



Método de los Elementos Discretos (DEM): Una Alternativa Interesante en el Análisis Numérico de Sistemas Estructurales No Lineales

IGNACIO ITURRIOZ* GRACIELA DOZ† JORGE D. RIERA‡

Resumen: En este trabajo se presentan las bases teóricas del Método de los Elementos Discretos, ilustrando su potencialidad a través de dos ejemplos: simulación de la excitación sísmica y análisis de estructuras laminares de hormigón armado sometidas a cargas de impacto. Se discute también el desempeño de ese método cuando se procesa en computadores con arquitectura vectorial o paralela.

Abstract: The theoretical basis of the Discrete Element Method (DEM) is presented in this paper, showing its potencial through two examples: numerical simulation of seismic excitation and analysis of reinforced concrete structures submitted to impact loads. The performance of the method is also discussed.

1 Introducción

El gran avance alcanzado en el área computacional en los últimos años, en particular en los computadores con procesadores que permiten análisis vectorial y/o procesamiento en paralelo, posibilita que algoritmos hasta hace poco tiempo cuestionados por el elevado tiempo de procesamiento y, en consecuencia, poco competitivos contra métodos clásicos en el área numérica, tengan que ser revistos a la luz de las nuevas características computacionales antes mencionadas. Entre estos algoritmos se puede citar al Método de los Elementos Discretos (DEM). Este método consiste, esencialmente, en discretizar espacialmente un medio continuo mediante módulos regulares de reticulado espacial, en los cuales las barras adoptan una rigidez equivalente al continuo que se desea modelar. Las masas de la estructura se concentran en los nodos. Con este esquema es posible modelar estructuras no homogéneas, pudiendo representar satisfactoriamente procesos no lineales complejos como fractura y problemas de contacto. En este trabajo se presentan las bases teóricas del método y su aplicación en dos áreas en las que fue utilizado con suceso: simulación de la excitación sísmica a partir del deslizamiento de la falla de origen y análisis de estructuras laminares de hormigón armado someti-

*Universidad de Passo Fundo, P. Fundo - Brasil

†Universidad de Brasília, Brasília, Brasil,

‡Universidad Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil

das a cargas de impacto. Finalmente se discute el desempeño de ese método cuando se procesa en computadores con arquitectura vectorial o paralela.

2 Formulación del Método (DEM)

El modelo consiste en la representación del continuo mediante un conjunto de elementos uniaxiales. Este modelo de discretización fue desarrollado y verificado por Hayashi (1982)[1], en relación a su capacidad de representar un medio continuo elástico lineal. La formulación original y las expresiones para los coeficientes elásticos equivalentes provienen de Nayfeh y Hefzy (1978)[2] cuyo interés se da en sentido opuesto, o sea, representar paneles formados por módulos de barras espaciales empleados en la industria aeronáutica, a través de un medio ortotrópico continuo equivalente, el cual posibilita realizar una discretización adecuada con un número menor de grados de libertad. La geometría del módulo cúbico usado está representada en la Fig.(1), junto con algunas construcciones básicas. Cada nodo tiene tres grados de libertad. Las masas son unidas por elementos longitudinales y diagonales de longitud L_c y $\sqrt{3}L_c/2$ respectivamente. Si el medio es isótropo elástico y lineal, y el coeficiente

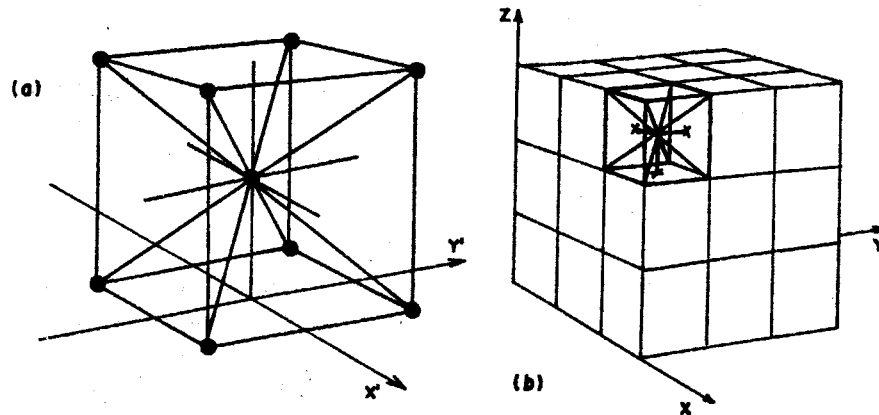


Figura 1: Modelo cúbico presentado por Nayfeh & Hefzy (1978)[2] utilizado en los trabajos de Hayashi (1982)[1] y Rocha (1989)[3], a) Modelo cúbico, b) Composición de un prisma.

de Poisson es $\nu = 0.25$, el área A_n de las barras longitudinales internas es dada por:

$$A_n = L_c \frac{9 + 8n}{18 + 24n} \quad (1)$$

donde $n = 8\nu(4 - 8\nu)$, siendo ν el coeficiente de Poisson. Para los elementos diagonales

$$A_d = \frac{2n}{\sqrt{3}} \frac{9 + 8n}{18 + 24n} L_c \quad (2)$$

En el caso en que ν es diferente de 0.25 la equivalencia entre el modelo sólido y el reticulado no es perfecta y pequeños errores son introducidos en los términos vinculados a los esfuerzos de corte. El análisis en el dominio del tiempo es realizado a través de un método explícito, con integración numérica por diferencias finitas centrales. En cada paso de integración, se resuelve, para cada nodo, una ecuación de equilibrio del tipo:

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} + c \frac{du_i}{dt} = f_i \quad (3)$$

donde:

m : masa nodal

$c = D_j m$,

D_j : constante de amortiguamiento viscoso proporcional a la masa m ,

u_i : componentes de un vector de coordenadas nodales en relación a tres ejes de referencia x_i ,

f_i : componente de la resultante de fuerzas internas (aplicadas por las barras que concurren a un nodo) y externas en la masa m .

El algoritmo de diferencias finitas centrales fue adoptado porque: (a) No introduce defasajes en las frecuencias naturales de vibración ni amortiguamiento numérico y (b) Es el método que presenta el mayor intervalo crítico de integración (Krieg, 1973)[4]. Este intervalo Δt puede ser computado a partir de la expresión $\Delta t \leq 0.6 L_c / C_o$, en la cual C_o denota la velocidad de propagación de las ondas P en el material. Como las coordenadas nodales pueden ser actualizadas en cada paso de integración, esta modalidad de trabajo permite considerar grandes desplazamientos, esto es, no linealidad geométrica.

3 Algunas Aplicaciones del Método de los Elementos Discretos

Simulación Numérica de la Excitación Sísmica a Partir del Deslizamiento de la Falla de Origen

Utilizando el Método de los Elementos Discretos se desarrolla un modelo numérico considerando que los fenómenos sísmicos son procesos de ruptura en grandes volúmenes de roca sometidos a un estado de tensiones que varía lentamente en el tiempo (Doz & Riera, 1995)[5]. Inicialmente fue considerada la hipótesis de que ocurrieran fracturas en el denominado modo de fractura II, esto es, inducidas por esfuerzos de corte. Sin embargo, un examen atento del problema sugiere que, en materiales con las características básicas de la roca cristalina, no existe fractura en modo II. De esta forma, un modelo numérico de la fuente de excitación sísmica debe considerar apenas deslizamiento de uno de los labios de una fractura pre-existente ("falla") en relación al otro, no debiendo ser incluida la posibilidad de propagación de la fractura según un modo de corte. El modelo utilizado en las experiencias numéricas consiste en un bloque homogéneo, prismático, asentado sobre una

superficie plana, sometido a una tensión de compresión resultante del peso propio del bloque y a un deslizamiento horizontal muy lento de un punto del borde lateral. Las relaciones constitutivas de la interface establecen que las tensiones de corte no pueden exceder el producto de las tensiones de compresión y el coeficiente de fricción. Para niveles bajos de las tensiones de corte, las mismas crecen monótonicamente sin desplazamientos relativos de la interface. Eventualmente, en algún punto de la interface, las tensiones de corte superan la resistencia local, dando origen al desplazamiento del punto, que se propaga en el área vecina provocando una caída de tensiones ("evento sísmico"), vinculada a un deslizamiento importante (Fig. 2.a) y fuertes aceleraciones (Fig. 2.b). Asociadas a estos "eventos sísmicos" se verifican oscilaciones de alta frecuencia, perpendiculares al plano de falla, semejantes a las observadas en terremotos (Brune 'et al', 1990)[6]. Si bien el fenómeno de adherencia-deslizamiento podría también reproducirse recurriendo a otros modelos para representar los sólidos en contacto, por ejemplo, elementos finitos, sería difícil encontrar alternativas que compitan con el DEM en flexibilidad para considerar simultáneamente todos los aspectos físicos relevantes del problema, in-homogeneidad, plasticidad, etc.

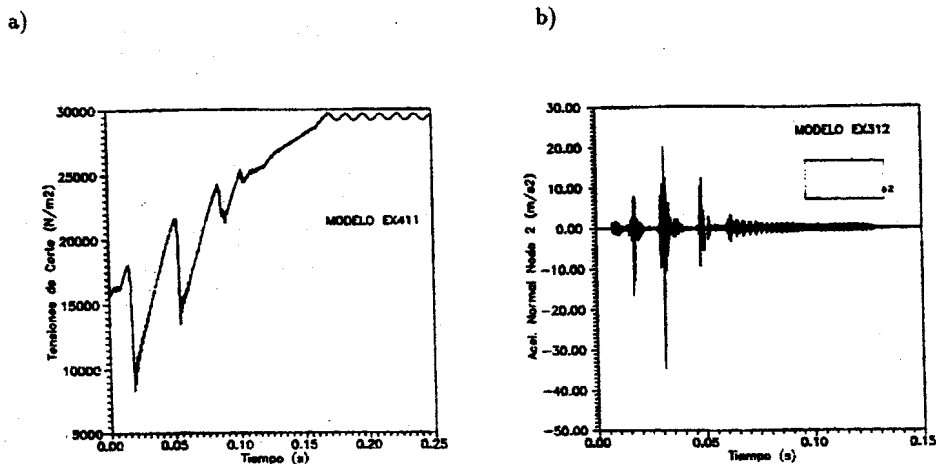


Figura 2: a) Evolución de las tensiones de corte, b) Aceleraciones normales a la interface.

Modelado de Estructuras de Hormigón y Hormigón Armado Sometidas a Cargas de Impacto

La determinación de la respuesta hasta la carga límite de estructuras laminares de hormigón armado sujetas a la acción de cargas impulsivas ha sido intensivamente estudiada en los últimos años. Sin embargo, en la evaluación del comportamiento después que la estructura alcanzó su carga máxima o después de soportar ésta, se obtuvieron resultados teóricos no muy precisos. Esto se debe, principalmente, a que los modelos propuestos no tienen en cuenta las deformaciones residuales y/o la influencia del daño acumulado en las frecuencias naturales de vibración de la estructura ya dañada. Estudios preliminares en conexión con la mecánica de la fractura del hormigón, con el objetivo antes citado, fueron realizados en el LDEC/UFRGS por Riera & Zorn (1982)[7] y Rocha (1989)[3], utilizando en

todos los casos el DEM. El método fue empleado también en el análisis de estructuras de hormigón armado por Rocha, Riera & Krutzik (1991)[8], consiguiendo buenos resultados en la determinación de las deformaciones máximas de la estructuras ensayadas, mas con correlación no satisfactoria después de alcanzar la respuesta máxima (respuesta pos - ruptura). El modelo implementado, presentado por Riera e Iturrioz (1995) [9], considera para el hormigón una ley bilineal inspirada en el modelo propuesto por Hilleborg, que admite un comportamiento elástico lineal del mismo hasta una cierta deformación crítica donde la tensión es máxima, a partir de la cual se produce un 'strain softening' descendiendo la tensión a cero. Para las barras de acero se considera una ley de comportamiento elastoplástico perfecto. La interacción entre acero y hormigón se considera aumentando la ductibilidad de las barras de hormigón próximas a la armadura y también modificando la ley uniaxial de las barras de acero en la rama de descarga. En la Fig. (3) se presenta el layout y las respuestas experimental y teórica en términos de desplazamientos en el centro de una viga biapoyada de hormigón armado ensayada por Brandes (1981)[10]. En las curvas presentadas es posible observar la excelente correlación de los resultados teóricos y experimentales sobre todo en la fase pos - ruptura de la viga. Los resultados obtenidos confirman las ventajas del método cuando aplicado a estructuras con leyes de comportamiento difíciles de evaluar en forma global.

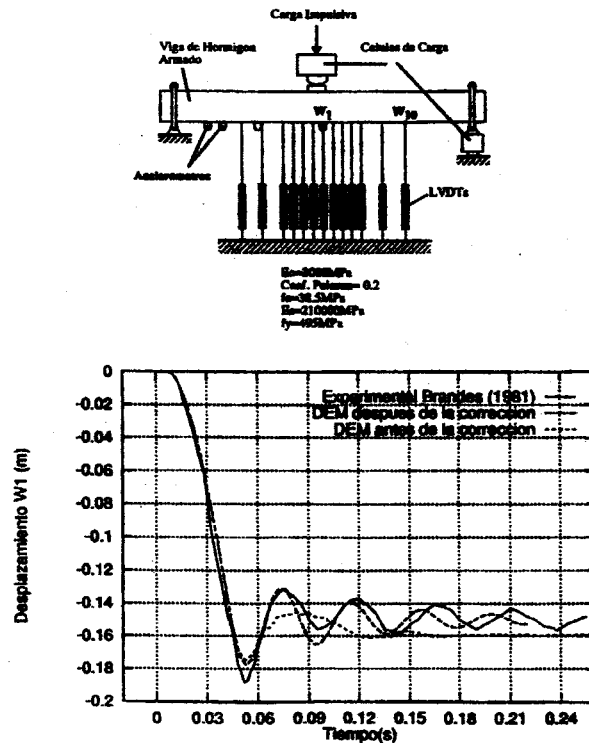


Figura 3: Viga de hormigón armado biapoyada sometida a una carga impulsiva (Brandes, 1981)[10], a) Layout de la viga, b) Comparación de las respuestas teórica y experimental.

4 Aspectos Computacionales del Método

Originalmente la implementación computacional del método de los elementos discretos fue realizada en un computador personal PC. Sin embargo, la necesidad de analizar ejemplos de mayor envergadura obligó a utilizar computadores de mayor porte. Fueron así aprovechados los recursos disponibles en el centro de supercomputación de la Universidad Federal de Rio Grande del Sur (CESUP/UFRGS), siendo que dicho centro cuenta con un supercomputador CRAY YMP-2E y una estación de trabajo multiprocesadora Silicon Graphics (4CPUs R4400). La utilización de estos equipamientos permitió verificar las ventajas del algoritmo computacional del Método de los Elementos Discretos en lo que se refiere a la vectorización y paralelización del mismo.

Vectorización

El concepto de vectorización está ligado a la realización de procesamiento de operaciones en grupos. En términos computacionales, un escalar está asociado a una posición de memoria, y un vector a una serie de posiciones contiguas. En general los lenguajes de programación disponen de instrucciones que permiten manipular vectores. Por ejemplo el producto de dos vectores de dimensión n podría ser expresado en lenguaje FORTRAN, de la siguiente forma:

```
DO 10 I=1, M
10 Z(I)=X(I)*Y(I)
```

Para obtener cada elemento del vector Z , el computador deberá descomponer la operación $Z(i)=X(i)*Y(i)$ en una serie de operaciones básicas de mas bajo nivel (por ejemplo almacenar $X(i)$ en un registrador, cargar $Y(i)$ en otro registrador, realizar el producto entre ambos, etc.). Los registradores son las memorias especiales que el computador utiliza para almacenar temporariamente los datos que están en vías de ser transformados por alguna operación. Si se considera que cada componente del vector Z es un *automóvil terminado* y que cada una de las operaciones básicas mencionadas representa alguna tarea necesaria para confeccionarlo, se podría decir que, en el caso de computadores escalares, se realizan todas las tareas necesarias para terminar de montar un *automóvil* antes de comenzar el armado de otro.

En el caso de computadores con arquitectura vectorial, por el contrario, los *automóviles* entran en una *línea de montaje* de longitud N , que permite ir armando N *automóviles* simultaneamente. De esta forma, los primeros que salgan de la *línea de montaje* demorarán mas tiempo, pero una vez que el sistema entre en *régimen*, la velocidad con que los mismos son terminados será mayor. De aquí que para que la vectorización sea rentable computacionalmente la longitud n de los vectores a ser procesados debe ser mayor que la longitud N de la *línea de montaje*, característica del computador. En la Fig. (4) se esquematiza la forma de trabajo de processadores vectoriales y escalares para el caso de un producto de dos vectores ($Z(i)=X(i)*Y(i)$), ($i=1,2,\dots,n$). Hay ciertas reglas básicas que deben ser cumplidas que las operaciones puedan ser vectorizadas; algunas de las cuales se detallan a continuación:

- Solo será vectorizado el *loop* mas interno

No es posible vectorizar un *loop* donde se realizan tareas que representen dependencia de datos, por ejemplo en la siguiente operación $Z(i)=Z(i-1)+X(i)*Y(i)$, ($i=1,2,\dots,n$), la cual en código FORTRAN se expresaría:

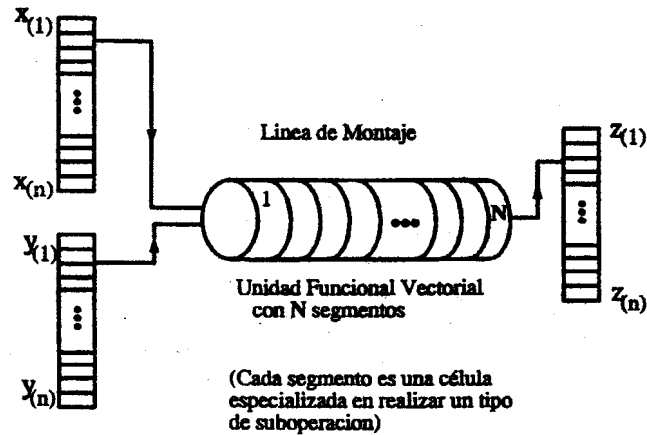


Figura 4: Esquema de un procesamiento vectorial (a) y un procesamiento escalar (b), para el caso de un producto de dos vectores ($Z(i)=X(i)*Y(i)$) ($i=1,2,\dots,n$).

```

D010 I=1 ,N
10  Z(I)=Z(I-1)+X(I)+Y(I)

```

donde el valor de $Z(i)$ de la iteración actual hace referencia a un valor obtenido en una iteración diferente de la actual. Cada valor del vector Z solo estará disponible al final de toda la secuencia de operaciones necesarias para su cálculo.

- La realización de operaciones de entrada y salida dentro de un *loop*, en general, inhibe su vectorización.

Paralelización

Paralelizar un determinado proceso consiste en distribuir, entre las varias CPUs disponibles, tareas que puedan ser realizadas simultáneamente para minimizar el tiempo de espera (problema típico de camino crítico).

También en este análisis, entra en juego el hecho de que gerenciar la utilización de varios procesadores simultáneamente implica tiempo con el intercambio de mensajes (entre las CPUs involucradas) necesarios para la sincronización de los procesos. Para que esta forma de trabajo presente alguna ventaja, el tiempo adicional gastado debe ser inferior a la reducción de tiempo obtenida por medio de la paralelización. Se deduce entonces, que para cada problema específico, hay un número óptimo de procesadores a ser utilizados.

Análisis del algoritmo del Método de los Elementos Discretos (DEM) bajo los conceptos vistos

Para realizar el análisis del algoritmo computacional del (DEM) se presenta en la Fig. (5) un diagrama que indica las principales tareas realizadas por el programa.

```

*COMIENZO
*GENERACION DEL MODELO
*ANALISIS
S-LOOP, T=0, TIEMPO FINAL (LAZO SOBRE EL TIEMPO)
S
S V-LOOP, B=1, No TOTAL DE BARRAS DEL MODELO
S V (LAZO SOBRE LAS BARRAS)
S V-CALCULO DE LA DEFORMACION DE LAS BARRAS B,
S V
S V-CALCULO DE LA FUERZA REACTIVA EN LA BARRA B, (F(B) = Fconst(K(B)))
S V (Fconst() = ECUACION CONSTITUTIVA UNIAXIAL)
S V-CALCULO DE LAS FUERZAS RESULTANTES EN LOS NODOS
S V-FIN DEL LOOP B
S
S V-LOOP N=1, No TOTAL DE NODOS DEL MODELO (LAZO SOBRE LOS NODOS)
S V-INTEGRACION DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO
S V EN FORMA EXPLICITA (METODO DE LAS DIFERENCIAS
S V FINITAS CENTRALES)
S V
S V-FIN DEL LOOP N
S -ALMACENAMIENTO DE RESULTADOS
S -CALCULOS ADICIONALES
S
S -FIN DEL LOOP T
*SALIDA DE RESULTADOS
*FIN

```

Figura 5: Esquema del Algoritmo del DEM

Analizando el algoritmo presentado se pueden realizar las siguientes observaciones:

- El *loop* sobre el tiempo de integración no puede ser vectorizado, una vez que se trata de un *loop* externo.
- Los dos *loops* internos sobre los nodos y el *loop* sobre las barras, según los testes realizados pueden ser vectorizados y también procesados por varias CPUs al mismo tiempo (paralelización) con una ganancia sensible en la velocidad de ejecución del algoritmo.

En la Fig. (6) se presentan las comparaciones de tiempo y velocidad ejecutando un mismo ejemplo en condiciones diferentes. El ejemplo utilizado para realizar las comparaciones de performance fue

el modelo de la viga de Brandes (1981)[10] al que se hizo referencia anteriormente, evaluando el comportamiento de la viga durante un tiempo real de 0.08 segundos utilizando en todos los casos un $\Delta t = 4E - 6\text{seg}$ (24000pasos).

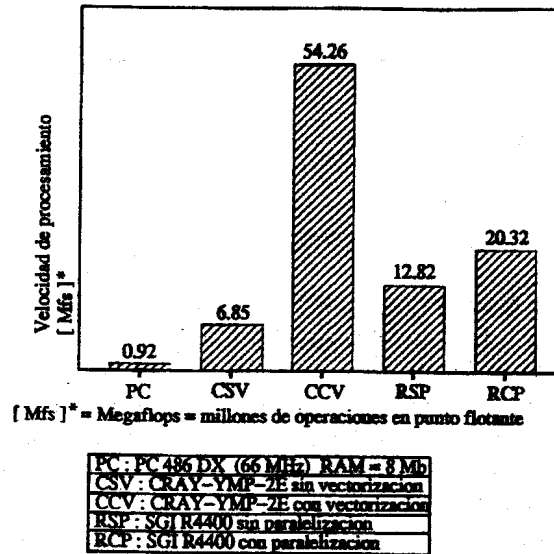


Figura 6: Diagrama comparativo de las velocidades del programa ejecutado en diferentes máquinas con y sin vectorización para el modelo de la viga de Brandes (1981)[11] con un tiempo total de 0.08 seg y un paso de integración de $4E-6\text{seg}$.

5 Conclusiones

En este trabajo se presentan los conceptos básicos del Método de los Elementos Discretos (DEM) ilustrando su potencialidad a través de algunas aplicaciones en ingeniería estructural. Se analizó la performance numérica del algoritmo computacional resultante, teniendo en cuenta sus posibilidades en cuanto a vectorización y paralelización. Del estudio realizado es posible concluir que:

- El programa presenta un mejor desempeño cuando es ejecutado en un computador vectorial CRAY, siendo su velocidad casi 60 veces mayor que cuando ejecutado en un PC(486 66Mtz), y de 4 a 5 veces más rápido que cuando rodando en una Workstation (SG (R4400)) trabajando en forma escalar. Esto permite pronosticar un futuro promisorio para métodos del tipo DEM, en los cuales se analiza un gran número de elementos básicos con una ley de comportamiento muy simple.
- Es posible observar en la Fig. (6) que la relación entre velocidad de procesamiento y la cantidad de procesadores utilizados no es lineal.
- El avance alcanzado en las estructuras de procesadores que permiten análisis vectorial y/o paralelo posibilita que algoritmos que hasta hace poco tiempo eran cuestionados por el elevado

Agradecimientos:

Los autores desean reconocer el soporte financiero parcial del CNPq, CAPES, FINEP. Los cálculos fueron realizados en el Centro de Computación de la Universidad Federal do Rio Grande do Sul.

6 Bibliografía

- [1] HAYASHI, Y. 1982. Sobre um Modelo de Discretização de Estruturas Tridimensionais Aplicado em Dinâmica não Linear. Tese M.Sc., CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [2] NAYFEH, A. H. & HEFZY, M. S. 1978. Continuum Modeling of Three Dimensional Truss-Like Space Structures. *AIAA Journal*, 16(8):(pp779-787).
- [3] ROCHA, M. M. & RIERA, J. D. 1990. On Size Effects and Rupture of Nonhomogeneous Materials. In *Proceedings, Congress on Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics*, Eds. J. G. M. Van Mier, J. G. Rots & A. Bakker, Chapman & Hall/Ed.Fn Spon, London, (pp451-460).
- [4] KRIEG, R. D.: "Unconditional stability in numerical integration methods", *J. of Applied Mechanics*. Transactions ASME. June 1973, 417-421.
- [5] DOZ, G., RIERA, J. 1995. Towards the Numerical Simulation of Seismic Excitation. 13th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, SMIRT 13, Porto Alegre, Brasil.
- [6] BRUNE, J. N., JOHNSON, P. A. & SLATEC, C. : " Nucleation, Predictability and Rupture Mechanism in Foam Rubber Models of Earthquakes", *J. of Himalayan Geology*, Vol. 1, N 2, 1990,155-166.
- [7] RIERA, J. D. & ZORN, N. F., 1982. A Model for the Deformation and Failure Characteristics of Concrete. A progress Report. CT-33/82-UFRGS-Porto Alegre.
- [8] ROCHA, M. M., RIERA, J. D. & KRUTZIK, N. J. 1991. Extension of a Model that Aptly Describes Fracture of Plain Concrete to the Impact Analysis of Reinforced Concrete. 11th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Tecnology, SMIRT 11, Tokio Japón.
- [9] RIERA, J. D. & ITURRIOZ, I. 1995. Discrete Elements Model for Evaluating Impact and Impulsive Response of Reinforced Concrete Plates and Shells. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, to be published, Ed Lewis, R. W. & Carey, G. F., Wiley & Sons, U.K.
- [10] BRANDES, K., LINDERGER, E., HERTER, J. 1981. Kinetische Grenztragfähigkeit von Sto-Bartig belasteten Bauteilen, Technische Bericht RS 121, BAM, Berlin.