



ALGUNAS APLICACIONES RECIENTES DEL METODO DE TRANSFORMACION CONFORME

por P.A.A. Laura, R.H. Gutierrez, D.V. Bambill y V.A. Jelderlinic
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET) y Departamento de Ingeniería
- Universidad Nacional del Sur - 8000 - Bahía Blanca

Resumen.

Aplicaciones del método de transformación conforme fueron propuestas por Sommerfeld hace casi tres cuartos de siglo, en relación a la solución de la ecuación de Helmholtz en el caso de un dominio de geometría compleja. Con posterioridad la metodología fue empleada en el análisis de guías de ondas electromagnéticas y recientemente ha sido utilizado en problemas de dispersión de ondas acústicas. En este trabajo se reseñan aplicaciones recientes en problemas de acústica y recientes en problemas de acústica y se presenta la determinación de la frecuencia fundamental de membranas no homogéneas doblemente conexas.

Abstract.

Sommerfeld proposed the use of conformal mapping when solving Helmholtz equation in the case of domains of complicated boundary shape, almost three quarters of a century ago. Later the approach was implemented when dealing with electromagnetic wave propagation in waveguides of non-rectangular and non-circular cross section and recently: in acoustic scattering problems which are surveyed in this paper. The second part of the present article deals with the determination of the fundamental frequency of transverse vibration of a class of non-homogeneous membranes of complicated boundary shape.

Introducción.

El método de transformación conforme constituye una de las herramientas más antiguas en la historia de las ciencias ya que tiene sus orígenes en la representación de la bóveda celeste en un plano lograda por Tolomeo hace 1700 años.

A pesar de su antigüedad el método sigue vigente y es sumamente conveniente en muchas aplicaciones siendo de interés señalar el hecho de que la conocida publicación del IEEE sobre teoría y aplicaciones de la teoría de micro-ondas (IEEE Transactions on MTT) publica, anualmente, varias contribuciones básicas y aplicadas en su campo que hacen uso del método de transformación conforme.

Si bien durante el siglo XIX las aplicaciones del método tenían lugar en la solución de la ecuación de Laplace en dominios de geometría compleja ha sido en el siglo XX en que ha sido aplicado en situaciones considerablemente más compleja que van desde la teoría matemática de la elasticidad a problemas de acústica subacuática pasando por problemas de vibraciones y pandeo de placas, electrónica, flujo y

transferencia de calor en conductos de vehículos espaciales, etc. [1].

En este trabajo:

- se reseñan algunas soluciones de problemas de acústica subacua que hacen uso de transformación conforme
- se determinan las frecuencias fundamentales de vibración de membranas anulares de materiales compuestos con un contorno exterior poligonal.

Aplicaciones en el Campo de la Acústica Subacua.

En 1970, Pond propuso un método para resolver problemas de difracción y radiación de sonido de cuerpos de revolución [2]. Su técnica utiliza la transformación conforme de la región exterior al perfil meridiano del cuerpo dado, en el exterior de un círculo. El problema de contorno es formulado en términos de coordenadas esféricas en el espacio transformado y se hace uso del método de Galerkin para obtener una solución aproximada. Este enfoque fue mejorado considerablemente por Di Perna y Stanton casi un cuarto de siglo después al obtener un método que consiste en construir funciones transformación que logran que la ecuación de Helmholtz transformada sea resuelta en forma exacta [3-4].

En 1978 Berger obtuvo la solución numérica del problema de vibraciones no estacionarias de una estructura laminar de revolución, rodeada por un medio acústico. La región exterior a la curva generadora del sólido de revolución es transformada en la región exterior al círculo unitario [5]. Cabe destacar el hecho de que Bowman y colaboradores discuten el problema de dispersión de ondas acústicas en su conocido tratado [6].

En 1984 Dozier publica su artículo, verdaderamente pionero, donde desarrolla la solución de dispersión subacua de señales acústicas, inducida por la superficie de un modelo de océano, de características reales [7]. Dozier utiliza una secuencia de transformaciones conformes de modo de "aplanar" segmentos sucesivos de la superficie que es reemplazada por una poligonal y es congelada en el tiempo.

Recientemente Norton y colaboradores han utilizado la transformación conforme de una superficie real del océano en el modelo parabólico de la ecuación de la onda que hace también uso de una formulación de elementos finitos [8-9].

Determinación de Frecuencias Naturales de Vibración de Membranas Anulares de Materiales Compuestos con un Contorno Exterior Poligonal.

La funcional que gobierna el problema de la membrana vibrante es, en el caso de modos normales:

$$J[U] = \iint_R \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{\omega^2 \rho}{S} u^2 \right] dx dy \quad (1)$$

donde u : amplitud del desplazamiento transversal de la membrana

ω : frecuencia natural circular

ρ : densidad del material por unidad de área

S : tensión uniforme en el plano aplicada en los contornos de la membrana

R : dominio, región doblemente conexa determinada por los contornos de la membrana.

Las condiciones de contorno son:

$$u [L_1(x,y) = 0] = 0 \quad \text{en el contorno exterior} \quad (2 \text{ a, b})$$

$$u [L_2(x,y) = 0] = 0 \quad \text{en el contorno circular interno}$$

La resolución del problema planteado consiste en la minimización de la funcional (1) con las condiciones (2a y b).

Para eliminar la complicación introducida por la forma geométrica del contorno exterior, es conveniente utilizar el método de transformación conforme que simplifica esa forma poligonal.

La región doblemente conexa de la Figura 1, puede ser transformada aproximadamente en una región anular de radio exterior unitario y radio interior r_0 utilizando un desarrollo en serie de potencias del tipo [1]

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{1+ns} ; \quad \xi = r e^{i\theta} \quad (3)$$

La expresión (3) transforma al contorno exterior y, en forma aproximada a los dos contornos circulares, mostrados en la Figura 1 mientras sus radios sean pequeños en relación con la apotema del polígono ya que para ellos $r \ll 1$ y en primera aproximación, la expresión (3) se reduce al primer término.

En consecuencia la funcional (1) podrá ser expresada en la forma

$$\begin{aligned} J[u(r,\theta)] = & \int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] r \, dr \, d\theta - \\ & - \Omega^2 \left[\frac{\rho_1}{\rho_0} \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^2 \left| f^{-1} \right|^2 r \, dr \, d\theta + a_p^2 A_s^2 \left(\int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} u^2 r \, dr \, d\theta \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\rho_1}{\rho_2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^2 r \, dr \, d\theta \right) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{con } \left| f^{-1} \right|^2 = a_p^2 A_s^2 \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^N (js+1)(ks+1) a_j r^{s(j+k)} e^{i\theta s(j-k)}$$

y donde A_p : apotema del polígono regular del contorno exterior

A_s : coeficiente que depende de s [1]

s : número de ejes de simetría del polígono regular

a_s : 1

$$a_j = a_{j-1} \frac{[(j-1)j+1][(j-1)s+2]}{js(js+1)}$$

$$\Omega = \sqrt{\rho_0/S} \omega \, a_p$$

Las condiciones de contorno se transforman en

$$u(1,\theta) = u(r_0,\theta) = 0 \quad (5a,b)$$

Aplicando el método de Rayleigh-Ritz optimizado se minimiza la funcional (4).

Se adopta una función que aproxime la deflexión de la membrana de la forma:

$$u(r, \theta) \cong u(r) = \sum_{l=0}^N R_l (1-r^{\gamma+2l}) [1 - (r/r_0)^{2l}] \quad (6)$$

R_l = coeficientes indeterminados

γ : parámetro de optimización.

En la expresión (6) se desprecia la dependencia de θ , aproximación lícita cuando se determina la frecuencia fundamental.

Se minimiza la funcional respecto de los coeficientes R_l

$$\frac{\partial J(u)}{\partial R_l} = 0 \quad \text{con } l = 0, 1, \dots, N \quad (7)$$

y luego se optimiza el coeficiente de frecuencia natural con respecto al parámetro γ

$$\frac{d\Omega}{d\gamma}(\gamma) = 0 \quad (8)$$

Se obtiene así el coeficiente adimensional de frecuencia fundamental de la membrana.

Resultados Numéricos.

La Tabla 1 presenta valores del coeficiente de frecuencia fundamental de una membrana cuadrada no homogénea con un orificio concéntrico circular, para diferentes valores de los parámetros R_1/a_p , R_0/a_p y ρ_1/ρ_2 .

La Tabla 2 muestra información numérica para el caso de una membrana hexagonal.

En ambos casos, cuando $\rho_1/\rho_2 = 1$ (caso de una membrana homogénea) los valores obtenidos están en buena concordancia con los autovalores previamente determinados en la literatura técnico-científica [1].

El análisis presentado en este trabajo es válido, desde un punto de vista básico, en el caso de inhomogeneidades producidas por el proceso de fabricación en membranas anulares utilizadas en transductores y también en el cálculo de frecuencias de corte en guías de ondas acústicas conteniendo un medio fluido no homogéneo, según la configuración geométrica mostrada en la Figura 1.

Agradecimientos.

El presente estudio ha sido auspiciado por el CONICET (PID-BID 003/92) y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Director: Profesor Ing. Raúl E. Rossi). La Srta. Verónica A. Jederlinic ha sido apoyada por una beca de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS:

- (1) R. Schinzinger y P.A.A. Laura. 1991. *Conformal Mapping: Methods and Applications*, ELSEVIER (Amsterdam, Holanda).
- (2) H.L. Pond. 1970. NUSC Report N° NL-3031 Naval Underwater Systems Center, New London. Sound radiation from a general class of bodies of revolution.

(3) D.T. Di Perna y T.K. Stanton. 1994. Journal of the Acoustical Society of America 96, 3064-3079. Sound scattering by cylinders of noncircular cross section: a conformal mapping approach.

(4) P.A.A. Laura. 1995. Journal of the Acoustical Society of America 98(6) 3534-3535. Comments on "Sound scattering by cylinders of noncircular cross section: a conformal mapping approach".

(5) B.S. Berger. 1978. Journal of Applied Mechanics 100, 149-152. Transient motion of an elastic shell of revolution on an acoustic medium.

(6) J.J. Bowman, T.B. Senior and P.I. Uslenghi. 1969. *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, North Holland (Amsterdam, Holanda).

(7) L.B. Dozier. 1984. Journal of the Acoustical Society of America 75, 1415-1432. PERUSE: a numerical treatment of rough surface scattering for the parabolic wave equation.

(8) G.V. Norton, J.C. Novarini y R.S. Keiffer. 1995. Journal of the Acoustical Society of America 97, 2173-2180. Coupling scattering from the sea surface to a one-way marching propagation model via conformal mapping: validation.

(9) G.C. Norton y J.C. Novarini. 1996. Journal of the Acoustical Society of America 99(4). The effect of sea-surface roughness on shallow water waveguide propagation: a coherent approach.

| $\Omega_1 = \sqrt{\rho_1/\rho_0} \omega_1 a$ | | | | | |
|--|-----------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
| R_1/a_p | R_0/a_p | $\rho_1/\rho_0 = 0.5$ | $\rho_1/\rho_0 = 1$ | $\rho_1/\rho_0 = 1.5$ | $\rho_1/\rho_0 = 2$ |
| 0.20 | 0.05 | 7.8704 | 5.6581 | 4.6441 | 4.0322 |
| | 0.10 | 8.5972 | 6.1104 | 4.9973 | 4.3313 |
| | 0.15 | 9.2617 | 6.5537 | 5.3523 | 4.6358 |
| 0.30 | 0.05 | 7.5097 | 5.6581 | 4.7150 | 4.1243 |
| | 0.10 | 8.3189 | 6.1104 | 5.0481 | 4.3967 |
| | 0.20 | 9.8632 | 7.0204 | 5.7442 | 4.9797 |
| 0.40 | 0.05 | 7.0080 | 5.6581 | 4.8397 | 4.2900 |
| | 0.10 | 7.7910 | 6.1104 | 5.1622 | 4.5456 |
| | 0.20 | 9.4545 | 7.0204 | 5.8185 | 5.0753 |
| | 0.30 | 11.3385 | 8.0935 | 6.6279 | 5.7483 |

TABLA 1 - Coeficiente de frecuencia fundamental de una membrana cuadrada con un agujero circular concéntrico.

NOTA: Se ha expresado el coeficiente Ω_1 en términos del lado del polígono.

| $\Omega_1 = \sqrt{\rho_0/S} \omega_1 a$ | | | | | |
|---|-----------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
| R_1/a_p | R_0/a_p | $\rho_1/\rho_0 = 0.5$ | $\rho_1/\rho_0 = 1$ | $\rho_1/\rho_0 = 1.5$ | $\rho_1/\rho_0 = 2$ |
| 0.20 | 0.05 | 4.7415 | 3.4096 | 2.7987 | 2.4302 |
| | 0.10 | 5.1941 | 3.6849 | 3.0137 | 2.6122 |
| | 0.15 | 5.5898 | 3.9555 | 3.2304 | 2.7980 |
| 0.30 | 0.05 | 4.5212 | 3.4096 | 2.8423 | 2.4866 |
| | 0.10 | 5.0133 | 3.6849 | 3.0450 | 2.6524 |
| | 0.20 | 5.9574 | 4.2411 | 3.4703 | 3.0086 |
| 0.40 | 0.05 | 4.2164 | 3.4096 | 2.9187 | 2.5884 |
| | 0.10 | 4.6909 | 3.6849 | 3.1151 | 2.7441 |
| | 0.20 | 5.7047 | 4.2411 | 3.5164 | 3.0679 |
| | 0.30 | 6.8638 | 4.9011 | 4.0141 | 3.4815 |

TABLA 2 - Coeficientes de frecuencia fundamental de una membrana hexagonal con un agujero central circular concéntrico.

NOTA: Se ha expresado el coeficiente Ω_1 en términos del lado del polígono.

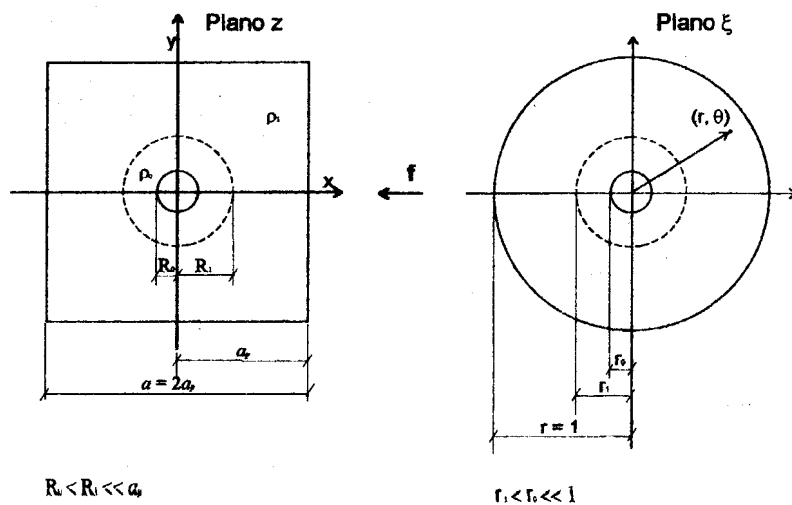


FIGURA 1 - Membrana Poligonal Regular No Homogénea Con Borde Interno Circular Concéntrico Fijo.