $y=0.5$ .



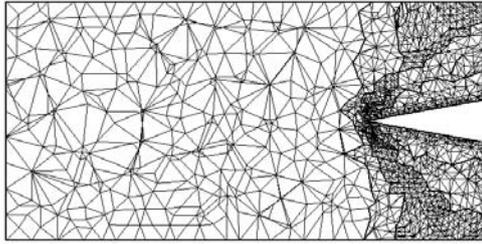
(c) Mach en el plano  $y=0.5$



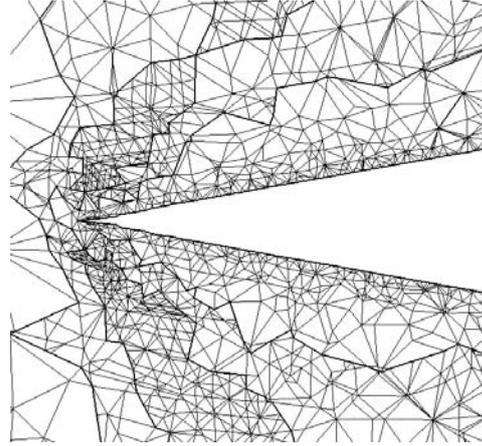
(d) Isosuperficies de Mach 1.49995, 1.485 y 1.35

Figure 12: primer nivel de refinamiento

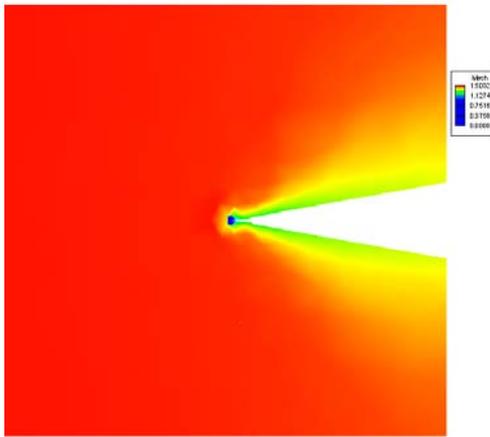
En el segundo nivel de refinamiento se considera nuevamente al grupo de elementos que se encuentran en la zona donde debería formarse la onda de choque, aunque en éste caso, la zona marcada para refinar es más restringida que la elegida en el nivel de refinamiento anterior. Ahora, la malla posee 22277 nodos y 109075 elementos. Los índices de calidad para la misma son  $Q_{min} = 0.0818$  y  $Q_{prom} = 0.7230$ ,  $\phi_{min} = .2513$  y  $\phi_{max} = 2.8025$ . Sólo se observa una variación positiva del  $Q_{prom}$ . La malla y la solución que se obtiene con 20 pasos de tiempo y Courant=2 se presentan en la figura 13.



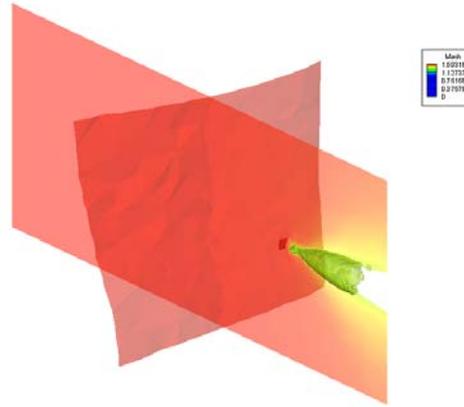
(a) Malla en el plano  $y=0.5$



(b) Detalle malla sobre le cono. Plano  $y=0.5$



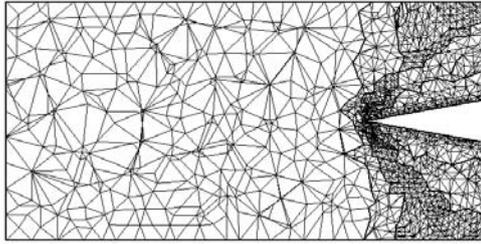
(c) Mach en el plano  $y=0.5$



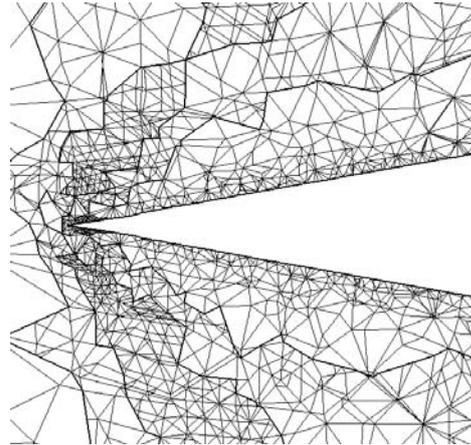
(d) Isosuperficies de Mach 1.49995 y 1.35

Figure 13: Segundo nivel de refinamiento

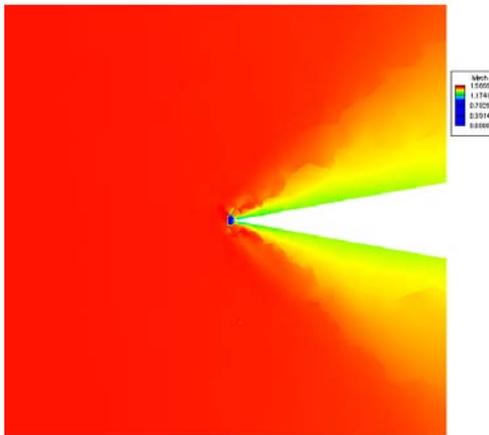
Ya que la solución del campo de movimiento en la zona del vértice del cono no está bien resuelta, se decide refinar dicha zona. Se toman los elementos que se encuentran entre las coordenadas  $1.49 < x < 1.6$ ,  $0.48 < y < 0.52$ ,  $0.48 < z < 0.52$ . La malla obtenida posee 22466 nodos y 109852 elementos. Los índices de calidad son  $Q_{min} = 0.0385$  y  $Q_{prom} = 0.7216$ ,  $\phi_{min} = .0415$  y  $\phi_{max} = 3.0806$ . Las variaciones que se observan en los índices de calidad respecto de las mallas anteriores se pueden adjudicar a que en este nivel se han refinado elementos que no están en las zonas refinadas anteriormente. Detalles de la malla y la solución obtenida se pueden ver en la figura 14.



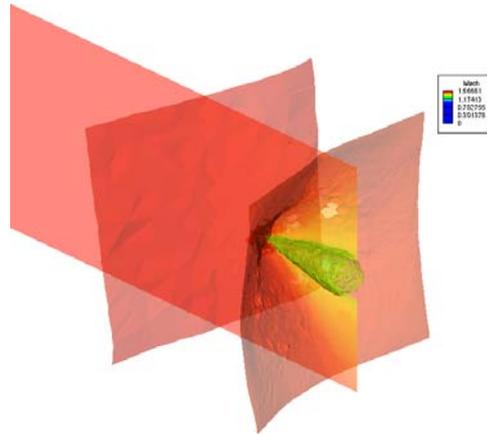
(a) Malla en el plano  $y=0.5$



(b) Detalle malla sobre el cono. Plano  $y=0.5$



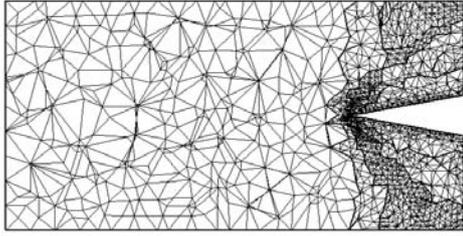
(c) Mach en el plano  $y=0.5$



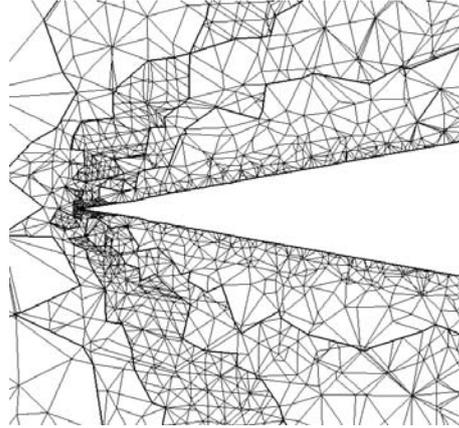
(d) Isosuperficies de Mach 1.49995, 1.485 y 1.35

Figure 14: Tercer nivel de refinamiento

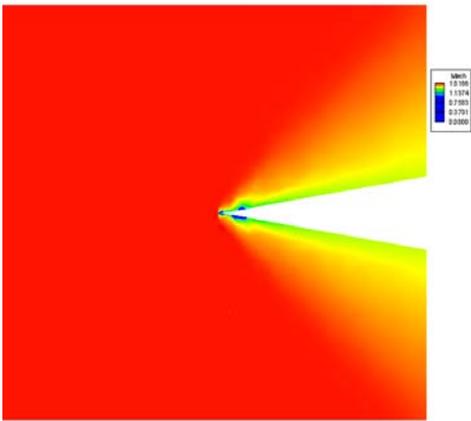
Finalmente, y ya que se observa que aún no ha mejorado la solución en la zona del vértice del cono, se decide refinar una vez más allí, considerando todos los tetraedros que se encuentran en la zona  $1.45 < x < 1.51$ ,  $0.47 < y < 0.53$ ,  $0.47 < z < 0.53$ . La malla posee 22691 nodos y 110734 elementos. Los índices de calidad son  $Q_{min} = 0.0385$  y  $Q_{prom} = 0.7212$ ,  $\phi_{min} = .0415$  y  $\phi_{max} = 3.0806$ . La malla y la solución obtenida se pueden ver en la figura 15.



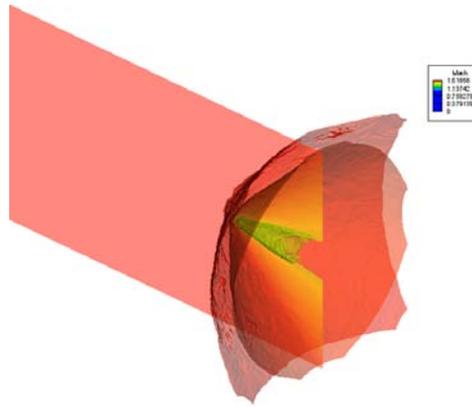
(a) Malla en el plano  $y=0.5$



(b) Detalle malla sobre el cono. Plano  $y=0.5$



(c) Mach en el plano  $y=0.5$



(d) Isosuperficies de Mach 1.49995, 1.485 y 1.35

Figure 15: Cuarto nivel de refinamiento

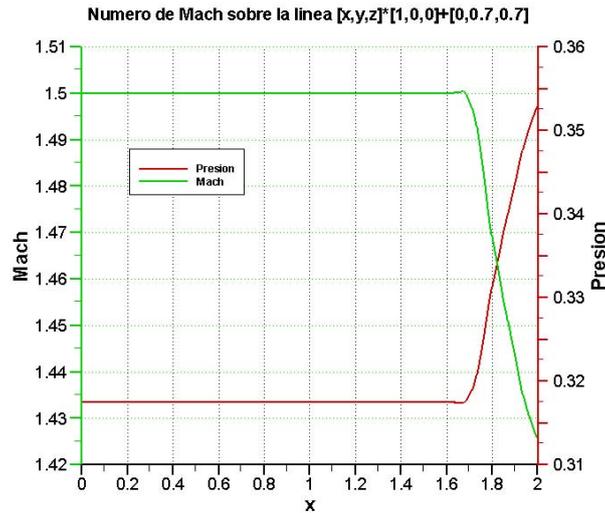


Figure 16: Variables sobre línea paralela al eje del cono

En este ejemplo se observa que el ángulo de la onda de choque está cercano al valor que se presenta en las tablas de.<sup>2</sup> Además, la intensidad de la onda parece ser la correcta si se tiene en cuenta que el Mach sobre la superficie del cono es próximo a 1.35 como lo indican las tablas de,<sup>2</sup> lo cual se observa en la isosuperficie correspondiente de la figura 15. La figura 16 muestra el comportamiento del Mach y de la presión sobre una línea que atraviesa la onda de choque y que es paralela al eje del cono. La mejora de la solución en la zona del vértice del cono entre el tercer y cuarto nivel de refinamiento se debe a que si bien en el tercer nivel se habían obtenido elementos más pequeños sobre la superficie del cono, muchos elementos que se encuentran por delante del vértice estaban restringidos por elementos vecinos que aún no se habían refinado. Observando los índices de calidad de la malla se concluye que la estrategia de refinamiento se comporta tal como se había determinado en los análisis previos a la adopción de la misma, y por lo tanto constituye una alternativa válida para refinar mallas homogéneas.

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado una estrategia para realizar el refinamiento adaptativo de mallas homogéneas. La posibilidad de aplicar esta estrategia se sustenta en el hecho de que se observa que la calidad de los tetraedros que se obtienen de refinar tetraedros sólo empeora en el primer nivel de refinamiento si se elige la forma adecuada para refinarlos, y para tetraedros cuya calidad varía entre determinados valores, según las experiencias realizadas. Esto permitió el desarrollo de un refinador de mallas adaptable. Los ejemplos muestran que es posible mejorar mucho la precisión de la solución introduciendo elementos sólo donde se necesitan. Esto permite reducir el costo computacional, principalmente en problemas 3-D, dado que la cantidad de elementos que se requieren es mucho menor. La posibilidad de que el usuario decida en dónde refinar la malla mediante el criterio más adecuado para cada caso, permite utilizar de mejor manera los recursos

disponibles.

## 6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido ayuda financiera del *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET, Argentina), *Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica* (ANPCyT) y *Universidad Nacional del Litoral* (UNL) por medio de las subvenciones CONICET-PIP-02552/2000, ANPCyT-FONCyT-PME-209 **Cluster**, ANPCyT-FONCyT-PID-99-74 **Flags**, ANPCyT-FONCyT-PICT-14573 **Lambda**, y CAI+D-UNL-2000-43. Se ha hecho uso de software libre tales como *GNU/Linux* OS, PETSc, Octave y OpenDX.

## REFERENCES

- [1] Staten, Matthew L., Selective Refinement of Two and Three-Dimensional Finite Element Meshes, Master Thesis, Brigham Young University, 1996.
- [2] NACA Report 1135, Equations, Tables and Charts for Compressible Flow, 1953.