Mecánica Computacional, Volumen XIX, pp. 379-384
Compilado por: F. Quintana y S. Felicelli
San Carlos de Bariloche, Noviembre de 2000

Análise de Sensibilidade na Otimização Topológica

Andre A. Novotny [1] Raul A. Feijóo[1] Claudio Padra[2]
Edgardo Taroco[1]

[1] Laboratório Nacional de Computação Científica, Av. Getúlio Vargas, 333, Quitandinhas, RJ, Brazil.

[2] Instituto Balseiro and Centro Atómico Bariloche, 8400, Bariloche, Argentina.

Resumo:

O conceito de Gradiente Topológico, o qual é uma função definida no domínio que fornece a sensibilidade do problema ao criar um pequeno furo numa dada posição do mesmo, tem se mostrado como uma poderosa ferramenta na obtenção da topologia ótima para uma vasta classe de problemas de engenharia. A grande limitação desta metodologia é que quando um furo é criado, não é mais possível estabelecer um homeomorfismo entre os espaços envolvidos. Dessa forma, necessita-se desenvolver algum ferramental matemático específico na obtenção dos gradientes. Neste trabalho, portanto, é proposta uma forma alternativa para obter o Gradiente Topológico baseado em conceitos de Análise de Sensibilidade. A grande vantagem desta metodologia é que através dela é possível calcular o Gradiente Topológico utilizando todo o procedimento matemático já desenvolvido no contexto de otimização de forma, conduzindo a uma formulação bem mais simples e construtiva que as metodologias encontradas atualmente na literatura para obtenção da topologia ótima.

Abstract:

TheTopogical Gradient is a function which provides the sensibility of the problem defined in a certain domain when a small hole in a given position is created. This concept is a powerful tool to obtain the optimal topology for a big class of engineering problems. The most important limitation in this methodology is that, when a hole is created, it is impossible to establish a homeomorfism between the involved spaces. Then, it is necessary to develop some specific mathematical tools to obtain the gradients. In this work we introduce an alternative form to get the Topological Gradient based on Sensibility Analisis concepts. With this methodology we can use the mathematical procedures developed in the context of shape optimization to calculate the Topological Gradient. In this way, the optimal topology is obtained, which is a much simpler and constructive method than the ones existing in the literature.

1 Definição do Gradiente Topológico

Como já mencionado, o Gradiente Topológico fornece a sensibilidade do problema ao criar um pequeno furo numa dada posição do domínio. Matematicamente, este problema pode ser escrito da seguinte maneira:

Seja $\Omega_\epsilon \subset \Re^N$, tal que $\Omega_\epsilon = \Omega - B_\epsilon$, onde B_ϵ é uma bola de raio ϵ centrada no ponto $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$, cujo contorno é denotado por $\Gamma_\epsilon = \Gamma \cup \partial B_\epsilon$. Então, tem-se o domínio original sem furo Ω e o domínio Ω_ϵ com um pequeno furo B_ϵ. Considerando ainda $\psi(\cdot)$ uma função custo definida num certo domínio $(\cdot)$, então o gradiente topológico é escrito como (Garreau et al. 1998),

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\psi(\Omega_\epsilon) - \psi(\Omega)}{f(\epsilon)}. \tag{1}$$

onde $f(\epsilon)$ é uma função de ϵ que dependerá do problema em análise.

O grande inconveniente de trabalhar com a definição dada pelo Eq. (1) é que quando um furo é criado, não é mais possível estabelecer um mapeamento um para um entre os domínios Ω_ϵ e Ω, em outras palavras, não existe mais um homeomorfismo entre estes domínios pois eles se encontram em espaços topológicos diferentes, sendo assim, a derivada (1) não pode ser obtida de forma convencional.

A idéia central deste trabalho, portanto, é partir de um problema em que o furo B_ϵ já exista, ou seja, partir de Ω_ϵ, causando uma pequena perturbação $\delta\epsilon$ em B_ϵ de modo a originar o furo $B_{\epsilon+\delta\epsilon}$ definido em um um novo domínio perturbado $\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Omega - B_{\epsilon+\delta\epsilon}$, sendo o contorno escrito como $\Gamma_{\epsilon+\delta\epsilon\epsilon} = \Gamma \cup \partial B_{\epsilon+\delta\epsilon}$. Assim, o Gradiente Topológico pode ser redefinido da seguinte maneira:

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) := \lim_{\delta\epsilon \to 0\ \epsilon \to 0} \frac{\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_\epsilon)}{f(\epsilon+\delta\epsilon) - f(\epsilon)}. \tag{2}$$

A rigor, esta última definição de Gradiente Topológico fornece apenas informação se o furo B_ϵ com $\epsilon \to 0$ deve aumentar ou diminuir de tamanho e não se este deve ser efetivamente criado, contrário ao que mostra a definição original do Gradiente Topológico (Eq. 1). Por outro lado, entende-se ainda que, expandir um furo de raio ϵ, quando $\epsilon \to 0$, nada mais é que criá-lo. De qualquer maneira, este fato não implica em dizer que ambas definições (1 e 2) sejam equivalentes, a menos de uma prova matemática completa que estabeleça a relação entre elas, a qual será demonstrada mais tarde neste trabalho. A grande vantagem desta última forma de escrever o gradiente topológico, é que através dela pode-se estabelecer um homeomorfismo entre Ω_ϵ e $\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}$. Consequentemente, todo o ferramental matemático desenvolvido em Análise de Sensibilidade à mudança de forma pode ser utilizado neste contexto.

2 Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma

A grande maioria dos modelos associados a problemas de valor no contorno são formulados através de equações diferenciais definidas ponto a ponto num domínio Ω ou, de forma mais geral, por equações integrais sobre Ω. Assim, perturbações neste domínio produzem, necessariamente, alterações tanto nos termos integrandos, quanto no próprio domínio de integração. Sendo assim, a Análise de Sensibilidade à mudança de forma, nada mais é que determinar a variação das características associadas ao problema devido a modificações na configuração denotada por Ω. Para tal, pode-se utilizar os conceitos desenvolvidos no trabalho pioneiro de Murat & Simon (1976), isto é:

Seja o domínio $\Omega \subset \Re^{\mathbf{N}}$. Considerando que este domínio sofra uma perturbação τ, a qual pode ser representada por um mapeamento suave e inversível, da seguinte maneira

$$\chi(\mathbf{x}, \tau) : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}_\tau \qquad \forall \mathbf{x} \in \Re^{\mathbf{N}}.$$

Então, o domínio perturbado Ω_τ, bem como seu contorno Γ_τ, podem ser escritos como

$$\Omega_\tau = \left\{ \mathbf{x}_\tau \in \Re^{\mathrm{N}} \mid \exists\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{x}_\tau = \chi(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \Omega_0 = \Omega \right\}$$

$$\Gamma_\tau \quad = \left\{ \mathbf{x}_\tau \in \Re^N \mid \exists\, \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \mathbf{x}_\tau = \chi(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x_0} = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \Gamma_0 = \Gamma \right\}$$

Expandindo $\chi(\mathbf{x}, \tau)$ em série de Taylor em torno de τ_0 e considerando apenas o primeiro termo da expansão, o mapeamento $\chi(\mathbf{x}, \tau)$ pode ser obtido de forma explícita da seguinte maneira

$$\chi(\mathbf{x}, \tau) = \chi(\mathbf{x}, \tau_0) + \frac{\partial}{\partial \tau}\chi(\mathbf{x}, \tau_0)(\tau - \tau_0) + o(\tau^2).$$

Fazendo $\tau_0 = 0$, tem-se que

$$\chi(\mathbf{x}, \tau) = \chi(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + \tau\frac{\partial}{\partial \tau}\chi(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + o(\tau^2).$$

Observa-se que

$$\chi(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{x}_\tau, \quad \chi(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\chi(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \tag{3}$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é a *velocidade de mudança de forma.* Finalmente, todo ponto $\mathbf{x}_\tau$ pode ser escrito, para τ suficientemente pequeno, da seguinte maneira

$$\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} + \tau\mathbf{v}(\mathbf{x}), \tag{4}$$

Sendo assim, o problema elíptico de valor no contorno escrito na configuração de referência, também deve ser satisfeito, para qualquer τ, na configuração perturbada, tomando a forma: *Encontre* $u_\tau \in U_\tau := U(\Omega_\tau)$, *tal que*

$$a_\tau(u_\tau, p_\tau) = l_\tau(\mathbf{p}_\tau) \qquad \forall\, \mathbf{p}_\tau \in \mathbf{V}_\tau := \mathbf{V}(\mathbf{\Omega}_\tau). \tag{5}$$

Partindo-se, então, para os conceitos de Análise de Sensibilidade à mudança de forma propriamente dita, necessita-se estabelecer a sensibilidade da função custo $\psi(\Omega_\tau)$ em relação a uma perturbação τ, a qual é dada pela seguinte derivada

$$\left.\frac{d}{d\tau}\psi(\Omega_\tau)\right|_{\tau=0} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\psi(\Omega_\tau) - \psi(\Omega_0)}{\tau}. \tag{6}$$

No entanto, para calcular a derivada da função custo em relação a τ é preciso reescrever $\psi(\Omega_\tau)$ como função explícita do parâmetro τ da seguinte maneira:

$$\psi(\Omega_\tau) := \int_{\Omega_\tau} \phi(\tau, u_\tau)\, d\Omega_\tau = \Psi_\tau(\tau, u_\tau) \tag{7}$$

onde u_τ é solução da Eq. (5). Assim, a derivada de $\Psi_\tau(\tau, u_\tau)$ em relação a perturbação τ é dada por

$$\left.\frac{d}{d\tau}\Psi_\tau(\tau, u_\tau)\right|_{\tau=0} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\Psi_\tau(\tau, u_\tau) - \Psi(u)}{\tau} \tag{8}$$

onde u_τ é uma função implícita de τ através da equação de estado.

A análise de sensibilidade em relação a mudança de forma pode ser obtida utilizando o método do Lagrangeano, o qual consiste em relaxar a restrição do problema, neste caso a equação de estado. Assim, o Lagrangeano pode ser escrito, já na configuração perturbada Ω_τ, como

$$\mathcal{L}_\tau(\tau, u_\tau, p_\tau) = \Psi_\tau(\tau, u_\tau) + a_\tau(u_\tau, p_\tau) - l_\tau(p_\tau). \tag{9}$$

Uma vez que a equação de estado seja satisfeita para toda perturbação τ, basta calcular a derivada total do Lagrangeano $\mathcal{L}_\tau$ (Eq. 9) em relação ao parâmetro τ, para obter, automaticamente, a sensibilidade da função custo Ψ_τ em relação a τ, ou seja

$$\frac{d\mathcal{L}_\tau}{d\tau} = \frac{d\Psi_\tau}{d\tau} = \frac{\partial\mathcal{L}_\tau}{\partial\tau} + \left\langle \frac{\partial\mathcal{L}_\tau}{\partial u_\tau}, \frac{du_\tau}{d\tau} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\mathcal{L}_\tau}{\partial p_\tau}, \frac{dp_\tau}{d\tau} \right\rangle. \tag{10}$$

Denominando $\dot{u}_\tau = \frac{du_\tau}{d\tau}$ e $\dot{p}_\tau = \frac{dp_\tau}{d\tau}$, então a derivada do Lagrangeano em relação a p_τ na direção $\dot{p}_\tau$ fica

$$\left\langle \frac{\partial \pounds_\tau}{\partial p_\tau}, \dot{p}_\tau \right\rangle = \left\langle \frac{\partial a_\tau}{\partial p_\tau}, \dot{p}_\tau \right\rangle - \left\langle \frac{\partial l_\tau}{\partial p_\tau}, \dot{p}_\tau \right\rangle = a_\tau (u_\tau, \dot{p}_\tau) - l_\tau (\dot{p}_\tau) . \tag{11}$$

Como $\dot{p}_\tau$ é um elemento arbitrário de V_τ, então anulando a Eq. (11) para todo $\dot{p}_\tau \in V_\tau$, recupera-se a equação de estado do problema, ou seja: *Encontrar* $u_\tau \in U_\tau$ *tal que*

$$\left\langle \frac{\partial \pounds_\tau}{\partial p_\tau}, \dot{p}_\tau \right\rangle = a_\tau (u_\tau, \dot{p}_\tau) - l_\tau (\dot{p}_\tau) = 0 \qquad \forall \quad \dot{p}_\tau \in V_\tau \tag{12}$$

Por outro lado, a derivada do Lagrangeano em relação a u_τ na direçã $\dot{u}_\tau$ pode ser escrita como

$$\left\langle \frac{\partial \pounds_\tau}{\partial u_\tau}, \dot{u}_\tau \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial u_\tau}, \dot{u}_\tau \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a_\tau}{\partial u_\tau}, \dot{u}_\tau \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial u_\tau}, \dot{u}_\tau \right\rangle + a_\tau (\dot{u}_\tau, p_\tau) \tag{13}$$

Da mesma forma, observa-se que $\dot{u}_\tau$ é um elemento arbitrário de V_τ e que $p_\tau \in U_\tau$, então pode-se escolher p_τ de maneira a eliminar o termo dado por Eq. (13). Esta escolha de p_τ conduz a chamada **equação adjunta** do problema, a qual, devido à simetria da forma bilinear $a_\tau(\cdot,\cdot)$, pode ser escrita como: *Encontrar* $p_\tau \in U_\tau$ *tal que*

$$\left\langle \frac{\partial \pounds_\tau}{\partial u_\tau}, \dot{u}_\tau \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial u_\tau}, \dot{u}_\tau \right\rangle + a_\tau (p_\tau, \dot{u}_\tau) = 0 \qquad \forall \quad \dot{u}_\tau \in V_\tau \tag{14}$$

Como os termos (12) e (14) se anulam, então a derivada total do Lagrangeano coincide com sua derivada parcial, ou seja,

$$\frac{d}{d\tau} \pounds_\tau (\tau, u_\tau, p_\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \pounds_\tau (\tau, u_\tau, p_\tau) \tag{15}$$

A Eq. (15) leva a importante conclusão de que, para u_τ solução da equação de estado e p_τ solução da equação adjunta, basta calcular a derivada parcial do Lagrangeano em relação τ para obter a sensibilidade da função custo à mudança de forma (Eq. 8). Além do mais, o cálculo da derivada do Lagrangeano pode ser reescrito da seguinte e já consagrada maneira: Seja $u_\tau \in U_\tau$ solução da equação de estado, isto é

$$a_\tau (u_\tau, \dot{p}_\tau) = l_\tau (\dot{p}_\tau) \qquad \forall \quad \dot{p}_\tau \in V_\tau \tag{16}$$

Seja $p_\tau \in U_\tau$ solução da equação adjunta, dada por

$$a_\tau (p_\tau, \dot{u}_\tau) = - \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial u_\tau}, \dot{u}_\tau \right\rangle \qquad \forall \quad \dot{u}_\tau \in V_\tau \tag{17}$$

Então, considerando a Eq. (15), a Análise de Sensibilidade à mudança de forma pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\tau} \Psi_\tau (\tau, u_\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \pounds_\tau (\tau, u_\tau, p_\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_\tau (\tau, u_\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau (u_\tau, p_\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau (p_\tau) \tag{18}$$

Para uma vasta classe de problemas de engenharia, a análise de sensibilidade à mudança de forma dada pela Eq. (18) pode ser escrita em função de uma integral no contorno Γ , a qual, geralmente, toma a forma:

$$\left. \frac{d}{d\tau} \Psi_\tau (\tau, u_\tau) \right|_{\tau=0} = \int_\Gamma \mathbf{\Sigma n} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{\Gamma}, \tag{19}$$

onde o tensor $\mathbf{\Sigma}$ é conhecido como tensor de Eshelby e $\mathbf{v}$ é a velocidade de mudança de forma dada em Eq. (3).

Outro importante resultado já demonstrado em, por exemplo, Fancello (1993), é que somente a componente da velocidade $\mathbf{v}$ na direção normal a fronteira Γ é significativa nos cáculos de sensibilidade. Este resultado baseia-se na idéia de que somente a componente normal da velocidade, ou seja v_n, é que efetivamente produz uma mudança na forma do corpo. Sendo assim, considerando que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v_n n}$, a Eq. (19) pode ser reescrita como

$$\left.\frac{d\Psi_\tau}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \int_\Gamma \mathbf{\Sigma n} \cdot \mathbf{n v_n} \; d\mathbf{\Gamma} = \mathbf{v_n} \int_\Gamma \mathbf{g_T}(\mathbf{x}) \; d\mathbf{\Gamma}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{g_T}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Sigma n} \cdot \mathbf{n}. \tag{20}$$

para v_n constante em Γ.

Finalmente, basta mostrar como a expressão final da análise de sensibilidade à mudança de forma (Eq. 20) pode ser utilizada para obter o Gradiente Topológico $G_T(\mathbf{x})$, dados pelas Eqs. (1 ou 2).

3 Cálculo do Gradiente Topológico via Análise de Sensibilidade

Seja a função custo $\psi(\cdot)$ definida nos domínios $\Omega_\epsilon = \Omega - B_\epsilon$ e $\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Omega - B_{\epsilon+\delta\epsilon}$. Considerando ainda os conceitos de Análise de Sensibilidade à mudança de forma apresentados na Seção 2, tem-se

$$\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Omega_\tau \Rightarrow \Omega_\epsilon = \Omega_0 \qquad \Gamma_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Gamma_\tau \Rightarrow \Gamma_\epsilon = \Gamma_0, \tag{21}$$

lembrando que apenas a bola B_ϵ sobre uma perturbação $\delta\epsilon$.

Apartir da Eq. (4) e considerando que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \tau \mathbf{v_n n}$, vem

$$\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} + \tau \mathbf{v_n n}. \tag{22}$$

Então, é possível associar a perturbação $\delta\epsilon$ com o parâmetro τ, ou seja, das Eqs. (21 e 22) e observando que $\delta\epsilon = \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}\|$ para $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{B}_\epsilon$ e $\mathbf{x}_\tau = \chi(\mathbf{x},\tau) \in \partial\mathbf{B}_{\epsilon+\delta\epsilon}$, tem-se que

$$\delta\epsilon = \|\tau v_n \mathbf{n}\| = \tau |v_n| \, \|\mathbf{n}\| = \tau |v_n|, \qquad \Rightarrow \qquad \delta\epsilon = \tau |v_n|. \tag{23}$$

Agora, a relação entre o Gradiente Topológico e os conceitos de Análise de Sensibilidade à mudança de forma, pode ser demonstrada no seguinte Teorema:

Theorem 1 *Seja o gradiente topológico dado pela Eq. (1), tal que* $0 < |G_T(\hat{\mathbf{x}})| < \infty$, *então o limite com* $\epsilon \to 0$ *existe e pode ser escrito como*

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{f'(\epsilon)|v_n|} \left.\frac{d\psi(\Omega_\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$$

Lembrando que $\psi(\Omega_\tau) = \Psi_\tau(\tau, u_\tau)$ e que $\Gamma_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Gamma_\tau$, então, apartir do resultado do Teorema 1 e da Eq. (20) e, considerando ainda uma escolha adequada de $f(\epsilon)$, tal que $0 < |G_T(\hat{\mathbf{x}})| < \infty$, o gradiente topológico pode ser expresso da seguinte forma:

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{f'(\epsilon)|v_n|} \left.\frac{d}{d\tau}\Psi_\tau(\tau, u_\tau)\right|_{\tau=0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{sign(v_n)}{f'(\epsilon)} \int_{\Gamma_\epsilon} g_T(\mathbf{x}) \; d\Gamma_\epsilon \tag{24}$$

Finalmente, como a parcela do contorno Γ_ϵ que efetivamente está submetida à perturbação $\delta\epsilon$ (ou $\tau|v_n|$) é relativa ao contorno da bola B_ϵ, isto é ∂B_ϵ, então a Eq. (24) pode ser escrita, considerando uma expansão no furo $(sign(v_n) = -1)$, como

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = -\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \int_{\partial B_\epsilon} g_T(\mathbf{x}) \; d\partial B_\epsilon. \tag{25}$$

Assim sendo, para obter a expressão final do Gradiente Topológico dada pela Eq. (25) basta calcular $g_T(\mathbf{x}) = \mathbf{\Sigma n} \cdot \mathbf{n}$, onde o tensor $\mathbf{\Sigma}$ depende estritamente da função custo escolhida e de cada problema em análise (equação de estado), e posteriormente calcular o limite com $\epsilon \to 0$.

4 Algoritmo de Otimização Topológica

Como visto na Seção 1, o Gradiente Topológico trata-se, na verdade, de uma derivada que fornece a sensibilidade da função custo ψ ao criar um pequeno furo B_ϵ no domínio Ω. No entanto, é fácil ver que, da maneira como apresentado neste trabalho, necessita-se ainda colocar alguma restrição adicional no problema, além da equação de estado, para evitar que os algoritmos de otimização topológica a serem desenvolvidos conduzam apenas a solução trivial do problema, *i.e.* $meas\,(\Omega) = 0$.

Uma forma de contornar este problema consiste em introduzir uma restrição no volume final a ser obtido, ou seja, a idéia é minimizar ψ, com a restrição de que $meas\,(\Omega) \geq meas\,(\bar{\Omega})$, onde $meas\,(\bar{\Omega})$ corresponde ao volume final requerido. Matematicamente, este problema de otimização pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \textbf{Minimize}: & \psi\,(\Omega) \\ \textbf{Sujeito a}: & \int_\Omega d\Omega \geq meas\,(\bar{\Omega})\,. \end{cases} \tag{26}$$

Na prática, o problema de programação matemática dado pela Eq. (26) é bastante simples de ser resolvido e pode ser ser esquamatizado no seguinte algoritmo:

Seja a sequência $\Omega_{k+1} = \{\Omega_k \mid meas\,(\Omega_k) \geq meas\,(\bar{\Omega})\}$, onde k é a k-ésima iteração, então

1. Fornecer o domínio inicial Ω_0 e a restrição $meas\,(\bar{\Omega})$.
2. Enquanto $meas\,(\Omega_k) \geq meas\,(\bar{\Omega})$ faça
   - **(a)** Encontrar a solução direta u_k e a adjunta p_k.
   - **(b)** Calcular $G_T\,(\hat{\mathbf{x}})_k$ segundo a Eq. (25).
   - **(c)** Criar os furos nos pontos $\hat{\mathbf{x}}$ correspondente a $G_T\,(\hat{\mathbf{x}})_k < \eta_k$, onde η_k é calculado de forma proporcional ao volume de material a ser retirado em cada iteração k.
   - **(d)** Definir o novo domínio Ω_{k+1}.
   - **(e)** Fazer $k \leftarrow k + 1$.
3. Neste ponto espera-se ter em mãos a topologia final desejada.

Note que o algoritmo de otimização topológica proposto neste trabalho é equivalente a um método de ponto fixo. Esta é apenas uma primeira tentativa para utilizar as informações contidas no Gradiente Topológico. No entanto, nada impede que outros algoritmos sejam propostos de modo a aproveitar melhor tais informações.

References

[1] S. Garreau, Ph. Guillaume & M. Masmoudi (1998) - **The Topological Gradient**, Relatório interno, UFR MIG, Université Paul Sabatier Toulouse 3, France.

[2] F. Murat & J. Simon (1976) - Sur le Controle par un Domaine Geometrique, Tese de doutorado, Universite P. et M. Curie (Paris VI), Paris, France.