

ALGORITMOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN DINÁMICA ROTACIONAL NO LINEAL

Elisabet Lens y Alberto Cardona

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería
CIMEC-INTEC, Conicet-Universidad Nacional del Litoral
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
acardona@intec.unl.edu.ar

RESUMEN

La integración temporal de problemas de dinámica lineal se realiza con eficiencia mediante un número de algoritmos incondicionalmente estables. Para ello son utilizados esquemas que conservan la energía como así también esquemas en los que se fuerza un decaimiento de la energía (*energy decaying algorithms*). Las propiedades de conservación/disipación de estos algoritmos no son en general extensivas al régimen no lineal. En este trabajo se analizan diversas formulaciones de esquemas de integración temporal que conservan la energía para problemas de la dinámica no lineal, comparando performances, costos, etc. y tomando como problema modelo el cálculo de la respuesta de un trompo simétrico moviéndose en un campo gravitacional.

ABSTRACT

Time integration of linear dynamics problems is solved efficiently using a widely range of unconditionally stable algorithms. In order to do this, energy conserving and energy decaying schemes are used. This conservation property is typically lost in the nonlinear regime, because the conservation/dissipation properties of this kind of algorithms are, in general, non extensive to the nonlinear regime. The paper deals with several energy conserving algorithms for the dynamic analysis of nonlinear systems. Performance, cost, etc. are compared, considering the problem of a symmetrical top in a gravity field.

INTRODUCCIÓN

El hecho de que las propiedades de conservación/disipación de los algoritmos incondicionalmente estables para régimen lineal no sean extensibles al régimen no lineal ha llevado a varios autores a desarrollar esquemas especiales para el tratamiento del caso no lineal. Desde un punto de vista numérico, los algoritmos que conservan la energía llevan a una noción rigurosa de estabilidad incondicional no lineal. Por otro lado, la ausencia de algún mecanismo de disipación de altas frecuencias en presencia de frecuencias no resueltas puede llevar a dificultades de índole numérica. Esta limitación puede evitarse adoptando esquemas que pueden disipar el contenido de energía relativo a los modos de vibración de las frecuencias más elevadas. Podemos mencionar tres grupos de algoritmos:

- algoritmos con disipación numérica
- algoritmos con conservación forzada de la energía

- algoritmos con conservación algorítmica de la energía

Los métodos del primer grupo (Newmark, métodos α) poseen disipación controlada de frecuencias altas para dinámica lineal, pero para sistemas no lineales no garantizan la disipación de energía para todos los parámetros de integración. El segundo grupo fuerza la conservación de la energía por un esquema que es una extensión de la regla del trapecio con una restricción para la conservación de la energía por multiplicadores de Lagrange. El tercer grupo es el más utilizado actualmente y garantiza la estabilidad de la integración temporal. Es conocido como *energy-momentum method*, y consiste en una simple modificación de la regla clásica del punto medio. En este trabajo se estudian comparativamente formulaciones de esquemas de integración temporal de este último grupo, aplicadas a un problema de dinámica rotacional no lineal.

PROBLEMA DEL TROMPO

Consideremos el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo O en \mathbb{R}^3 con masa total $M > 0$, centro de masas G ubicado a una distancia $l > 0$ de O y tensor constante de inercia J respecto del punto O y relativo a los ejes del cuerpo. La ubicación del cuerpo en \mathbb{R}^3 está definida únicamente por la matriz de rotación Λ . La velocidad angular del cuerpo $\Omega(t)$ y el momento angular del cuerpo $\Pi(t)$ están definidos respectivamente por las relaciones

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \Lambda(t)\tilde{\Omega}(t) \quad \text{y} \quad \Pi(t) = J\Omega(t) \quad (1)$$

donde $\tilde{\Omega}$ es la matriz antisimétrica asociada con el vector axial Ω según la relación $\tilde{\Omega}\mathbf{a} = \Omega \times \mathbf{a} \forall \mathbf{a}$.

Sea $\mathbf{r}(0) = l\mathbf{E}$, con $\|\mathbf{E}\| = 1$ vector posición del centro de masas en $t = 0$. El vector posición $\mathbf{r}(t)$ del centro de masas G en el tiempo t y el momento angular total espacial $\boldsymbol{\pi}(t)$ relativo al sistema de coordenadas inercial fijo son

$$\mathbf{r}(t) = \Lambda(t)\mathbf{E} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\pi}(t) = \Lambda(t)\Pi(t) \quad (2)$$

Con esta notación, la energía cinética del sistema toma la forma

$$K = \frac{1}{2}\Pi \cdot \Omega = \frac{1}{2}\Omega \cdot J\Omega \quad (3)$$

Sea $\mathbf{f}(t)$ la fuerza aplicada en el centro de masas y definiendo $\mathbf{g}(t) = l\mathbf{f}(t)$ tenemos la ecuación de balance de momento angular $\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{f}(t)$, que junto con (1) nos permite escribir el siguiente sistema de ecuaciones de la dinámica de un cuerpo rígido con un punto fijo O :

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \Lambda(t)\tilde{\Omega}(t) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}[\Lambda(t)J\Omega(t)] = \Lambda(t)\mathbf{E} \times \mathbf{g}(t), \quad (5)$$

donde el sistema es Hamiltoniano si $\mathbf{g}(t)$ es conservativo. En nuestro caso, nos restringiremos al caso de un cuerpo rígido en un campo gravitacional con potencial V definido por

$$V(\Lambda) = Mgl\boldsymbol{\gamma} \cdot \Lambda\mathbf{E} \iff \mathbf{g} = -Mgl\boldsymbol{\gamma} \quad (\text{constante}) \quad (6)$$

$\boldsymbol{\gamma}$ es un vector unitario fijo en el espacio y $g > 0$ es la constante gravitacional.

FORMULACIÓN DE SIMO

Algoritmos que conservan exactamente el momento y la energía

Sea $[t_n, t_{n+1}]$ un subintervalo típico, \mathbf{A} y $\mathbf{\Omega}$ datos iniciales y $\mathbf{g}(t)$ una carga externa dada.

Para un vector dado $\mathbf{\Theta}$ de \mathbb{R}^3 , definimos el siguiente grupo de configuraciones con un parámetro

$$\mathbf{A}_{n+\xi} = \mathbf{A}_n \exp[\xi \tilde{\mathbf{\Theta}}], \quad \text{para } \xi \in [0, 1] \quad (7)$$

En esta expresión, $\exp[\cdot]$ denota el mapeo exponencial dado por la fórmula clásica de Euler-Rodrigues

$$\exp[\tilde{\mathbf{\Theta}}] = \cos \|\mathbf{\Theta}\| \mathbf{I} + \frac{\sin \|\mathbf{\Theta}\|}{\|\mathbf{\Theta}\|} \tilde{\mathbf{\Theta}} + \frac{1 - \cos \|\mathbf{\Theta}\|}{\|\mathbf{\Theta}\|^2} \mathbf{\Theta} \otimes \mathbf{\Theta} \quad (8)$$

para $\xi = 0$ tenemos \mathbf{A}_n y para $\xi = 1$, $\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{A}_n \exp[\tilde{\mathbf{\Theta}}]$.

Ahora definimos una familia uni-paramétrica de algoritmos implícitos α , con $\alpha \in [0, 1]$ mediante las relaciones

$$\mathbf{\Theta} = \Delta t \frac{1}{2} [\mathbf{\Omega}_n + \mathbf{\Omega}_{n+1}] \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_{n+\xi} = \mathbf{A}_n \exp[\xi \tilde{\mathbf{\Theta}}] \quad \forall \xi \in [0, 1] \quad (10)$$

$$\mathbf{A}_{n+1} \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_{n+1} - \mathbf{A}_n \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_n = \Delta t \mathbf{A}_{n+\alpha} \mathbf{E} \times \mathbf{g}_{n+\alpha} \quad (11)$$

Para $\alpha = \frac{1}{2}$ se tiene la forma conservativa de la regla del punto medio propuesta por Simo y Wong [1]. Por diseño, si $\mathbf{g}(t) = 0$ en $[t_n, t_{n+1}]$, el algoritmo conserva exactamente el momento angular total, mientras que para $\mathbf{g} = -Mgl\boldsymbol{\gamma}$, el algoritmo conserva el mapeo de momento definido por $\mathbf{J}(\mathbf{A}, \mathbf{\Pi}) = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A} \mathbf{\Pi}$ para cualquier valor de $\alpha \in [0, 1]$

Para ver la conservación de la energía, vamos a analizar el cambio total de energía que predice la familia de algoritmos propuesta en las ecuaciones (9-11). De (3) y (9) podemos escribir:

$$K_{n+1} - K_n = \frac{1}{2} (\mathbf{\Omega}_n + \mathbf{\Omega}_{n+1}) \cdot \mathbf{J} (\mathbf{\Omega}_{n+1} - \mathbf{\Omega}_n) = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_{n+1} - \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_n] \quad (12)$$

y usando la propiedad $\exp[-\tilde{\mathbf{\Theta}}] \mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}$, invariancia del producto punto bajo rotaciones y la fórmula (9), podemos escribir

$$\begin{aligned} K_{n+1} - K_n &= \frac{1}{\Delta t} [\exp[-\tilde{\mathbf{\Theta}}] \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_{n+1} - \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_n] \\ &= \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{A}_n \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{A}_n \exp[\tilde{\mathbf{\Theta}}] \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_{n+1} - \mathbf{A}_n \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{A}_n \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_n] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \mathbf{A}_n \mathbf{\Theta} \cdot [\mathbf{A}_{n+1} \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_{n+1} - \mathbf{A}_n \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_n] \end{aligned} \quad (13)$$

Ahora reemplazando (11) en esta última expresión y con $\mathbf{g} = -Mgl\boldsymbol{\gamma}$ obtenemos

$$K_{n+1} - K_n = -Mgl \mathbf{A}_n^T \boldsymbol{\gamma} \cdot [\mathbf{\Theta} \times \exp[\alpha \tilde{\mathbf{\Theta}}] \mathbf{E}] = -Mgl \boldsymbol{\gamma} \cdot [\mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{\Theta}} \exp[\alpha \tilde{\mathbf{\Theta}}] \mathbf{E}] \quad (14)$$

Finalmente, la energía potencial $V(\mathbf{A}_{n+\alpha})$ viene dada por la expresión

$$V(\mathbf{A}_{n+\alpha}) = Mgl \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{A}_n \exp[\alpha \tilde{\mathbf{\Theta}}] \mathbf{E} \implies \frac{d}{d\alpha} V(\mathbf{A}_{n+\alpha}) = Mgl \boldsymbol{\gamma} \cdot [\mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{\Theta}} \exp[\alpha \tilde{\mathbf{\Theta}}] \mathbf{E}] \quad (15)$$

Comparando el miembro derecho de (15) con (14) vemos que el cambio de energía total que predice el algoritmo de (9-11) para un $\alpha \in [0, 1]$ viene dado por la expresión

$$H_{n+1} - H_n = V(\mathbf{A}_{n+1}) - V(\mathbf{A}_n) - \left. \frac{d}{d\xi} V(\mathbf{A}_{n+\xi}) \right|_{\xi=\alpha} \quad (16)$$

Este resultado es válido para formas arbitrarias de la función energía potencial V .

Esquema de colocación

En un intervalo típico $[t_n, t_{n+1}]$ las fórmulas (9-11) definen una ecuación algebraica no lineal de la forma $\mathbf{R}(\Theta, \alpha) = 0$, donde el parámetro algorítmico $\alpha \in [0, 1]$ es ahora una variable adicional a determinar vía la ecuación de restricción

$$r(\Theta, \alpha) = -[V(\mathbf{A}_n \exp[\tilde{\Theta}]) - V(\mathbf{A}_n)] + \left. \frac{d}{d\xi} \right|_{\xi=\alpha} V(\mathbf{A}_n \exp[\xi \tilde{\Theta}]) = 0 \quad (17)$$

Para la familia de algoritmos definida por las fórmulas (9-11), existe al menos un $\alpha \in [0, 1]$ para el cual se conserva la energía en forma exacta, es decir $H_{n+1} = H_n$ [2]. Luego, la ecuación (17) se satisface para cualquier $\Theta \in \mathbb{R}^3$

Esquema implícito de proyección

Fijando $\alpha = \frac{1}{2}$ en el algoritmo (9-11) y reemplazando (11) por la expresión del punto medio modificada

$$\mathbf{A}_{n+1} \mathbf{J} \Omega_{n+1} - \mathbf{A}_n \mathbf{J} \Omega_n = \Delta t \kappa \mathbf{A}_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{E} \times \mathbf{g}_{n+\frac{1}{2}} \quad (18)$$

con κ función arbitraria que satisface la condición de consistencia $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \kappa = 1$. Para cargas gravitacionales $\mathbf{g}(t)$ constantes respecto del tiempo, κ puede calcularse en forma cerrada [2] como

$$\kappa = \frac{\sin[\frac{1}{2} \Delta t \|\Omega_{n+\frac{1}{2}}\|]}{\frac{1}{2} \Delta t \|\Omega_{n+\frac{1}{2}}\|} \quad (19)$$

de tal manera que se satisface $H_{n+1} = H_n$

FORMULACIÓN DE GÉRADIN-BAUCHAU

Sea un sistema mecánico conservativo en términos de coordenadas generalizadas \mathbf{q} . La energía cinética puede escribirse como

$$K = \frac{1}{2} \Omega \cdot \mathbf{J} \Omega, \quad \Omega = \mathbf{L} \dot{\mathbf{q}} \quad (20)$$

con \mathbf{J} el tensor de inercia medido en ejes materiales y Ω la expresión material del vector velocidad angular. El Lagrangiano del sistema puede construirse como

$$L = K - V \quad (21)$$

El vector de desplazamientos infinitesimales en rotación queda expresado por

$$\delta \Theta = \mathbf{T}(\Psi) \delta \Psi = \mathbf{L} \delta \mathbf{q} \quad (22)$$

Las ecuaciones de movimiento resultan de aplicar el principio de Hamilton [3]

$$\mathbf{L}^T \ddot{\mathbf{H}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{G}(\Pi) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (23)$$

donde \mathbf{G} es la matriz antisimétrica

$$\mathbf{G}(\Pi) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{L}}^T \Pi - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}})^T \Pi] \quad (24)$$

Las componentes de $\mathbf{G}(\Pi)$ son

$$G_{jp} = \sum_i \Pi_i \left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial q_p} - \frac{\partial L_{ip}}{\partial q_j} \right) \quad (25)$$

En el caso del trompo, \mathbf{G} sólo contribuye al movimiento de rotación, tomando la forma

$$\mathbf{G}(\Pi) = -\mathbf{L}^T \tilde{\Pi} \mathbf{L} \quad (26)$$

Conservación de la energía

Al aplicar la regla del punto medio al vector de momentos generalizado Π y a sus derivadas temporales y a las de las coordenadas generalizadas tenemos, respectivamente

$$\Pi_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\Pi_{n+1} + \Pi_n) = \frac{1}{\Delta t} J L_{n+\frac{1}{2}}(q_{n+1} - q_n) \quad (27)$$

$$\dot{\Pi}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(\Pi_{n+1} - \Pi_n) \quad (28)$$

$$\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(q_{n+1} - q_n) \quad (29)$$

Discretizando la ecuación (23)

$$\frac{1}{\Delta t} L_{n+\frac{1}{2}}^T (\Pi_{n+1} - \Pi_n) + \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta t} G_{n+\frac{1}{2}}(q_{n+1} - q_n) = 0 \quad (30)$$

Combinando esta última expresión con la ecuación (27) tenemos finalmente la forma discretizada del equilibrio

$$\frac{2}{\Delta t^2} (L^T J L)_{n+\frac{1}{2}}(q_{n+1} - q_n) - \frac{2}{\Delta t} L_{n+\frac{1}{2}}^T \Pi_n + \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta t} G_{n+\frac{1}{2}}(q_{n+1} - q_n) = 0 \quad (31)$$

Esta ecuación luego se resuelve de forma iterativa para obtener q_{n+1}

Con el objeto de analizar las propiedades de conservación de la energía del esquema propuesto, multipliquemos la ecuación (30) por el salto de desplazamientos $\Delta q = (q_{n+1} - q_n)$ en el paso de tiempo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\Pi_{n+1} - \Pi_n)^T L_{n+\frac{1}{2}}(q_{n+1} - q_n) + (q_{n+1} - q_n)^T \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{n+\frac{1}{2}} + \\ \frac{1}{\Delta t} (q_{n+1} - q_n)^T G_{n+\frac{1}{2}}(q_{n+1} - q_n) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

notando que la siguiente expresión representa las velocidades en el punto medio

$$\frac{1}{\Delta t} L_{n+\frac{1}{2}}(q_{n+1} - q_n) = L_{n+\frac{1}{2}} \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \Omega_{n+\frac{1}{2}} \quad (33)$$

y adoptando la aproximación $\Omega_{n+\frac{1}{2}} = 1/2(\Omega_{n+1} + \Omega_n)$, el primer término de (32) toma la forma de salto de energía cinética

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\Pi_{n+1} - \Pi_n)^T (\Omega_{n+1} + \Omega_n) = \frac{1}{2} (\Omega_{n+1} - \Omega_n)^T M (\Omega_{n+1} + \Omega_n) = \\ \frac{1}{2} \Omega_{n+1}^T M \Omega_{n+1} - \frac{1}{2} \Omega_n^T M \Omega_n = K_{n+1} - K_n \end{aligned} \quad (34)$$

El segundo término representa el salto de energía potencial V en el paso de tiempo

$$(q_{n+1} - q_n)^T \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{n+\frac{1}{2}} = \Delta q^T \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{n+\frac{1}{2}} = V_{n+1} - V_n \quad (35)$$

El último término desaparece debido a la naturaleza antisimétrica del tensor simétrico G

$$\frac{1}{\Delta t} (q_{n+1} - q_n)^T G_{n+\frac{1}{2}}(q_{n+1} - q_n) = 0 \quad (36)$$

Parametrización de la rotación

Con el objeto de definir la configuración intermedia entre \mathbf{A}_n y \mathbf{A}_{n+1} descomponemos el incremento de rotación en la forma de dos rotaciones sucesivas

$$\mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{F}^2 \quad \text{tal que} \quad \mathbf{A}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{A}_n \mathbf{F} = \mathbf{A}_{n+1} \mathbf{F}^T \quad (37)$$

La aproximación discreta de la velocidad angular puede calcularse como

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{A}_{n+\frac{1}{2}}^T \dot{\mathbf{A}}_{n+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{\Delta t} \mathbf{A}_{n+\frac{1}{2}}^T (\mathbf{A}_{n+1} - \mathbf{A}_n) = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{F} - \mathbf{F}^T) \quad (38)$$

De la misma manera el incremento de rotación material toma la forma

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\Theta}} = (\mathbf{F} - \mathbf{F}^T) \quad (39)$$

El operador \mathbf{F} puede describirse en términos de las invariantes $(\mathbf{n}, \Delta\phi)$ de la rotación relativa como

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{n}, \frac{1}{2}\Delta\phi) = e_0 \mathbf{I} + \frac{1}{1+e_0} \mathbf{e} \mathbf{e}^T + \tilde{\mathbf{e}} \rightarrow \text{vec}(\mathbf{F}) = \mathbf{n} \sin \frac{1}{2} \Delta\phi = \mathbf{e} \quad (40)$$

Tomamos las siguientes aproximaciones

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{n+\frac{1}{2}} \simeq \frac{2}{\Delta t} \mathbf{e} \quad \Delta \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \simeq 2\mathbf{e} \quad (41)$$

El salto de parámetros de rotación sobre el paso de tiempo es tal que

$$\Delta \mathbf{q} = (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) = 2\mathbf{e} \quad (42)$$

Además, \mathbf{L} y \mathbf{G} en $t_{n+\frac{1}{2}}$ toman la forma

$$\mathbf{L}_{n+\frac{1}{2}} = 2\mathbf{I} \quad \mathbf{G}_{n+\frac{1}{2}} = -4\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (43)$$

Luego, particularizando las ecuaciones de equilibrio (31) al movimiento del trompo en estudio, llegamos a la siguiente ecuación discreta

$$\frac{8}{\Delta t^2} \mathbf{J} \mathbf{e} - \frac{4}{\Delta t} \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_n + \frac{8}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{J} \mathbf{e} + \mathbf{E} \times 2Mgl \mathbf{F}^T \mathbf{A}_n^T \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (44)$$

CONCLUSIONES

Se describe la formulación de varios algoritmos de integración temporal con conservación de la energía aplicados al problema de un trompo. Mientras los esquemas de Simo buscan verificar dicha conservación por colocación en un punto particular o por modificación escalar de la ecuación de equilibrio, el esquema propuesto por Géradin/Bauchau hace aparecer un término cuadrático en el incremento de rotación en la ecuación de equilibrio. En la presentación oral se mostrarán ejemplos de cálculo con los esquemas desarrollados.

REFERENCIAS

- [1] J.C. Simo and K.K. Wong. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 31:19-52, 1991.
- [2] J.C. Simo, N. Tarnow and K.K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 100:63-116, 1992.
- [3] M. Géradin, A. Cardona. *Flexible multibody dynamics: a finite element approach. First Edition*. John Wiley & Sons Ltd. In press, 2000.