



Simulación de Fisuras con una Aproximación Difusa

RESUMEN

Se presenta un método computacional, basado en interpolantes M.C.M. para la simulación de fractura lineal elástica. El método tiene la ventaja de requerir sólo una nube de puntos (nodos) y una adecuada definición del contorno. Se analiza el desempeño de una técnica propuesta por otros autores para tratar superficies libres internas, encontrándose que sobreestima los desplazamientos. Se propone una modificación a las funciones de peso que permite calcular los parámetros de fractura con buena precisión.

SUMMARY

A computational method based on moving least squares interpolants is presented, for simulation of linear elastic crack problems. It only requires a cloud of points (nodes) and a description of the boundary. The performance of a technique developed by other author for dealing with internal free surfaces is analysed. It is shown that it overestimates displacements. A modification of the weigh function is proposed, which allows the calculation of fracture parameters with good precision.

1. INTRODUCCION

En estos últimos años el obtener una alta confiabilidad y una larga vida útil han puesto a prueba la capacidad ingenieril en todas sus ramas. Este aumento en los requerimientos ha impulsado el uso de técnicas computacionales que permitan evaluar la respuesta mecánica de un dado componente. Dentro de este campo el modelado del crecimiento de fracturas permanece como una de las asignaturas pendientes para la mecánica computacional cuando se lo ve desde un contexto general. Al día de hoy, no hay disponibles métodos que puedan modelar el crecimiento arbitrario de una fractura en una amplia variedad de situaciones, las cuales son requeridas en análisis ingenieril: citemos, en materiales no lineales, materiales anisotrópicos, laminas, y problemas con fuerzas de volumen y térmicas.

En la década pasada, dos tendencias han sido adoptadas para resolver problemas de fractura:

- El método de los Elementos Finitos (M.E.F.)

- El método de los Elementos de Contorno (M.E.C.)

Cada uno de estos métodos tiene sustanciales desventajas que limitan su aplicación en los diversos campos de la ingeniería.

La mayor desventaja del esquema de elementos finitos esta en que la generación de redes adecuadas involucra un considerable esfuerzo de ingeniería y puede resultar en sustanciales errores. Esto es especialmente notorio cuando se quiere modelar crecimiento de fisuras en 3D y es necesario usar remallado. Por esta razón la mayoría

de los métodos desarrollados para ello involucran un análisis interactivo donde los ingenieros guían el remallado después de cada paso.

El método de los elementos de contorno evita gran parte del trabajo de generación de redes asociado con (M.E.C.), ya que sólo es necesario mallar la superficie de la fisura. Sin embargo debido a que el M.E.C. requiere de una función de Green como solución fundamental de las ecuaciones diferenciales, su campo de aplicación a problemas ingenieriles está bastante limitado. La gran mayoría de las soluciones fundamentales necesarias para M.E.C. han sido desarrolladas para materiales elásticos en dos y tres dimensiones. Aún bajo estas condiciones, la presencia de fracturas provocan sustanciales dificultades y técnicas, tales como subdivisión de dominios y métodos hipersingulares tienen que ser aplicados para resolverlas. A pesar de los progresos realizados sobre las funciones de Green para problemas bidimensionales en materiales anisotrópicos, la situación continúa siendo compleja y la extensión a problemas como placas con no linealidades geométricas resulta extremadamente difícil. Además de todas estas dificultades, el sistema de ecuaciones resultante de la aplicación del método de los elementos de contorno genera matrices llenas y estas tienden a estar mal condicionadas para problemas grandes.

En trabajos recientes, Belytschko, Lu, Gu [1] y Lu, Belytschko y Gu [2], se presentó un nuevo método para la solución de problemas elásticos en geometrías arbitrarias, el método de Galerkin sin elementos o

método difuso de Galerkin. Desde el punto de vista del modelado, la característica esencial de este método es que sólo requiere una descripción de la geometría y un conjunto de nodos interiores para construir las ecuaciones diferenciales. Consecuentemente es simple modelar problemas tales como fracturas, ya que al igual que en el M.E.C. sólo requiere una representación de los bordes de la fractura. Además de esto, la arbitrariedad con la que los nodos interiores pueden ser colocados en el dominio permite colocar arreglos densos de puntos alrededor del vértice de la fisura. En los trabajos mencionados se calculan factores de intensidad de tensiones empleando este método y se logran excelentes resultados.

La idea esencial del método de difuso es el uso de Interpolantes Mínimos Cuadrados Móviles (I.M.C.M.). Dichos interpolantes fueron primeramente descriptos en una forma limitada por Shepard [3], y una más completa forma pueden encontrarse en Lancaster y Salkauskas [4]. Estos interpolantes fueron descubiertos independientemente por Nayroles, Zouzot y Villon [5] quienes fueron los primeros en aplicarlos a una formulación de Galerkin. Estos últimos autores bautizaron sus desarrollos como elementos difusos y los aplicaron a la resolución de problemas de transferencia de calor.

Siguiendo lineamientos similares Belytschko, Lu y Gu [4,5] aplicaron interpolantes mínimos cuadrados móviles a problemas de elasticidad bidimensional. Su formulación tiene diferencias importantes respecto de la de Nayroles et.al. [5], emplea un arreglo regular de celdas que se extiende más allá de los límites del cuerpo, utiliza altos órdenes de cuadratura de Gauss para obtener las ecuaciones discretas y al usa multiplicadores de Lagrange para forzar las condiciones de contorno de Dirichlet. Con esta implementación se logran muy buenas velocidades de convergencias, no existe bloqueo por incompresibilidad o tensiones de corte, no es necesario realizar posprocesado de las deformaciones o tensiones ya que estas son suaves por la misma formulación y pueden obtenerse valores precisos para los concertadores de tensión en fisuras modeladas empleando la simetría de las mismas.

Si bien el empleo de multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones de contorno provee de gran precisión, el sistema de ecuaciones lineales resulta demasiado grande. Debido a esto, posteriormente, un trabajo de estos mismos autores conduce a una formulación variacional modificada en la cual se reemplazan los multiplicadores de Lagrange por su equivalente físico, la tensión. Este principio conduce a un sistema de ecuaciones banda y es usado por nosotros para nuestros trabajos.

En el presente trabajo se discute un nuevo enfoque para las funciones de peso conducente a

resolver ciertos problemas generados al modelar fracturas sin emplear condiciones de simetría.

Al intentar reproducir los trabajos de Belytschko et.al. encontramos que el valor de los factores de intensidad de tensiones no era el correcto si queríamos modelar la fisura sin emplear condiciones de simetría. Esto nos llevo a plantear el problema de singularidad que se produce cuando las funciones de forma son cortadas al llegar el vértice de la fisura.

Este trabajo se organiza como sigue: La sección 2. realiza una breve introducción a la formulación variacional empleada, la sección 3. presenta los interpolantes mínimos cuadrados móviles, La sección 4. describe la implementación numérica empleada, La sección 5. presenta los resultados numéricos obtenidos y finalmente la sección 6. presenta las conclusiones.

2. FORMULACION VARIACIONAL.

En el método de elementos finitos, los coeficientes u_i de la aproximación

$$u^h(x) = \sum N_i(x) u_i$$

coinciden con valores nodales de la incógnita. Por ello las condiciones de contorno de Dirichlet no requieren ser impuestas por el principio variacional utilizado. Basta con eliminar los valores conocidos (datos de Dirichlet) del sistema final de ecuaciones lineales, lo que puede lograrse con diversos artificios. Sin embargo, si se utilizan aproximaciones más generales, los coeficientes no representan valores del campo incógnita en posiciones fijas del espacio. En este caso las condiciones esenciales deberán ser impuestas por el principio variacional. Un modo de lograrlo es agregar esas condiciones mediante un multiplicador de Lagrange. Sin embargo eso tiene el inconveniente de agregar incógnitas adicionales, y conduce a sistemas de ecuaciones no simétricos.

Es posible derivar una formulación débil general, que impone explícitamente las condiciones de Dirichlet reemplazándolas por su equivalente físico, las tracciones. Una explicación más extensa puede encontrarse en [5]:

$$\int_{\Omega} \sigma : \nabla \delta u \, dv - \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot \delta s - \int_{\Gamma_u} \bar{t} \cdot \delta s - \int_{\Gamma_u} \delta t \cdot (\underline{u} - \bar{u}) = 0 \quad (1)$$

Antes de pasar a una formulación discreta, es interesante observar que la (1) puede escribirse una identidad integral que expresa la ecuación de elasticidad con las condiciones de contorno apropiadas, en forma de residuos ponderados, y que podría tomarse como punto de partida para obtener (1):

$$-\int_{\Omega} \text{div} \sigma \cdot \delta u \, dv + \int_{\Gamma_t} (\bar{t} - \bar{t}) \cdot \delta u \, ds - \int_{\Gamma_u} (\underline{u} - \bar{u}) \cdot \delta t \, ds = 0 \quad (2)$$

3. FORMULACION DISCRETA.

Para obtener un sistema discreto de ecuaciones algebraicas, es conveniente primero reescribir la (1) utilizando la notación habitual en mecánica computacional.

Sea :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \underline{u} \quad \text{donde } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \underline{\varepsilon} \quad \text{donde } \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \mathbf{N} \underline{\sigma} \quad \text{donde } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

Siendo $\hat{n} = (n_x, n_y)$ el versor normal exterior.

Con esta notación la (1) se escribe:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^t \cdot \mathbf{D} \underline{\varepsilon} \cdot dV - \int_{\Gamma_f} \underline{t} \cdot \delta \underline{u} \cdot ds - \int_{\Gamma_u} \underline{\varepsilon}^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \delta \underline{u} \cdot ds - \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\varepsilon}^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot (\underline{u} - \bar{u}) \cdot ds \quad (3)$$

Proponiendo una aproximación de la forma

$$\underline{u} = \sum \varphi_i \cdot \underline{u}_i \quad \underline{u}_i = \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{pmatrix}$$

y llamando, como es habitual

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{L} \cdot \varphi_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

se tiene finalmente:

$$\sum_i^N \delta \underline{u}_i^t \left\{ \sum_j^N \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_j \cdot dV - \int_{\Gamma_u} \varphi_i \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_j \cdot ds - \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \varphi_j \cdot ds - \int_{\Gamma_f} \varphi_i \cdot \underline{t} \cdot ds; + \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \bar{u} \cdot ds \right\} = (\quad) \quad (4)$$

que es el sistema de ecuaciones algebraicas buscado. Es evidente, por simple inspección, que la matriz del sistema es simétrica cualquiera sea la base elegida. Asimismo esta matriz será banda si los φ_i tienen soporte local y están juiciosamente ordenados.

Tratamiento De Las Condiciones De Contorno Esenciales.

La ecuación (4) sólo es estrictamente correcta si se imponen ambas componentes del desplazamiento en la frontera de Dirichlet. Lo más frecuente es, sin embargo, que sólo una componente (normal o tangente) esté impuesta en un punto dado. Para ello definiendo los versores normal y tangente como :

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \end{pmatrix}$$

El vector desplazamiento se puede descomponer como:

$$\underline{u} = (\underline{u} \cdot \hat{n}) \hat{n} + (\underline{u} \cdot \hat{b}) \hat{b}$$

que puede escribirse como:

$$\underline{u} = S_n \cdot \underline{u} + S_b \cdot \underline{u}$$

donde

$$S_n = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x \cdot n_y \\ n_x \cdot n_y & n_y^2 \end{pmatrix} \quad S_b = \begin{pmatrix} n_x^2 & -n_x \cdot n_y \\ -n_x \cdot n_y & n_y^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Entonces, el desplazamiento impuesto puede representarse como:

$$\bar{u} = u_n \cdot \hat{n} + u_b \cdot \hat{b}$$

Y las integrales sobre la frontera de Dirichlet quedan:

$$S = \begin{cases} S_n & \text{si } \bar{u} \text{ es normal} \\ S_b & \text{si } \bar{u} \text{ es tangente} \end{cases}$$

Evidentemente, si \underline{u} tiene tanto componente normal como tangente, se tiene:

$$S = S_n + S_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (6)$$

Con esta definición, las contribuciones de las dos integrales sobre a la matriz K, para un par de nodos i, j dados puede escribirse:

$$\mathbf{K}_{ij}^{\Gamma_u} = - \int_{\Gamma_u} \varphi_i \cdot \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_j \cdot ds - \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{S} \cdot \varphi_j \cdot ds \quad (7)$$

Y la contribución correspondiente al vector de carga será:

$$f_i^{\Gamma_u} = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot (u_n \cdot \hat{n} + u_b \cdot \hat{b}) \cdot ds \quad (8)$$

Mínimos Cuadrados Móviles.

Para obtener buenas aproximaciones, a un costo computacional razonable es preciso construir bases que satisfagan algún criterio de optimalidad es decir, óptimo ajuste para un número dado de puntos. Un método especialmente promisorio y que satisface ese criterio es el llamado "mínimos cuadrados móviles" (Moving least squares), o también mínimos cuadrados ponderados. El método es descrito con amplitud en [3] y con total profundidad en [4], aquí solo se brinda una somera descripción.

En el ajuste por mínimos cuadrados ordinario se buscan los coeficientes de una aproximación polinómica.

Con el objeto de obtener aproximaciones locales, mas versátiles, es conveniente minimizar una norma ponderada, del tipo:

$$J(u) = \sum_i W_i(x, y) \cdot [u(x_i, y_i) - f_i]^2 \quad (9)$$

De este modo, el valor de u en el punto (x, y) será más fuertemente influido por los datos cercanos al punto, si los pesos se eligen adecuadamente como funciones decrecientes con la distancia. Derivando (9) respecto de los coeficientes a se obtienen las "ecuaciones normales"

$$A(x) \cdot \underline{a}(x) = B(x) \cdot \underline{u} \quad (10)$$

donde:

$$A(x) = \sum W_i(x) \cdot P_i(x) \cdot P_i^t(x_i) \quad (11a)$$

$$B(x) = [W_1(x) \cdot P_1(x), W_2(x) \cdot P_2(x), \dots, W_N(x) \cdot P_N(x)] \quad (12b)$$

$$\underline{u}^t = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (13c)$$

De donde se obtiene:

$$u^h(x) = P^t(x) \cdot \underline{a}(x) = P^t(x) \cdot A^{-1}(x) \cdot B(x) \cdot \underline{u} = \sum \phi_i(x) \cdot u_i \quad (14)$$

Cuando la matriz A no es bien condicionada, la ecuación (10) no puede resolverse con la precisión deseada. Es por lo tanto adecuado buscar un base ortogonal que permita que la matriz A sea diagonal. Con estas consideraciones se obtiene ahora una nueva base igual a la descripta en [4,5], que cumple este requisito:

$$q_k(x, \bar{x}) = p_k(x) \cdot \sum_j^{k-1} \alpha_{kj}(\bar{x}) \cdot q_j(x, \bar{x}), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

Siendo:

$$\alpha_{kj}(\bar{x}) = \frac{\sum_i W_i(\bar{x}) \cdot p_k(x_i) \cdot q_j(x_i, \bar{x})}{\sum_i W_i(\bar{x}) \cdot q_j^2(x_i, \bar{x})} \quad (16)$$

En (15) y (16) \bar{x} representa el punto en donde es evaluado el polinomio. La matriz A es ahora diagonal y la (10) lleva a:

$$a_j(\bar{x}) = \frac{\sum_i W_i(\bar{x}) \cdot q_j(x_i, \bar{x}) \cdot u_i}{b_j} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

Donde

$$b_j = \sum_i W_i(\bar{x}) \cdot q_j^2(x_i, \bar{x}) \quad (18)$$

La aproximación resulta entonces:

$$u^h(x) = \sum_i \phi_i(x) \cdot u_i \quad (19)$$

Con lo cual las funciones de forma quedan definidas por:

$$\phi_i(x) = w_i(x); \quad \sum_j C_{ji}(x) \quad (20)$$

$$C_{ji}(x) = \frac{q_j(x, \bar{x}) \cdot q_j(x_i, \bar{x})}{b_j(\bar{x})} \quad (21)$$

Función de peso

Siguiendo las recomendaciones de Lancaster y Salkauskas [4], nosotros adoptamos para los pesos $W_i(x-x_i)$ en (19), funciones exponenciales cuadráticas decrecientes con soporte local de modo que se anulan más allá de cierto radio crítico.

$$W_i = \frac{e^{-(d_i/C)} - e^{-(d_{mi}/C)2k}}{(1 - e^{-(d_{mi}/C)2k})} \quad \text{Si } d_i \leq d_{mi}$$

$$W_i = 0 \quad \text{Si } d_i > d_{mi} \quad (22)$$

con

$$d_i = \|x - x_i\|$$

Donde C es una constante que controla el peso relativo y d_{mi} es el dominio de soporte para la función de peso $W_i(x)$. Este dominio donde la función de peso no es nula suele llamarse dominio de influencia del nodo x_i . Fue demostrado por Lancaster y Salkauskas [3] que la función definida por (22) tiene derivadas de cualquier orden respecto de x e y si k es un entero positivo. De esta forma la función de peso, que es esencialmente una distribución de Gauss truncada a d_{mi} , se comporta bastante mejor que las funciones de peso conicas descriptas anteriormente. Por contrapartida los resultados de la aproximación son más sensibles al valor de d_{mi} .

Se puede notar que la definición de C es más o menos arbitraria. Nosotros empleamos,

$$C = \alpha \cdot C_i \quad (23)$$

donde

$$C_i = \max \|x_j - x_i\| \quad (24)$$

En base a los trabajos de Belyschko et.al. nosotros empleamos $1 \leq \alpha \leq 2$ para redes regulares, con α cercano 1 para problemas con singularidades y altos gradientes. Este esquema no es muy satisfactorio para redes irregulares, donde la atenuación debe elegirse de modo que el disco de radio C_i , en cada nodo, englobe nodos en todas direcciones. Sin embargo el esquema anterior, donde las funciones de peso tienen simetría circular, puede generalizarse a funciones no simétricas que sean más largas en la dirección con mayor espaciamiento nodal.

4. IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL

En una primer etapa el programe fue implementado siguiendo los lineamientos generales expuestos por Belyschko et.al.[4,5] e incluyendo las siguientes características particulares:

- ✓ Los contornos del cuerpo fueron definidos por medio de *Elementos de Contorno*. Se emplearon elementos cuadráticos de tres nodos, lo que facilita la aproximación de bordes curvos.
- ✓ Para evaluar la contribución de los elementos de contorno se empleo cuadratura de Gauss de ocho puntos. Nótese que a diferencia del método de elementos de contorno (M.E.C.), no hay aquí singularidades. De modo que el uso de integración de tan alto orden sólo obedece al propósito de disminuir el número de elementos necesarios.
- ✓ Para establecer las condiciones de contorno se mapea cada elemento de contorno en un *elemento Master* paralelo al eje y . Se aplican sobre el mismo los desplazamientos y las tensiones, tanto normales como tangenciales. Finalmente se mapea el resultado a la posición final mediante rotaciones y traslaciones.
- ✓ Para el cálculo de las integrales de volumen se divide al dominio en elementos de integración de cuadratura variable según el número de nodos contenidos en ella.
- ✓ Al evaluar la función de forma, W_i en cada punto, se tiene en cuenta si el segmento $(x - x_i)$ atraviesa la frontera del recinto de cálculo. En ese caso la contribución correspondiente, se elimina.
- ✓ Los factores que definen la función de peso (C y d_{out}) fueron definidos localmente como una fracción de la máxima distancia entre los nodos vecinos.

5. RESULTADOS NUMERICOS

5.1. Simulación de fracturas

La figura 1. muestra esquemáticamente un espécimen SEN para ensayos fractomecánicos. Un espécimen de este tipo con $a/w = 0.5$ fue modelado empleando condiciones de simetría. La red resultante (figura 1.a) constó de un arreglo regular de 180 nodos con una densificación de 25 nodos cerca del vértice de la fisura. Para la integración se emplearon 16 elementos de integración con cuadratura de 9×9 puntos de Gauss.

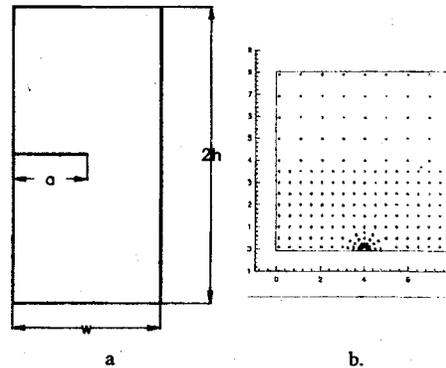


Figura 1.

El factor de intensidad de tensiones, K_I , puede calcularse a partir de los desplazamientos nodales en los labios de fisura usando la fórmula descrita por Tada et.al[6]:

$$k_{Iz} = v \cdot G \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot \frac{1}{2(1-\nu)} \quad \text{para } \theta = \pi \quad (25)$$

donde :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Aquí, v es el desplazamiento normal a la fractura de un labio de fisura respecto de la línea media, y la distancia r se mide a partir del vértice de fisura. En la figura 2. se muestra la variación de K_I calculado con el presente modelo en función de r , así como la solución analítica según Tada et.al. [6].

Se observa que la solución numérica predice el valor correcto con un error relativo del 7.35 %. El valor numérico varía suavemente con la distancia excepto en puntos muy cercanos al vértice. Esto es esperable dado que la solución numérica no contiene la singularidad característica de problemas de fractura lineal elástica. Sin embargo, para la simulación de propagación de fisuras con modos de carga complejos, no puede

utilizarse en general simetrías como la anterior, requiriéndose modelar todo el espécimen de fractura.

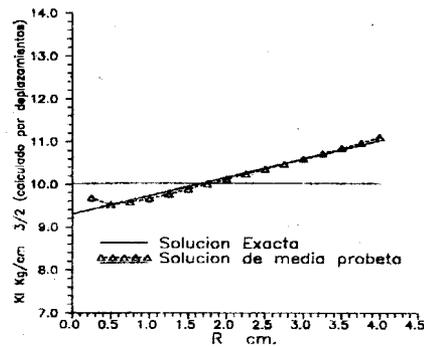


Figura 2.

Los trabajos de Lu y Belytschko et. al. [4,5] sugieren que para tal caso basta con truncar el radio de influencia de los nodos, de modo que estos no "vean" a través de la superficie de fractura, como se esquematiza en la figura 4. Sin embargo, al modelar la probeta completa, con igual densidad de nodos que en ejemplo anterior, la predicción numérica de K_I resulta sustancialmente superior al valor exacto, con error relativo mayor del 15%.

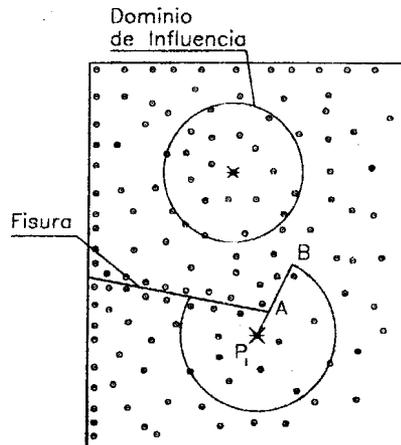


Figura 4

El ejemplo anterior indica que el simple truncamiento de las funciones de peso no es adecuado. En efecto, a lo largo de las líneas de corte, como la AB de la figura 4., las funciones de forma son discontinuas. Por ende sus derivadas primeras (matrices B_i) se tornan singulares, originando una contribución debida a saltos a la matriz de rigidez, fórmula (7). Esto requeriría incorporar la contribución de saltos a la matriz de rigidez tras la evaluación de las integrales de volumen. Alternativamente, si las funciones de peso decrecen suavemente a cero en las inmediaciones de la línea de corte, la contribución debida a saltos se elimina. Para ello basta con redefinir cada función de peso como:

$$W_i(x,y) \rightarrow W_i(x,y) \cdot f(x,y) \quad (26)$$

donde

$$f = \begin{cases} \frac{(1-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha_0)} \cdot (1-\varepsilon) + \varepsilon & \text{si } \alpha < \alpha_0 \\ 1 & \text{si } \alpha \geq \alpha_0 \end{cases} \quad (27)$$

El parámetro ε viene dado por:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right) & \text{si } r < r_0 \\ 0 & \text{si } r \geq r_0 \end{cases} \quad (28)$$

Este esquema se ilustra en la figura 5.

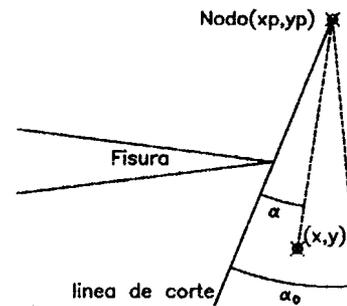


Figura 5.

donde r va del nodo al punto (x,y) y r_0 va del nodo al vértice de fisura.

La función del parámetro ε es permitir que la función $(f(x,y))$ de caída linealmente desde 1, en el nodo, hasta cero en el vértice de fractura. La función de peso así redefinida tiene derivadas continuas, y su evaluación sólo requiere pequeñas modificaciones de las rutinas correspondientes.

Con este esquema se simuló nuevamente la probeta completa, usando distintos ángulos. Los resultados se muestran en la figura 6.

Aún para un pequeño ángulo ($\alpha = 5^\circ$) se produce una sensible mejoría en los resultados. El valor óptimo, con la discretización y cuadratura utilizadas, resulta ser de 10° . El bajo valor de K_I predicho con ángulos elevados ($\alpha = 15^\circ$) podría deberse a que el tamaño aparente de fisura resulta inferior al real, aunque esto requiere mayor análisis.

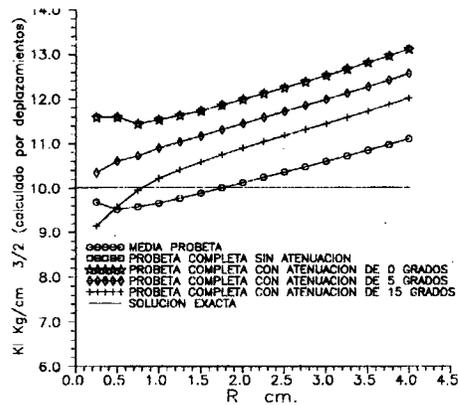


Figura 6.

6. CONCLUSIONES:

El uso de un método *sin malla* basado en interpolantes mínimos cuadrados móviles facilita considerablemente la confección de modelos computacionales. Los resultados indican que es posible simular problemas de fractura empleando muchos menos nodos que con elementos finitos, aunque el tiempo de cálculo resulta de todos modos superior.

El método es altamente sensible a los parámetros que definen el peso de las funciones de forma en cada nodo (C, d_m) si estos son elegidos incorrectamente los resultados son desastrosos.

Se observa que si el número de nodos es insuficiente, el objeto en cuestión se ablanda, dando como resultado desplazamientos excesivos. Para la simulación de fractura, el uso de MCM es similar al de el método dual de elementos de contorno. Sin embargo, el primero ofrece la ventaja adicional de prestarse naturalmente para modelar no-linealidades, tales como plasticidad y además no requiere definir dos superficies enfrentadas para simular la fractura, bastando con una sola superficie libre interna.

Finalmente se destaca que para simular fracturas con

M.C.M. basta con evitar que los nodos "vean" a través de la fisura. Siempre y cuando se asegure la continuidad de las funciones de peso.

REFERENCIAS :

- 1- Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., "Element free Galerkin methods", *Int. J. Num. Methods Engrg.*, 37, pp. 229-256, 1994.
- 2- Lu, Y.Y., Belytschko, T. and Gu L., "A new implementation of the element free Galerkin method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 113(2), pp. 397-414, (1994).
- 3- Shepard D., "A two dimensional interpolation function for irregularly spaced points", *Proc. A.C.M. Natl. Conf.* (1968).
- 4- Lancaster, P., Salkauskas, K., "Curve and Fitting", *Academic Press*, (1986) 225-245.
- 5- Nayroles, B., Touzot, G., Villon, "generalizing the finite element method: Diffuse Approximation and Diffuse elements", *Computational Mechanics*, 10 (1992), 307-318.
- 6- Tada, P. Paris, G. Irwin, "Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation (1973)
- 7- Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C., "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", *Elsevier Applied Sciences*, London, (1992).
- 8- O.C. Zienkiewicz, "Finite Element Method", McGraw Hill (1983).

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial operations. This section also highlights the role of internal controls in preventing fraud and errors.

2. The second part of the document focuses on the implementation of robust risk management strategies. It outlines various risk assessment techniques and provides guidance on how to identify, measure, and mitigate potential risks. The text stresses the need for a proactive approach to risk management to protect the organization's assets and reputation.

3. The third part of the document addresses the importance of effective communication and reporting. It discusses the need for clear and concise communication channels and the role of regular reporting in keeping stakeholders informed. This section also touches upon the importance of maintaining accurate financial statements and the role of external auditors in verifying the accuracy of these reports.

4. The fourth part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial operations. This section also highlights the role of internal controls in preventing fraud and errors.

5. The fifth part of the document focuses on the implementation of robust risk management strategies. It outlines various risk assessment techniques and provides guidance on how to identify, measure, and mitigate potential risks. The text stresses the need for a proactive approach to risk management to protect the organization's assets and reputation.

6. The sixth part of the document addresses the importance of effective communication and reporting. It discusses the need for clear and concise communication channels and the role of regular reporting in keeping stakeholders informed. This section also touches upon the importance of maintaining accurate financial statements and the role of external auditors in verifying the accuracy of these reports.

7. The seventh part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial operations. This section also highlights the role of internal controls in preventing fraud and errors.

8. The eighth part of the document focuses on the implementation of robust risk management strategies. It outlines various risk assessment techniques and provides guidance on how to identify, measure, and mitigate potential risks. The text stresses the need for a proactive approach to risk management to protect the organization's assets and reputation.

9. The ninth part of the document addresses the importance of effective communication and reporting. It discusses the need for clear and concise communication channels and the role of regular reporting in keeping stakeholders informed. This section also touches upon the importance of maintaining accurate financial statements and the role of external auditors in verifying the accuracy of these reports.

10. The tenth part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial operations. This section also highlights the role of internal controls in preventing fraud and errors.