



## **ESTUDO DO PROBLEMA DO EMPENAMENTO EM PERFIS DE SEÇÃO ABERTA UTILIZANDO ELEMENTOS DE CASCA POLIÉDRICA**

Inácio Benvegno Morsch  
Ademar Gilberto Groehs

Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - CPGEC  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Endereço: Rua Artur Rocha 55 apto 402  
CEP: 90.450-171 - Porto Alegre/RS - BRASIL  
E-Mail: morsch@vortex.ufrgs.br

### **RESUMO**

Este trabalho aplica elementos finitos de casca poliédrica na solução de problemas que envolvam empenamento. Estes elementos são empregados com razão de aspecto superior às normalmente utilizadas com o objetivo de se reduzir os custos computacionais da análise. Perfis de seção aberta usuais foram analisados com elementos de casca clássicos. Este trabalho foi desenvolvido no Sistema GAELI - CPGEC UFRGS.

### **ABSTRACT**

This work applies flat shell finite elements to solve warping problems. This elements are used with aspect rates higher than the usual in order to reduce computational analysis costs. Usual open sections elements were studied with classic shell finite element. This work was developed in GAELI - CPGEC UFRGS.

### **1. INTRODUÇÃO**

A consideração dos efeitos do empenamento, causados pela torção, em vigas de seção transversal do tipo aberta é cada vez mais exigido devido à necessidade de otimização da relação peso/resistência. Estruturas do tipo carrocerias de ônibus, chassis de caminhões, colheitadeiras, vagões são apenas alguns exemplos onde a consideração dos efeitos da torção pode ter uma importância significativa. Estas vigas tendo uma ou mais seções restringidas, parcial ou totalmente, ao empenamento, e sujeitas a um sistema geral de forças externas, desenvolvem uma complexa distribuição de tensões longitudinais [1]. A importância da consideração destas tensões cresce a medida que a espessura da chapa utilizada no perfil diminui.

Os problemas que envolvem restrição total ao empenamento são resolvidos empregando-se a Teoria de Vlasov. Entretanto, nos casos gerais, que consideram o empenamento semi-restringido, não é possível o emprego da mesma. Nestes casos, costuma-se utilizar elementos de pórtico espacial, com um parâmetro nodal extra associado ao bimomento [2]. Estes elementos são, em geral, utilizados em estruturas em linha ou grelhas, onde o bimomento é transferido diretamente de uma viga a outra, sem necessidade de rotação. As vantagens deste modelamento são a utilização de um número reduzido de elementos apresentando pequenas exigências de memória e de tempo de processamento. A limitação deste método é que o bimomento, por não ser um tensor [3], não pode ser transferido de modo satisfatório em uma configuração espacial. Alguns autores, [4], conseguiram resultados parciais para estruturas espaciais através da utilização dos conceitos *warping indicator*, *warping spring* porém estes apresentam a limitação de dependerem da forma como as barras estão unidas. Em estruturas espaciais, o emprego de elementos de casca poliédrica, para modelar as barras, fornece uma solução geral para o problema com uma saída de resultados bem mais rica do que a obtida empregando-se elementos de barra. No entanto, esta solução leva a um grande número de elementos com conseqüente necessidade de memória e tempo de processamento elevados. Além disso, a própria geração dos dados e interpretação dos resultados apresentam dificuldades consideráveis. Os trabalhos desenvolvidos nesta linha de pesquisa propõe alternativas para reduzir estes custos computacionais [5], [6].

A carência de resultados experimentais relacionados a problemas com empenamento semi-restringido é bastante grande. Na bibliografia especializada são raras as publicações que dispõem de algum resultado experimental. Esta falta de resultados provavelmente se deve ao comportamento bastante complexo das tensões que é observado através da solução utilizando-se elementos finitos. Neste contexto, o objetivo deste estudo é reduzir o consumo de memória e o tempo de análise necessários para a solução de um problema, que envolva empenamento, através do modelamento com elementos de casca. A estratégia empregada para isto é utilizar elementos com razão de aspecto maiores que as usuais. Deseja-se com isto viabilizar o estudo do comportamento do empenamento em alguns tipos de perfis principalmente em estruturas mais complexas tais como veículos estruturados (ônibus).

## 2. ESTRATÉGIA EMPREGADA

As carrocerias e chassis de ônibus são compostas, na sua maioria, por barras retas ou com pequena curvatura. Os comprimentos destas barras são normalmente maiores que as outras dimensões da seção transversal e, além disso, não ocorre alteração na forma desta. Logo, estas barras podem ser modeladas sem problemas por elementos do tipo quadrilátero. Como o modelamento da seção fica constante ao longo da barra, devido as características anteriores, a redução do número de elementos passa pela utilização de elementos com razão de aspecto maior que um, o que, a princípio, vai contra as recomendações clássicas que dizem que os elementos não devem ser utilizados com razão de aspecto maior que um.

Os elementos de casca poliédrica empregados são obtidos através da combinação da formulação de Estado Plano de Tensões, EPT, com a formulação de Placa. A matriz de rigidez do elemento é construída a partir do correto posicionamento das submatrizes de EPT, fornece os graus de liberdade  $U_x$  e  $U_y$ , e de Placa, fornece os graus de liberdade  $U_z$ ,  $R_x$  e  $R_y$ . Para efetuar a montagem da matriz de rigidez global os parâmetros nodais são rotados e referidos ao sistema global, passando a ter-se 3 deslocamentos e 3 rotações por nó. Em coordenadas locais, na linha e na coluna correspondentes ao grau de liberdade da rotação em torno da normal à placa, colocam-se zeros que serão eliminados quando for realizada a rotação. Se vários elementos coplanares concorrem num nó aparece uma linha de zeros para a rotação normal que são eliminados depois de efetuada a transformação de coordenadas mas, fica uma dependência linear entre as variáveis que conduz à singularidade da matriz global. Para eliminar este problema é colocado o valor 1 na diagonal principal sempre que todos os elementos que concorrem a um nó forem coplanares.

A formulação de Placa empregada está baseada na Teoria de Kirchhoff ou na Teoria de Mindlin. A teoria de Kirchhoff, admite que as retas normais à placa na configuração original permanecem retas e normais à superfície média deformada. Esta formulação exige continuidade C0 e C1, o que complica notavelmente a obtenção de funções de interpolação adequadas [7]. A teoria de Reissner-Mindlin considera os efeitos da deformação transversal devido ao corte. Esta teoria considera que as retas normais a superfície média da placa antes da deformação permanecem retas mas, não necessariamente normais a superfície média após a deformação. Logo as rotações são interpoladas de forma independente do deslocamento w, portanto, apenas a continuidade das funções de interpolação é necessária. Por este motivo a implementação e desenvolvimento de um elemento baseado na teoria de Mindlin é bem mais simples que a de um elemento baseado na teoria de Kirchhoff [7].

Os elementos empregados neste estudo são o DKQ (*Discrete Kirchoff Quadrilateral*) [8], Serendipity Clássico de 8 nós [9], Lagrange Clássico de 9 nós [9] e dois elementos obtidos através da introdução de funções tipo bolha no elemento Serendipity Clássico. A seguir são apresentadas as principais características destes elementos.

### 2.1 DKQ

Elemento quadrilátero, com 4 nós, baseado na teoria de Kirchhoff. É um dos elementos padrões do Sistema GAELI. A matriz de rigidez deste elemento é calculada através de uma integração de Gauss 3 x 3 sendo praticamente insensível a distorções. O elemento de casca plana é obtido pela combinação com o elemento EPT que utiliza as funções de interpolação bilineares conforme (1).

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4 \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) & , & \quad N_2 = 1/4 \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \\ N_3 &= 1/4 \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) & , & \quad N_4 = 1/4 \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \end{aligned} \quad (1)$$

### 2.2 SERENDIPITY - CLÁSSICO

Elemento de placa clássico de 8 nós baseado na teoria de Mindlin. Emprega as funções de interpolação Serendipity Quadráticas, as indicadas em (2) correspondem aos nós de quina e as indicadas em (3) correspondem aos nós intermediários. O cortante é calculado utilizando uma integração de Gauss do tipo 2x2 nos próprios pontos de integração sendo depois extrapolado para os nós. A matriz de rigidez deste elemento é calculada através de um processo de integração de Gauss do tipo 3x3. O elemento de casca plana é obtido através da combinação do SC com o quadrilátero quadrático de EPT, o qual utiliza as mesmas funções de interpolação indicadas em (2) e (3).

$$\begin{aligned} N_1 &= -1/4 \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\xi+\eta) & , & \quad N_2 = -1/4 \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\xi+\eta) \\ N_3 &= -1/4 \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\xi-\eta) & , & \quad N_4 = -1/4 \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\xi-\eta) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} N_5 &= 1/2 \cdot (1-\xi^2) \cdot (1-\eta) & , & \quad N_6 = 1/2 \cdot (1-\eta^2) \cdot (1+\xi) \\ N_7 &= 1/2 \cdot (1-\xi^2) \cdot (1+\eta) & , & \quad N_8 = 1/2 \cdot (1-\eta^2) \cdot (1-\xi) \end{aligned} \quad (3)$$

### 2.3 LAGRANGE - CLÁSSICO (LC)

Elemento de placa clássico de nove nós, utiliza nó central, baseado na Teoria de Mindlin. Utiliza as funções de interpolação de Lagrange, expressões (4) e (5). A matriz de rigidez deste elemento é calculada através de um processo de integração de Gauss do tipo 3x3. Para que este elemento seja compatível com o Pré-Processador e o Pósprocessador do Sistema GAELI, [10], faz-se necessário a eliminação do seu nó

central através de condensação estática, [11]. Isto é possível porque este, por ser central, não possui nenhuma ligação com os elementos vizinhos. Este procedimento não pode ser realizado em problemas dinâmicos porque, neste caso, o nó central passa a ter significado físico.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4 \cdot \xi \eta \cdot (\xi - 1) \cdot (\eta - 1) & , & \quad N_2 = 1/4 \cdot \xi \eta \cdot (\xi + 1) \cdot (\eta - 1) \\ N_3 &= 1/4 \cdot \xi \eta \cdot (\xi + 1) \cdot (\eta + 1) & , & \quad N_4 = 1/4 \cdot \xi \eta \cdot (\xi - 1) \cdot (\eta + 1) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} N_5 &= 1/2 \cdot \eta (1 - \xi^2) (\eta - 1) & , & \quad N_6 = 1/2 \cdot \xi (1 - \eta^2) (\xi + 1) \\ N_7 &= 1/2 \cdot \eta (1 - \xi^2) (\eta + 1) & , & \quad N_8 = 1/2 \cdot \xi (1 - \eta^2) (\xi - 1) \\ N_9 &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (5)$$

#### 2.4 SERENDIPITY COM 1 NÍVEL (SM1b) E 2 NÍVEIS (SM2b) DE FUNÇÕES BOLHA

Estudos realizados sobre o Método *p* mostram que os elementos de ordem superior podem trabalhar com razões de aspecto elevadas. Por isso se decidiu investigar a influência da utilização de funções bolha de ordem superior, [12], nos resultados. Foram desenvolvidos dois elementos a partir da introdução de funções bolha no elemento SC. O primeiro elemento utiliza um nível de função bolha conforme equação (6). O segundo elemento utiliza dois níveis de função bolha conforme equações (6) e (7).

$$N_9 = (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta^2) \quad (6)$$

$$N_{10} = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \xi \quad , \quad N_{11} = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) \eta \quad (7)$$

Estas funções foram introduzidas no elemento SC através de processo semelhante ao da Adição de Modos Incompatíveis, [11]. A expressão (8) mostra como é feita a aplicação das funções para 1 grau de liberdade, onde  $\alpha_i$  são as componentes dos deslocamentos que não são associadas com pontos nodais.

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i + \sum_{i=1}^3 N_{8+i} \alpha_i \quad (8)$$

Neste caso, a componente  $\alpha_1$  pode ser associado a um nó interno. Estas componentes são eliminadas através de um processo de condensação estática. As matrizes de rigidez destes elementos são calculadas a partir de um processo de integração Gauss do tipo  $3 \times 3$ .

### 3. EXEMPLOS

Os exemplos a seguir apresentados procuram mostrar as vantagens da aplicação de elementos de casca poliédrica com razão de aspecto elevada na solução de problemas que envolvam empenamento. Em todos os exemplos a seguir apresentados é utilizado um material com constantes  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ .

#### 3.1 EXEMPLO 1

Uma viga C, descrita na figura (1.a), está submetida a um par de forças que causa torção. A figura (1.b) mostra a distribuição da tensão  $\sigma_x$  devido ao empenamento restringido no engaste.

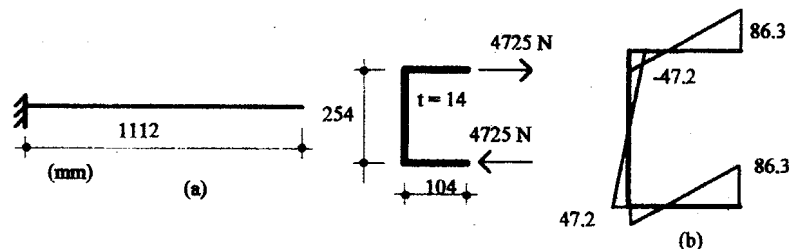


Figura (1) - Viga C submetida a um momento torçor.

O gráfico da figura (2a) compara a tensão  $\sigma_x$ , devida ao empenamento, obtida empregando-se elementos de casca poliédrica, com uma integração reduzida  $2 \times 2$ , com a solução analítica. São comparados apenas os valores máximos positivos desta tensão. Observa-se que os valores obtidos próximos ao engaste ou da carga apresentam erro mais elevado. Para se investigar melhor este problema utilizou-se uma malha mais refinada com um esquema de integração tipo  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$  cujos resultados estão apresentados na figura (2b).

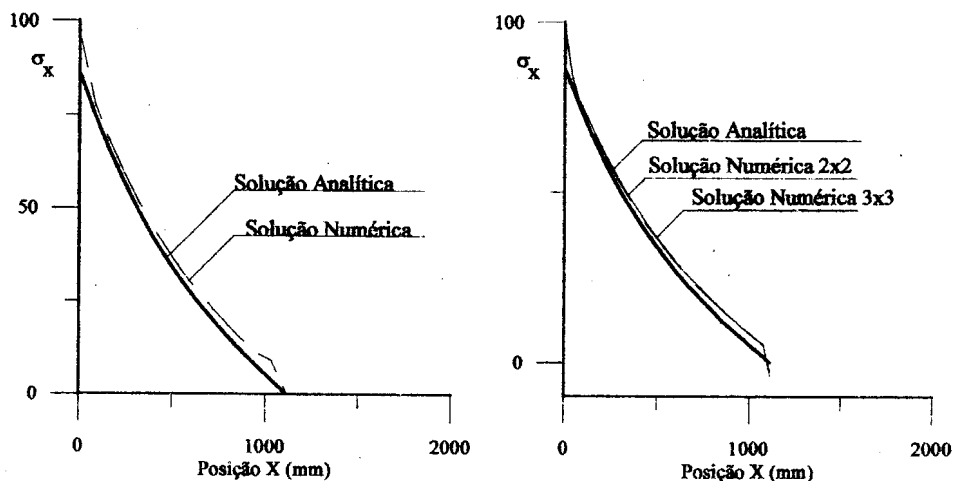


Figura (2) - Comparação da solução analítica com a solução obtida com elementos de casca.

A figura (3) mostra duas das malhas, (a) e (b), que foram utilizadas na solução do problema. O gráfico da figura (4) compara a solução obtida pela malha da figura (3a) com a malha da figura (3b). As flutuações que ocorrem na linha tracejada, resultados da malha menos refinada, se devem a consideração dos valores dos nós intermediários, do elemento de 8 nós, no traçado da curva, o que não foi realizado para as demais curvas. A figura (5) mostra algumas das possibilidades de saída de resultados que nos permite a análise com elementos de casca, no caso são mostradas as distribuições da tensão  $\sigma_x$  ao longo da viga.

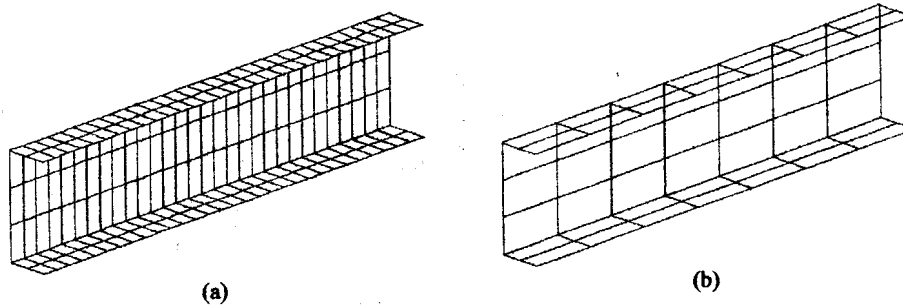


Figura (3) - Exemplos de malhas empregadas.

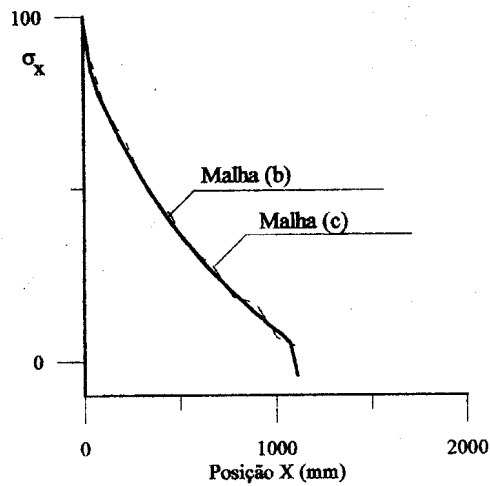
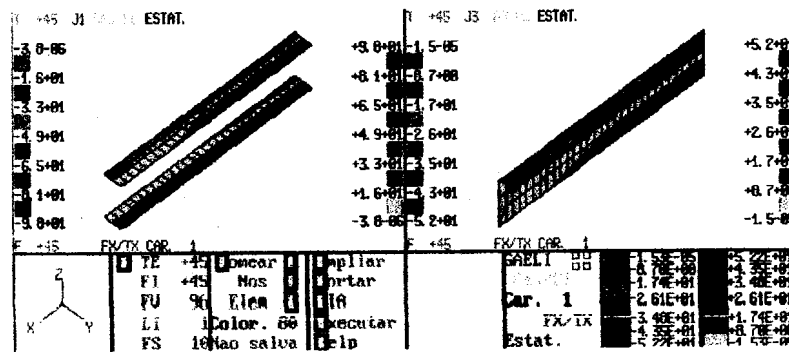


Figura (4) - Comparação dos resultados da malha (a) com a malha (b).

Figura (5) - Distribuição da tensão  $\sigma_x$ .

Pelos gráficos apresentados verifica-se que a utilização de elementos de casca obtém bons resultados na solução de problemas que envolvam empenamento. Os maiores erros ocorrem na região do engaste e na região da carga, o que é o comportamento normal do Método dos Elementos Finitos. O emprego de diferentes tipos de elementos de casca não apresentou grandes vantagens.

### 3.2 EXEMPLO 3

Uma grelha, representada na figura (7) está submetida a um carga concentrada de 2700 N que causa um efeito de torção. As barras que formam a estrutura são construídas com perfil do tipo C 110x50x4 mm.

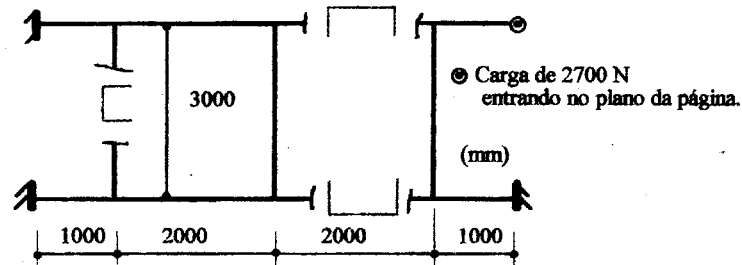


Figura (7) - Estrutura tipo grelha.

Foram utilizadas malhas com razão de aspecto assumindo os valores 2, 4 e 8. As figuras (8) e (9) mostram as malhas empregadas na análise. As malhas (a) e (b) utilizaram 2 elementos na alma do perfil enquanto que nas malhas (c) e (d) empregou-se apenas um elemento na alma do perfil. A tabela (1) apresenta algumas características das malhas empregadas, onde NE é o número de elementos, NN é o número de nós, NGL é o número de graus de liberdade, Banda é a largura de banda do sistema após reordenação, RIT é o espaço de disco ocupado em Mbytes pelo arquivo da matriz de rigidez do sistema, RIG é o espaço de disco ocupado em Mbytes pelo arquivo de rigidez dos elementos,  $\sigma_{\text{max}}$  é a tensão máxima equivalente em  $\text{N/mm}^2$ , Tempo é o tempo necessário para análise completa em um microcomputador 486 DX4-100 com 8 Mbytes de memória. Pela tabela nota-se a importância do aumento da razão de aspecto dos elementos como ferramenta para redução de espaço de disco utilizado e do tempo de análise. Comparando-se os resultados das malhas (a) e (d) verifica-se uma redução de 80% no espaço de disco ocupado, e uma redução de 83% no tempo de análise sem haver um comprometimento na qualidade dos resultados obtidos.

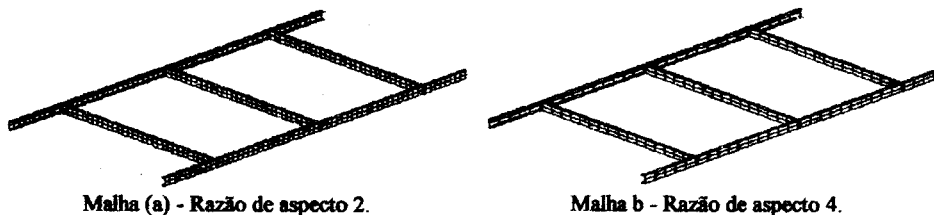


Figura (8) - Malhas utilizadas.

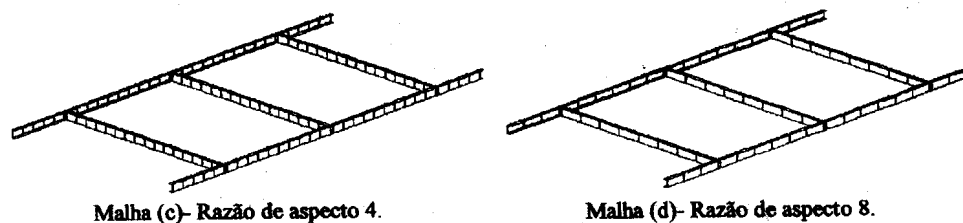


Figura (9) - Malhas empregadas.

Tabela (1) - Características gerais dos arquivos.

Malha	NE	NN	NGL	Banda	RIT	RIG	$\sigma_{eqmax}$	Tempo
a	876	3039	18234	480	42	8.2	580	24 min 42 s
b	468	1611	9666	480	22	4.4	570	13 min 3 s
c	348	1253	7158	366	14.5	3.2	570	7 min 55 s
d	204	725	4350	390	8.2	1.9	560	4 min 17 s

## EXEMPLO 3.3

Uma estrutura espacial, cujo esquema está representado na figura (10), composta por 20 barras de seção C 250x125x10 mm e com comprimento de 2000 mm está submetida a um conjunto de forças que provocam um efeito de torção nesta. As dimensões indicadas na figura são obtidas somando-se os comprimentos das vigas com as respectivas paredes dos perfis que formam as juntas.

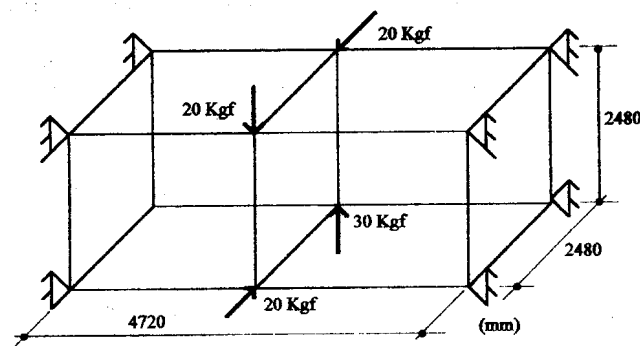
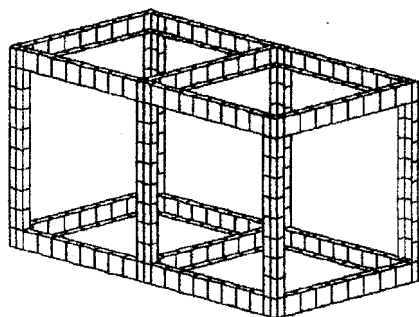


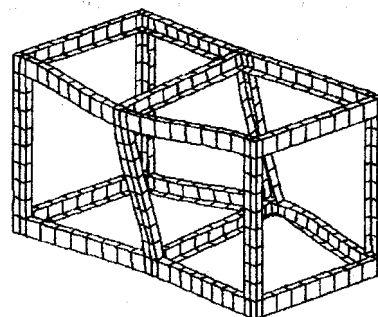
Figura (10) - Esquema da estrutura.

Na análise deste problema foram empregadas malhas com razão de aspecto assumindo os valores 2, 4 e 8 as quais estão apresentadas na figura (11). As características gerais de cada uma das malhas utilizadas estão apresentadas na tabela (2). Neste caso, os resultados obtidos são bons até a malha (b) o que representa uma redução de 43% em espaço de disco e 42% em tempo de análise.

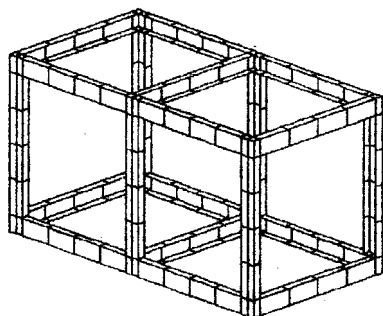




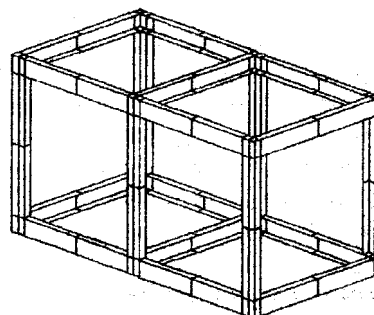
Malha (a) - Razão de aspecto 2.



Deformada da malha (a).



Malha (b) - Razão de aspecto 4.



Malha (c) - Razão de aspecto 8.

Figura (11) - Malhas empregadas na solução do problema.

Tabela (2) - Características das malhas empregadas.

Malha	NE	NN	NGL	Banda	RIT	RIG	Tempo
(a)	612	2112	12672	708	48.2	5.7	31 min 48 s
(b)	348	1160	6960	708	27.1	3.2	18 min 10 s
(c)	216	684	4104	564	13.4	2	8 min 16 s

## CONCLUSÃO

Elementos de Casca Poliédrica foram empregados para analisar problemas que envolvam empenamento provocado por torção. Verifica-se que o emprego destes elementos permite analisar de melhor forma o problema do empenamento. A utilização de elementos finitos com razão de aspecto maior que 1 não exerce muita influência nos resultados obtidos em deslocamentos e nas tensões  $\sigma_x$ . No caso de estruturas de barras tridimensionais a influência do aumento da razão de aspecto é grande. Não se recomenda o emprego de razões de aspecto maiores que 4 para se ter uma distribuição das tensões  $\sigma_x$  razoável. O emprego de elementos com razão de aspecto elevada permite uma razoável redução no tempo de análise e na memória consumida para armazenamento dos dados.

Quanto ao emprego de elementos finitos com razões de aspecto elevada verificou-se que a formulação de placa, neste caso se incluem os elementos DKQ, SC, LC SM1b e SM2b; admite uma razão de aspecto de até 4 considerando-se como critério a não alteração dos valores máximos de tensões equivalentes e a manutenção, de modo aproximado, da forma de distribuição das mesmas. Considerando-se apenas como critério a não alteração dos valores máximos das tensões equivalentes nota-se que a razão de aspecto pode ser elevada até 10 para os casos de flexão, e até a faixa entre 8 e 10 para os casos de torção.

#### REFERÊNCIAS

- [1] VLASOV, V.Z., *Thin-walled Elastic Beams*, 2nd Ed. Washington Department of Commerce, 1961
- [2] KRAHULA, J.L., "Analysis of Bent and Twisted Bars Using Finite Element Method", *AIAA Journal*, vol. 5, No. 6, June, pp. 1194-1197, 1967
- [3] ODEN, J.T. & RIPPERGER, E.A., *Mechanics and Elastic Structures*, 2nd Edition, Hemisphere Publishing Corporation, N.Y.
- [4] YANG, Y.B., "A structural Matrix for Geometric Nonlinear Analysis", *Journal of Structural Engineering*, ASCE 112 (ST4), p. 853-877, 1986
- [5] KANOK, W., Degenerate Elements for Combined Flexural and Torsional Analysis of Thin-walled Structures, *Journal of Structural Engineering*, vol. 114 No. 3, pp 657-674, 1988
- [6] BOÉSSIO, M.L., *Análise de Vigas de Seção Aberta pelo Método de Subestruturação em Múltiplos Níveis*. Dissertação de Mestrado. CPGEC-UFRGS, 1992.
- [7] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., *The Finite Element Method*. Vol. 2, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1991.
- [8] BATOZ, J.L., TAHAR, M.B., Evaluation of a New thin plate quadrilateral element. *Int. Journal Numer. Methods Engineering*, 18, 1655-1678, 1982.
- [9] HINTON, OWEN, *Finite Element Software for Plates and Shells*.
- [10] GROEHS, A.G., SANTOS, M.I.G., *Gaeli - Gerador e Analisador de Estruturas Lineares*. CPGEC-UFRGS, 1990.
- [11] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., *The Finite Element Method*. Vol. 1, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1991.
- [12] SZABÓ, B.A., BABUSKA, I., *Finite Element Analysis*, Wiley&Sons, N.Y., 1989.