



Algoritmo numérico para modelar el daño acoplado a grandes deformaciones plásticas

Alfredo Huespe * , Alberto Cardona †
INTEC - Güemes 3450 - 3000 Santa Fe - Argentina

y
Néstor Zouain ‡
GOPPE (UFRJ), Ilha do Fundão - Rio de Janeiro - Brasil

Resumen

Presentamos un modelo de daño isotrópico, local y continuo [1] acoplado a la deformación plástica producida en procesos mecánicos de grandes deformaciones.

Hacemos referencia al modelo cinemático adoptado para describir las grandes deformaciones y al elemento finito escogido para la discretización espacial (de deformaciones asumidas Q1E4 según [2]).

Con el algoritmo desarrollado en base a este modelo, analizamos el problema de inestabilidad que surge al traccionar una barra en estado plano de deformación. También presentamos otro problema de deformaciones no homogéneas, donde se observa el mismo efecto de localización de deformaciones plásticas.

Abstract

We present a continuum damage model based on a local isotropic damage variable [1]. Damage is coupled to the plastic deformation. The problem is placed into the large elasto-plastic deformation context.

Emphasis is given to the kinematic and constitutive model, and to the finite element we have chosen for the spatial discretization (Q1E4 [2]).

With this model we analyze the instability problem associated to a stretched band in plane deformation. We also present a problem of non-homogeneous deformations where the localization effects are observed.

1 Introducción

En la modelización de problemas que involucran deformaciones elasto-plásticas independientes del tiempo, particularmente en la teoría J_2 que utilizamos a continuación, surgen dificultades numéricas cuando en la etapa de deformación plástica algún fenómeno físico (térmico, microestructural, etc.) produce el ablandamiento por deformación del material. El modelo que presentamos introduce este efecto que es causado por el daño.

*Profesional del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

†Profesor, Universidad Nacional del Litoral, Argentina, e Investigador del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

‡Profesor, Programa de Eng. Mecánica, COPPE, Universidad Federal de Rio de Janeiro - Brasil.

Por un lado se detecta, en ciertos problemas, una pérdida de unicidad en la solución. Como solución alternativa a una deformación plástica difusa con variaciones suaves en el gradiente de deformación, surgen bandas de deformación intensa que resultan en gradientes de deformación discontinuos. Se observa que los elementos finitos isoparamétricos u otros de tipo mixto que son clasificados como de desplazamientos generalizados, muestran un comportamiento excesivamente rígido, no apto para modelar tales discontinuidades. Así un primer problema consiste en obtener un elemento finito adecuado.

Por otro lado, el mismo efecto de localización plástica trae como consecuencia una dependencia de la solución de post-bifurcación con el grado de refinamiento de la malla de elementos finitos. Estrictamente el problema resulta mal colocado. Varias soluciones se han propuesto en los últimos años para modificar este defecto. Por ejemplo introduciendo algún tipo de limitador en las deformaciones. De todos modos no es nuestro interés en el presente trabajo introducirnos en el análisis de esta cuestión.

A pesar que ambos problemas se presentan también con la suposición cinemática de las pequeñas deformaciones, en este trabajo hemos colocado el problema en el contexto más general de las grandes deformaciones. Presentamos los resultados numéricos en el caso particular de estados planos de deformación.

En la próxima sección resaltamos los aspectos principales del tratamiento cinemático y de la ley constitutiva que hemos utilizado. La linealización de la ecuación de equilibrio para este modelo, presentada en Huespe et al. [3], determina al tensor constitutivo. El mismo resulta fundamental para obtener el criterio de bifurcación constitutiva descrito en la subsección 3.1. Este criterio determina también el modo y el vector normal de la posible superficie de discontinuidad. En nuestro caso lo utilizamos para clarificar el proceso de localización en el problema de deformaciones no homogéneas. Finalmente presentamos dos aplicaciones numéricas. En ambas se observa el efecto de localización de deformaciones plásticas.

2 Ecuaciones Constitutivas del material con Daño

En un contexto termodinámico, el comportamiento constitutivo del material es determinado por la función energía libre ψ . Si además existe un proceso irreversible descrito por la introducción de variables internas, se deben agregar las condiciones que definen la evolución de las mismas.

La variable cinemática básica que hemos adoptado para la descripción mecánica es el gradiente de deformación \mathbf{F} desde la configuración de referencia (que por simplicidad se asume como natural) a la final. Para describir el proceso elasto-plástico utilizamos una descomposición multiplicativa del mismo ($\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$). La parte elástica (\mathbf{F}_e) determina al tensor de Finger \mathbf{b}^e , cuyo logaritmo es una de las variables de estado en la definición de ψ (ver Cuadro 1). Denominamos λ_α^e , ($\alpha = 1, 2, 3$) a los estiramientos principales de la deformación elástica (valores propios de $\sqrt{\mathbf{b}^e}$) y $\varepsilon_\alpha^e = \ln \lambda_\alpha^e$. También es definido el tensor $\varepsilon^e = \ln(\sqrt{\mathbf{b}^e}) = \varepsilon_\alpha^e (\mathbf{m}^\alpha \otimes \mathbf{m}^\alpha)$ con \mathbf{m}^α vectores propios de \mathbf{b}^e ; y $\tilde{\varepsilon}^e$ la parte desviadora de ε^e . El determinante de \mathbf{F}_e es $J^e = \lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e$ siendo $\tilde{\lambda}_\alpha^e = (J^e)^{-1/3} \lambda_\alpha^e$.

El modelo constitutivo elástico derivado de esta función corresponde a un material de Ogden (μ y κ parámetros del material). El mismo resulta conveniente en los esquemas numéricos en los que se desea efectuar un desacople entre los efectos volumétricos y los de distorsión, tal como fue presentado en Simo et al. [4]. De todos modos en este trabajo nos orientamos a una formulación de elementos finitos que no explota esta característica.

El endurecimiento plástico isotrópico con saturación, y el daño también isotrópico y continuo, están descritos por las variables internas de estado ρ y β , ambas escalares. Las constantes de material H , v , c , σ_p y S_0 también actúan como parámetros en la determinación del estado termodinámico.

En el Cuadro 2 se presentan las ecuaciones de estado derivadas de este modelo, donde τ , $\tilde{\tau}$ y τ_m son los tensores de tensiones de Kirchhoff, su parte desviadora y media respectivamente, y R , B las variables conjugadas de ρ y β .

3.1 Condición de Bifurcación

Para caracterizar el posible estado de bifurcación constitutiva que está asociado a este material, seguimos las ideas fundamentales de Rice [6].

Asumiendo un estado de deformación homogéneo, para un cuerpo homogéneo, sea $\dot{\mathbf{F}}^\circ$ la velocidad del gradiente de deformación impuesto y $\dot{\mathbf{P}}^\circ$ la velocidad del tensor de tensiones (Piola-Kirchhoff no simétrico) compatible constitutivamente con $\dot{\mathbf{F}}^\circ$ y en equilibrio. Entonces el par $(\dot{\mathbf{P}}^\circ, \dot{\mathbf{F}}^\circ)$ resulta una solución al problema elasto-plástico propuesto.

Proponiendo la existencia de una solución alternativa $(\dot{\mathbf{P}}, \dot{\mathbf{F}})$ con $\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}^\circ + \delta\dot{\mathbf{F}}$; $\delta\dot{\mathbf{F}} = \zeta(\mathbf{g} \otimes \mathbf{N})$ característica de las discontinuidades de orden dos, en donde \mathbf{N} es el vector normal a la superficie de discontinuidad asumida en la descripción material, \mathbf{g} es el vector que describe el modo de la discontinuidad y ζ un factor que denota la amplitud de la misma. En ese caso $\dot{\mathbf{P}}$ debe ser compatible constitutivamente con $\dot{\mathbf{F}}$ y verificar el equilibrio de fuerzas, que en particular requiere

$$(\dot{\mathbf{P}} - \dot{\mathbf{P}}^\circ) \mathbf{N} = \delta\dot{\mathbf{P}} \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Si se aplica el mismo como constitutivo para $\dot{\mathbf{P}}$ y $\dot{\mathbf{P}}^\circ$, la ecuación (5) es equivalente a

$$\delta\dot{\mathbf{P}} \mathbf{N} = (\mathbf{L}_{ep} \delta\dot{\mathbf{F}}) \mathbf{N} = (\mathbf{L}_{ep} (\mathbf{g} \otimes \mathbf{N})) \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (6)$$

donde hemos llamado \mathbf{L}_{ep} al tensor constitutivo del material que relaciona las velocidades del par conjugado \mathbf{P} y \mathbf{F} . En componentes resulta

$$(L_{ep}^{ijkl} N_j N_l) G_k = 0. \quad (7)$$

La ecuación (7) impone una condición necesaria bajo la cual es posible obtener soluciones alternativas, de la forma propuesta para $\delta\dot{\mathbf{F}}$. También muestra que \mathbf{g} es un autovector del tensor (de localización) de segundo orden

$$Q^{ik} = (L_{ep}^{ijkl} N_j N_l) \quad (8)$$

Aplicamos este criterio a nuestra formulación, observando que

$$\dot{\mathbf{P}} = (\mathbf{F}\mathbf{S}) = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{S} + (\mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T)\mathbf{F}^{-T} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{S} + (\mathcal{A}_{ep}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^{sym})\mathbf{F}^{-T}, \quad (9)$$

y asumiendo que $\delta\dot{\mathbf{F}} = \zeta(\mathbf{g} \otimes \mathbf{N})$, con la normal a la superficie de discontinuidad definida en la configuración actual ($\mathbf{n} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}$); se evalúa la condición (6) en la configuración al tiempo t como configuración de referencia ($\mathbf{F} \equiv \mathbf{I}$; $\mathbf{S} \equiv \boldsymbol{\tau}$) resultando

$$\delta\dot{\mathbf{P}} \mathbf{N} = (\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}) \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} + (\mathcal{A}_{ep}(\mathbf{g} \otimes \mathbf{n})^{sym}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Por lo tanto en nuestra formulación, el tensor de localización en componentes y referido a la configuración espacial resulta

$$q^{ik} = n_j (A_{ep}^{ijkl} + \tau^{jl} \delta^{ik}) n_l. \quad (11)$$

4 Elemento finito de deformaciones asumidas

Para efectuar la aproximación espacial; utilizamos un elemento finito de deformaciones asumidas, específicamente el denominado Q1E4 por Simo et al. [2]. Nuestra implementación es idéntica a la de esa referencia, por lo tanto sólo resaltamos los aspectos salientes que hemos obtenido con las experiencias numéricas realizadas.

Como fue remarcado por [2], este elemento muestra un buen comportamiento para modelar el fenómeno de localización, motivo por el cual nosotros lo escogimos. No obstante hemos observado en algunos ejemplos, soluciones extrañas debido a modos de deformación espúreos que tienden a ser

siendo $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}$ el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff simétrico, \mathbf{u} el campo de desplazamientos y V_0 el espacio vectorial material de los desplazamientos cinemáticamente admisibles; mientras que \mathbf{g}^0 y \mathbf{h}^0 son las fuerzas de volumen y superficie referidas a esa configuración.

La linealización de \mathcal{E}_0 es obtenida evaluando $\delta\mathcal{E}_0 = \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{E}_0(\mathbf{S} + \epsilon\delta\mathbf{S}, \mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})|_{\epsilon=0}$ y transformando posteriormente a la configuración final (B_t). Resulta así

$$\delta\mathcal{E}_0 = \int_{B_t} [\mathbf{F}\delta\mathbf{S}\mathbf{F}^T \cdot \nabla_x \boldsymbol{\eta} + (\nabla_x \delta\mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla_x \boldsymbol{\eta}] \frac{dv}{J} \quad (3)$$

Introduciendo la linealización de las ecuaciones constitutivas para relacionar los incrementos de $\delta\mathbf{S}$ con los de $\delta\mathbf{u}$, el primer término de (3) se puede escribir

$$\mathbf{F}\delta\mathbf{S}\mathbf{F}^T = \mathcal{A}_{ep}(\nabla_x^{sym} \delta\mathbf{u}) = \mathcal{A}_{ep} \nabla_x^{sym} \delta\mathbf{u}. \quad (4)$$

El operador lineal $\mathcal{A}_{ep}(\cdot)$ fue presentado en Huespe et al. [3]. A partir del mismo, el tensor asociado \mathbf{A}_{ep} se obtiene en forma directa.

Remarcamos que el tensor \mathbf{A}_{ep} posee simetrías menores $A_{ep}^{ijkl} = A_{ep}^{jikl} = A_{ep}^{ijlk}$, pero $A_{ep}^{ijkl} \neq A_{ep}^{klij}$.

Cuadro 2: Ecuaciones Constitutivas.

$$\boldsymbol{\tau} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \tau_m \mathbf{1}$$

• Ecuaciones de estado

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu(1-\beta)\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \quad \tau_m = \kappa(1-\beta)\ln J^e,$$

$$R = \nabla_\rho \psi = (1-\beta)(H\rho + v[1 - \exp(-c\rho)] + \sigma_\gamma),$$

$$B = \nabla_\beta \psi = -\psi^0,$$

• Ecuaciones de evolución

$$d_p = \dot{\gamma} \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \phi = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|},$$

$$\dot{\rho} = -\dot{\gamma} \nabla_R \phi = \dot{\gamma},$$

$$\dot{\beta} = -\dot{\gamma} \nabla_B \phi = -\dot{\gamma} \frac{B}{S_0},$$

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \phi \leq 0; \quad \dot{\gamma} \phi = 0.$$

Cuadro 1: Modelo de Material con Daño.

• Energía Libre:

$$\psi(\mathbf{b}_e, \rho, \beta) = (1 - \beta)\psi^0(\mathbf{b}_e, \rho),$$

$$\psi^0(\mathbf{b}_e, \rho) = \psi^e(\mathbf{b}_e) + \psi^h(\rho) = \mathcal{U}(J^e) + \tilde{w}(\bar{\lambda}_\alpha^e) + \psi^h(\rho)$$

$$\mathcal{U}(J^e) = \frac{1}{2}\kappa(\ln J^e)^2 = \frac{1}{2}\kappa\left(\sum_{\alpha=1}^3 \ln \lambda_\alpha^e\right)^2 = \frac{1}{2}\kappa(\boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \mathbf{1})^2$$

$$\tilde{w}(\bar{\lambda}_\alpha^e) = \mu \sum_{\alpha=1}^3 (\ln \bar{\lambda}_\alpha^e)^2 = \mu \sum_{\alpha=1}^3 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^e \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^e = \mu \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\|^2$$

$$\psi^h(\rho) = \frac{1}{2}H\rho^2 + v\left(\rho + \frac{1}{c}\exp(-c\rho)\right) + \sigma_v\rho.$$

• Función de fluencia:

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, R, B; \mathbf{b}_e, \rho) = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\bar{\boldsymbol{\tau}}\| - R + \frac{1}{2S_0}\{B^2 - (\psi^0(\mathbf{b}_e, \rho))^2\}$$

Las velocidades de evolución de ρ y β son definidas por la función de fluencia ϕ , asumiendo el principio de máxima disipación generalizado para ambas variables. Como se observa de las ecuaciones de evolución en el Cuadro 2, ρ resulta la deformación plástica equivalente. Resaltamos que la velocidad de crecimiento del daño β ($0 \leq \beta \leq 1$) es función de la tensión media a través de la energía de deformación volumétrica. Lemaitre [1] observa la importancia de esta dependencia que, por otro lado, provoca una pérdida de simetría en el tensor constitutivo del material. También resaltamos el efecto del parámetro S_0 sobre $\dot{\beta}$. Si $S_0 \rightarrow \infty$ el efecto del daño tiende a anularse, resultando así un material que verifica la teoría J_2 de la elasto-plasticidad clásica. La variable \mathbf{d}_p , velocidad de deformación plástica, es definida por

$$\mathbf{d}_p = (\mathbf{F}_e(\dot{\mathbf{F}}_p\mathbf{F}_p^{-1})^{sym}\mathbf{F}_e^{-1})^{sym} \quad (1)$$

Este modelo de daño no corresponde estrictamente al presentado en Lemaitre [1], sino que fue tomado de Chimisso et al. [5] y adaptado por nosotros al contexto de las grandes deformaciones.

3 Ecuación de equilibrio y linealización del sistema de ecuaciones

La ecuación variacional de equilibrio en la configuración de referencia (\mathcal{B}_0) es

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{S}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{FS} \cdot \nabla_X \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{g}^0 \cdot \boldsymbol{\eta} dV - \int_{\Gamma_h} \mathbf{h}^0 \cdot \boldsymbol{\eta} dA = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_0, \quad (2)$$

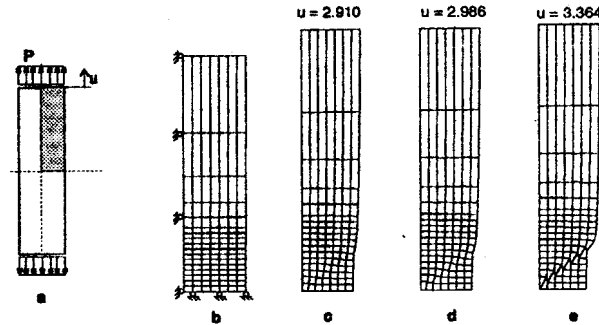


Figura 1. Barra sometida a deformaciones planas. a: Modelo geométrico; b: Malla de elementos finitos; c-e: deformadas

dominantes cuando están sometidos a grandes estiramientos. Algunos autores han analizado esta deficiencia (ver por ejemplo [7]). Aunque se han propuesto soluciones alternativas, como aumentar el número de puntos de integración o adoptar diferentes configuraciones para interpolar los modos de deformación mejorados; nosotros no hemos ensayado ninguna de estas posibilidades.

Con relación a la implementación, remarcamos que debimos efectuar algunas modificaciones en el esquema de Newton con búsqueda lineal que hemos usado para resolver el equilibrio, debido a los g.d.l. asociados a las deformaciones mejoradas. Por otro lado, no fue necesario realizar cambios substanciales en el algoritmo de solución de la ecuación constitutiva.

5 Aplicaciones numéricas

5.1 Localización en un problema de deformación homogénea

Analizamos primeramente la respuesta de una barra con imposición de desplazamientos uniformes en ambos extremos (figura 1:a). Debido al estado homogéneo de deformación, el estado de bifurcación constitutiva es alcanzado por todos los puntos del cuerpo en el mismo instante. También las condiciones de contorno permiten la formación de una banda de deslizamiento que coincide con el valor numérico obtenido utilizando el criterio de bifurcación de la sección anterior.

Este problema es analizado por muchos autores. Nosotros en particular comparamos nuestros resultados con los de Simo et al. [2], por lo cual adoptamos las dimensiones geométricas (53.334 por 12.826) y datos de material de ese trabajo, siendo $\kappa = 164.21$, $\mu = 80.1938$, $\sigma_r = 0.45$, $\nu = 0.265$, $c = 16.93$. Inclusive adoptamos la misma perturbación geométrica para forzar la formación de la banda de localización. Consiste en un variación lineal del ancho de la barra desde el valor mostrado, en el extremo superior hasta el 98.2% del mismo en la línea media.

Esta perturbación juega un factor muy importante cuando se usa un esquema de Newton para avanzar en la solución de equilibrio. En efecto, se observa una pérdida de robustez extremadamente significativa en el momento que se inicia la formación de la banda de localización, que tiende a ser más severo cuando la perturbación es pequeña. El punto de bifurcación se determina exactamente evaluando la anulación del determinante del tensor de localización para algún n .

Modelamos 1/4 del problema con la malla de la figura 1:b. En la figura 2:a mostramos las curvas carga-desplazamiento para tres materiales diferentes. La curva con $H = -1.2924$, $S_0 \rightarrow \infty$ se compara muy aproximadamente con la de [2] a pesar que no son equivalentes ambos modelos constitutivos. Mostramos otras dos soluciones con daño, para $S_0 = 0.8$ y $S_0 = 0.4$, ambas sin endurecimiento ($H = 0$).

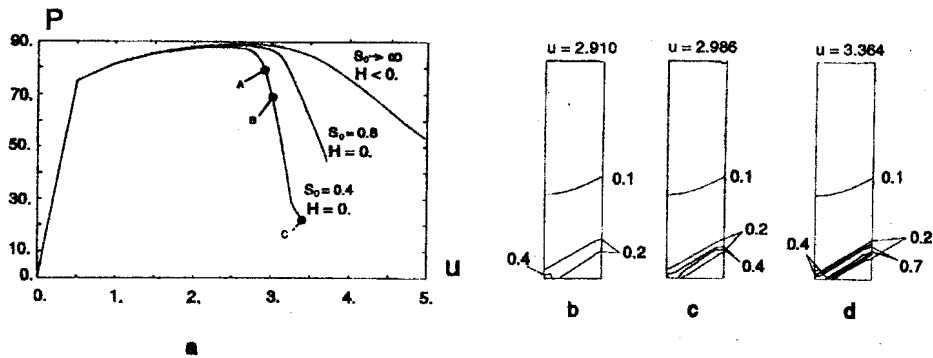


Figura 2. Barra sometida a deformaciones planas. a: curvas carga-desplazamientos; b-c: isocurvas de deformación plástica equivalente

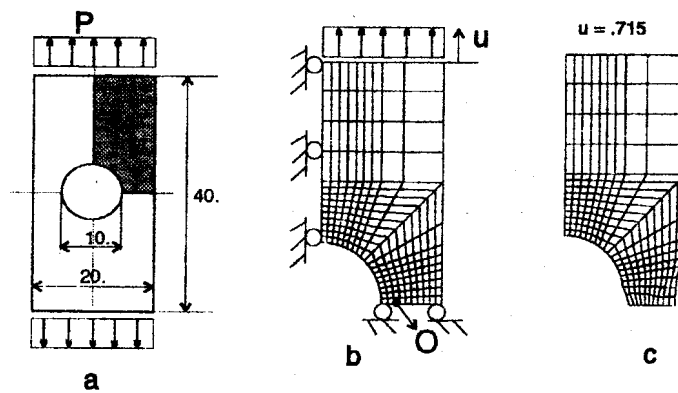


Figura 3. Barra con agujero. a: modelo geométrico; b: Malla de elementos finitos; c: deformada

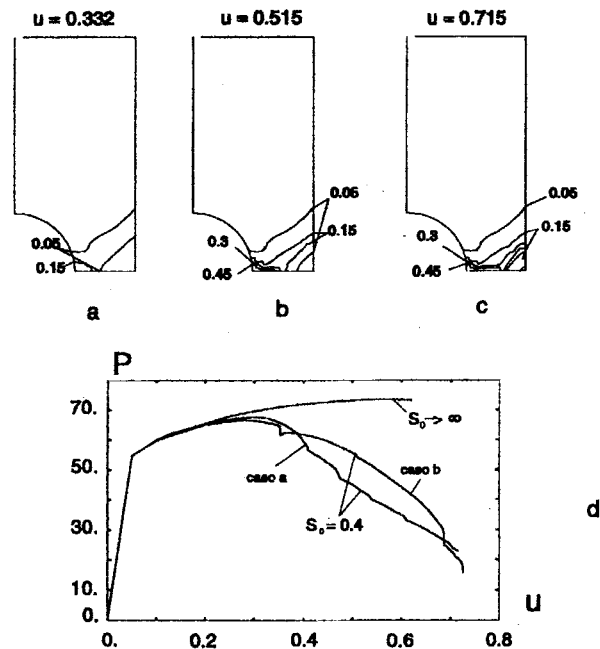


Figura 4. Barra con agujero. a-c: isocurvas de deformación plástica equivalente; d: curvas carga-desplazamiento

En las figuras 1:c-e presentamos las deformadas obtenidas con $S_0 = 0.4$, en tres etapas diferentes del análisis (puntos A, B y C de la fig.2:a). Para las mismas etapas, en las figuras 2:b-d, mostramos las isocurvas de deformación plástica equivalente. Se observa claramente cómo se produce el proceso de localización plástica.

5.2 Localización en una barra con agujero

En la figura 3:a mostramos una barra sometida a desplazamientos uniformes en sus partes superior e inferior. Efectuamos el análisis de este problema con los mismos datos de material que el caso anterior. En la figura 4:d mostramos las curvas carga-desplazamiento de la sección superior de la barra para el caso de plasticidad sin y con daño ($S_0 \rightarrow \infty$, $S_0 = 0.1$ caso a), en todos los casos $H = 0$.

En este problema la distribución no uniforme de las deformaciones provoca que las condición de bifurcación constitutiva se produzca en diferentes zonas del cuerpo a diferentes etapas del proceso. Por lo tanto no se detecta aquí la pérdida de robustez en el esquema iterativo para resolver la ecuación de equilibrio, apuntada en el caso anterior.

No obstante es posible observar en la figura 4:a-c, que un efecto de localización se produce en un modo no detectable en la etapa de deformación plástica difusa.

En la figura 3:b-c, mostramos la malla de elementos finitos que utilizamos para el modelo y la deformada que obtuvimos. En el punto O de la figura 3:b realizamos un análisis del tensor de localización ($S_0 = 0.1$) a medida que avanza el proceso de deformación. Los resultados son mostrados en la figura 5. El proceso de deformación plástica difusa comienza con desplazamientos de la parte superior de 0.3 aproximadamente y para el valor 0.45 se alcanza un daño 1 para el punto O en cuestión. En ese intervalo trazamos las curvas mostradas del determinante del tensor de localización

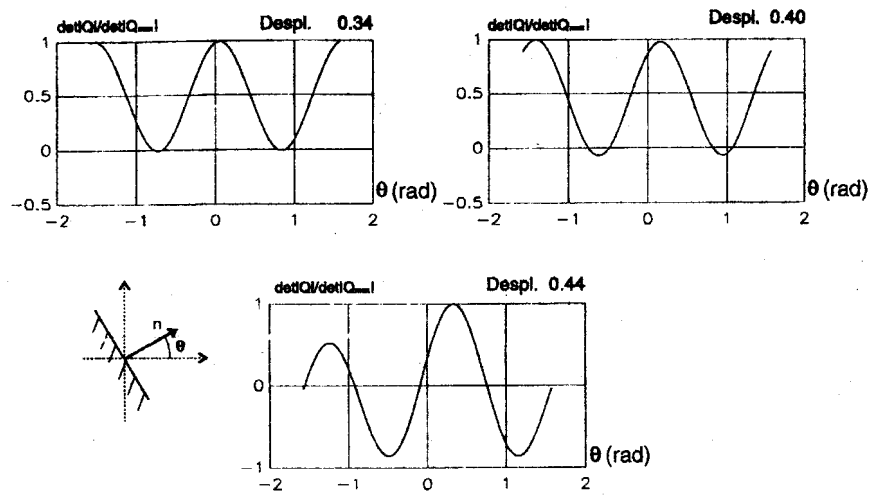


Figura 5. Barra con agujero. a-c: determinante del tensor acústico para varias posiciones del vector normal

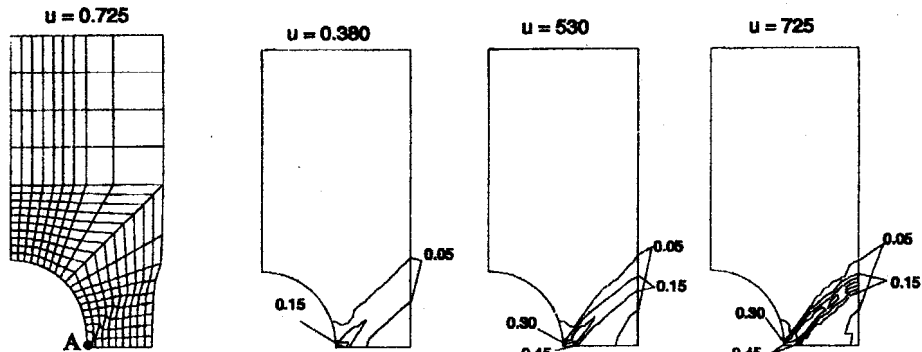


Figura 6. Barra con agujero. a: deformada (desplazamiento del punto A restringido) b-d: isocurvas de deformación plástica equivalente

como función de n . Claramente observamos la variación de n en diferentes etapas del proceso. Resaltamos que próximo al daño total, se determina una posible superficie de discontinuidad para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que coincide con el modo de localización observado.

Finalmente en la figura 6 mostramos los resultados obtenidos cuando además se restringe el movimiento horizontal del punto A (caso b de la figura 4). Se observa el cambio experimentado por el modo de localización producido en este caso y cómo este elemento, al igual que en el primer problema, consigue captar la variación del campo de desplazamientos.

6 Conclusiones

El objetivo fundamental de este trabajo fue presentar resultados obtenidos con un modelo de daño acoplado a plasticidad. Ciertos aspectos relativos al algoritmo para resolver la ecuación constitutiva o la de equilibrio fueron presentados en otro trabajo [3], por lo cual no se volvieron a mencionar. Enfatizamos en cambio las dificultades a ser tenidas en cuenta para obtener resultados correctos especialmente cuando se observa el efecto de localización de las deformaciones.

Remarcamos la descripción del tensor de localización para este modelo y el análisis de las condiciones de criticidad que eventualmente pueden dar lugar a la formación de bandas de intensa deformación. En particular la determinación del vector normal a la superficie de discontinuidad como también el modo de localización podrían ser elementos útiles para establecer una perturbación adecuada en la matriz de rigidez global. Esto provocaría un deseable robustecimiento del esquema de Newton en puntos cercanos a los de bifurcación.

Si bien no hemos trabajado sobre el efecto de la dependencia del camino de post-bifurcación con el tamaño de la malla, este problema es de primordial importancia. Por lo cual es motivo de nuestro futuro desarrollo en esta área.

Agradecimientos

El primer autor agradece a los organismos CNPq y CAPES de Brasil que le brindaron ayuda económica durante gran parte del desarrollo del presente trabajo.

Referencias

- [1] Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. of Eng. Materials and Tech.*, 107:83-89, 1985.
- [2] J.C Simo and F. Armero. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 33:1413-1449, 1992.
- [3] Huespe A.E. and Zouain N. Grandes deformaciones elasto-plásticas con daño: aspectos sobre la solución numérica del problema. In Godoy L.A., Idelsohn S.R., and Laura P.A.A. and Mook D.T., editors, *Proc. PACAM IV, Bs. As., Enero 1995.*, pages 112-117.
- [4] J.C Simo and R.L. Taylor. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 85:273-310, 1991.
- [5] Chimisso F.E.G and Costa Mattos H. Um modelo de dano com amolecimento para barras elastoplásticas. In , editor, *Proc. XII Cong. Bras. Eng. Mec., Brasilia. Dic. 1993*, page .
- [6] Rice J.R. The localization of plastic deformation. In Koiter W.T., editor, *Theoretical and Appl. Mech.*, pages 207-220, North-Holland, 1976.
- [7] Souza Neto E.A., Peric D., Huang G.C., and Owen D.R.J. Remarks on the stability of enhanced strain elements in finite elasticity and elastoplasticity. In Owen D.R.J, Oñate E., and Hinton E., editors, *Computational Plasticity*, pages 361-372, Pineridge Press, 1994.