



UN SIMPLE MODELO UNIDIMENSIONAL DE JUNTA SINOVIAL CON EXUDACION

Carlos M. Corvalán, José Di Paolo

Grupo de Biomecánica Computacional, Facultad de Ingeniería, UNER
Casilla de Correo 57 Suc. 3, 3100 Paraná, Argentina

Fernando A. Saita

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC)-UNL-CONICET
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se formula un simple modelo no lineal de junta sinovial que permite capturar las principales características de deformación del cartilago articular y de la exudación del líquido sinovial provocada por esta deformación. El modelo es resuelto numéricamente y las predicciones son obtenidas en términos de dos parámetros adimensionales que pueden ser interpretados como una medida de la deformabilidad del cartilago y de su porosidad superficial. Los resultados muestran que, para valores típicos de estos parámetros, la exudación juega un rol importante en la forma adoptada por la película lubricante que separa las superficies articulares. Estimaciones teóricas de las predicciones son también discutidas.

ABSTRACT

A simple nonlinear model of a synovial joint that capture the main features of the cartilage deformations and the synovial liquid exudation is presented. The model is solved numerically and the predictions obtained depend on two dimensionless parameters that account for cartilage deformability and cartilage surface porosity. The results show, for typical values of these parameters, that the shape of the lubricating film that keeps the solid surface apart, strongly depends on the liquid exudation. Theoretical estimations of the predictions are also discussed.

1. INTRODUCCION

El propósito de las articulaciones o juntas sinoviales es el de permitir el movimiento relativo entre los huesos que componen el esqueleto de los vertebrados. Las juntas sinoviales son particularmente efectivas para este cometido transmitiendo cargas altas a bajas velocidades de operación, con un mínimo de resistencia por fricción.

En la Fig. 1a se muestra una representación esquemática de las principales características de una junta sinovial. El extremo de los huesos que componen la articulación está cubierto por una superficie delgada, porosa y altamente deformable de tejido conectivo denso conocido como cartilago articular. La cavidad formada entre las superficies articulares está llena con una pequeña cantidad de fluido (~ 0.2 ml en la rodilla humana) llamado líquido sinovial. El fluido sinovial

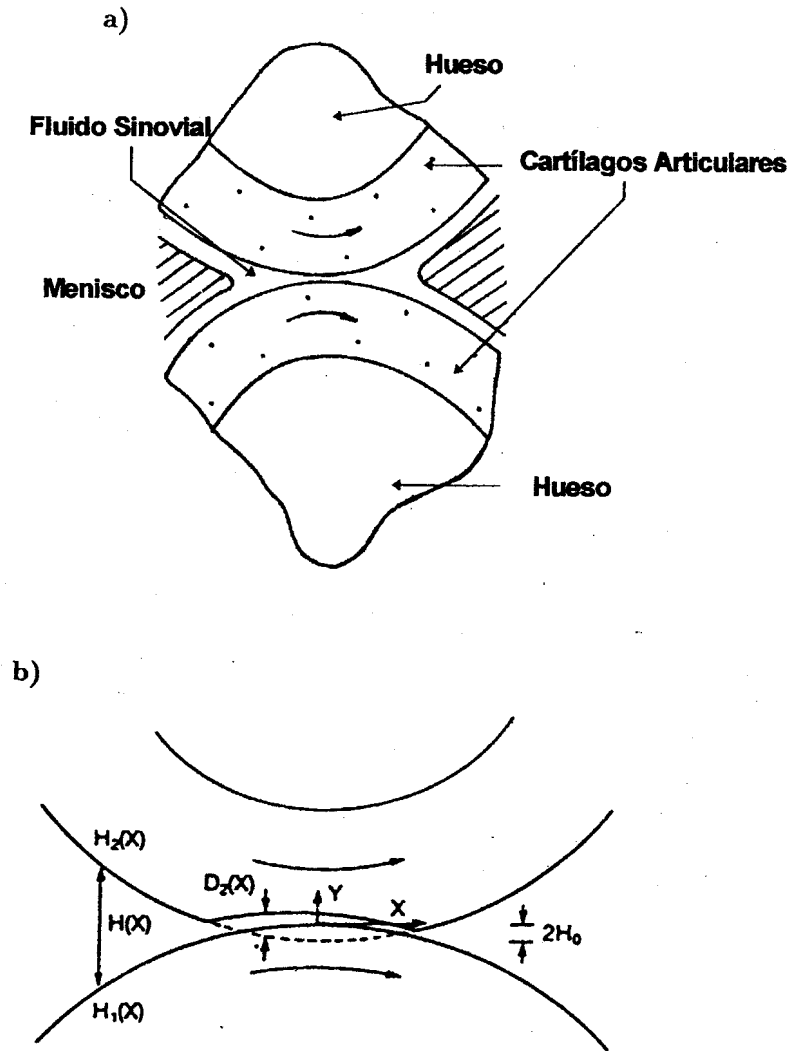


Figura 1: a) Representación esquemática de una junta sinovial. b) Definición de la geometría y variables del modelo.

contiene proteínas como albúmina y globulina y un polisacárido conocido como ácido hialurónico. Se supone que sus principales funciones son la de nutrición y lubricación del cartilago. Todo el conjunto se encuentra bien protegido externamente por una capa fibrosa denominada cápsula.

El estudio de la lubricación de las articulaciones naturales —particularmente rodilla y cadera— ha recibido considerable atención en los últimos años. Una descripción de los principales avances obtenidos ha sido publicada por Dowson [1] y Ermakov [2]. En general ha habido dos mecanismos de lubricación predominantes propuestos para las juntas sinoviales: lubricación elastohidrodinámica [3], en la cual la deformación del cartilago provocada por la presión generada en el líquido sinovial es importante y lubricación bifásica, en la cual la porosidad del cartilago articular se considera responsable por la generación de la película líquida lubricante.

La visualización directa del comportamiento de la junta en condiciones realistas es muy difícil y la interpretación de los resultados es conflictiva [2]. A causa de estas dificultades experimentales, las predicciones teóricas son particularmente valiosas. Un completo entendimiento del eficiente comportamiento de las juntas sinoviales requeriría el análisis de una variedad de complejos procesos fisicoquímicos y biológicos. Sin embargo, los principios básicos de su funcionamiento están gobernados por las bien establecidas leyes de la mecánica. Por lo tanto, los resultados obtenidos con modelos matemáticos basados en las ecuaciones de conservación pueden resultar útiles para contribuir a la comprensión del funcionamiento de la unidad.

La principal intención de este trabajo es mostrar que las características básicas del funcionamiento de estos sistemas pueden ser retenidas aún usando una mecánica del continuo relativamente simple. Un segundo objetivo es obtener un mejor entendimiento del acoplamiento entre la deformación sufrida por las superficies articulares como consecuencia del fenómeno elastohidrodinámico y la exudación (o imbibición) del líquido sinovial por compactación.

2. MODELO ELASTOHIDRODINAMICO

En el sistema analizado —que se muestra en la Fig. 1b— las superficies articuladas están representadas por dos cilindros de radios R_1 y R_2 girando en direcciones opuestas con velocidad V . Los cilindros están cubiertos por una delgada capa elástica, de espesor T , que representa el cartilago articular. Desde el punto de vista del modelo, el cartilago se considera como un material poroso, saturado, cuyo fluido intersticial puede ser expelido por compactación. Los cilindros se encuentran presionados entre sí por la carga que soportan de tal manera que la distancia que separa el centro de sus superficies en un hipotético estado indeformado es $2H_0$.

Para la descripción del modelo es conveniente utilizar las coordenadas adimensionales

$$x = X/\sqrt{RH_0}, \quad y = Y/H_0,$$

donde R es un radio medio definido por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right).$$

La posición de las superficies articulares a una distancia X de la línea de centros puede calcularse incorporando la deformación a las ecuaciones que describen las superficies cilíndricas, i.e.,

$$H_1(X) = -R_1 \left(1 - \left[1 - \left(\frac{X}{R_1} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - D_1(X),$$

$$H_2(X) = -2H_0 + R_2 \left(1 + \left[1 - \left(\frac{X}{R_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) + D_2(X),$$

donde $D_1(X)$ y $D_2(X)$ representan la magnitud de las deflexiones de las superficies del rodillo inferior (rodillo 1) y el rodillo superior (rodillo 2) respectivamente.

Como X/R_1 y X/R_2 son ambos pequeños respecto a la unidad, una buena aproximación de las superficies puede obtenerse expandiendo las ecuaciones y despreciando los términos de mayor orden. Eliminando términos de cuarto orden y superiores, el espesor adimensional del canal de flujo entre ambas superficies puede representarse mediante la expresión:

$$h(x) = \frac{H_2(X) - H_1(X)}{H_0} = -2 + x^2 + d(x), \quad (1)$$

donde $d(x) = [D_1(X) + D_2(X)]/H_0$ es la magnitud adimensional de la deformación sufrida por las dos superficies.

El espesor del canal que separa ambos cartílagos es muy pequeño comparado con el radio de los rodillos, por lo que la inclinación de sus superficies en la zona de interés es pequeña. De esta manera, el flujo puede considerarse como cuasi-unidireccional y ser estimado razonablemente bien mediante la aproximación de lubricación. Para un fluido newtoniano de viscosidad μ constante, la ecuación de lubricación de Reynolds [3] permite relacionar el gradiente de presión en la dirección del flujo con el espesor $H(X)$ del canal formado entre las superficies articulares mediante

$$\frac{dP}{dX} = 12\mu \left(\frac{VH - Q_e}{H^3} \right),$$

donde Q_e es el caudal del líquido sinovial en el canal de flujo.

El líquido sinovial posee propiedades reológicas inusuales debidas principalmente al ácido hialurónico. Mediciones realizadas por Dintenfass [4] muestran que el líquido sinovial es pseudoplástico (su viscosidad aparente decrece al aumentar la velocidad de corte) y tiende a seguir el modelo de ley de potencia. Se conoce además que es viscoelástico y hay razones para creer que su elasticidad es de importancia en la lubricación de las juntas [5]. Por otro lado, en la artritis reumatoidea el fluido es esencialmente newtoniano. En todo caso, la alteración del campo de flujo debido a los efectos no-newtonianos está fuera del alcance de este trabajo.

Adimensionalizando la presión con las fuerzas elásticas $p = PL/(H_0E)$, donde E es el módulo de elasticidad del cartílago y $L = 2T$, e introduciendo el caudal adimensional $q_e = Q_e/(2VH_0)$ en la ecuación de Reynolds obtenemos

$$\frac{dp}{dx} = Ne \left(\frac{h - 2q_e}{h^3} \right). \quad (2)$$

Las condiciones adoptadas para la solución de la ec.(2) son [6], en la entrada del canal $p(-\infty) = 0$, y a la salida del canal $p(x_1) = 0$, $dp/dx(x_1) = 0$. La posición del punto x_1 puede obtenerse combinando las condiciones de contorno con la ec.(2),

$$x_1 = \sqrt{2(q_e(x_1) + 1)}.$$

La presencia del término $1/h^3$ en la ec.(2) es indicativo de que fuertes presiones pueden originarse en pequeños canales. El parámetro adimensional

$$Ne = \frac{\mu VL}{ER^2} \left(\frac{R}{H_0} \right)^{5/2}$$

puede definirse como un número de elasticidad [7] e interpretarse como la relación entre las fuerzas viscosas originadas en el líquido sinovial y las fuerzas elásticas originadas en el cartilago por la deformación.

Debido al pequeño espesor del cartilago, la deformación de las superficies articulares puede ser calculada con buena aproximación por el modelo de columna adoptado por [8]. En este simple modelo se asume que la deformación elástica local está relacionada linealmente con la presión local P de manera tal que,

$$d = \frac{D_1 + D_2}{H_0} = \frac{2PT}{EH_0} = \frac{PL}{EH_0}$$

con lo que la ec.(1) queda

$$h = -2 + x^2 + p \quad (3).$$

Finalmente, para completar el modelo resta calcular el caudal que circula en el canal. Por continuidad, la magnitud local de este caudal $Q_e(X)$ estará dada por el caudal que ingresa al canal $Q_e(-\infty)$ al que debe adicionarse el líquido intersticial exudado localmente $\theta(D_1 + D_2)$, donde θ puede ser considerado como la porosidad superficial del cartilago. En forma adimensional,

$$q_e(x) = q_e(-\infty) + \frac{1}{2}\theta p(x) \quad (4).$$

La variación del factor de exudación θ con la morfología de la superficie, la carga y la deformación del cartilago no es conocida de manera que θ será tratado como un parámetro.

3. RESULTADOS OBTENIDOS

La ecuación diferencial no lineal (2) fue resuelta numéricamente utilizando la rutina DGEAR de la librería IMSL que es particularmente apropiada para ecuaciones mal condicionadas. Aún así, la integración debió realizarse hacia atrás en el espacio para evitar la aparición de oscilaciones producidas por inestabilidad numérica. El valor de $q_e(-\infty)$ se ajustó mediante un esquema iterativo de Newton, usando un jacobiano numérico, hasta que las condiciones de contorno resultaron satisfechas con un error menor a 10^{-6} trabajando en doble precisión.

La evolución de la presión y la separación entre las superficies articulares obtenidas con un $Ne = 10^{-3}$ y un factor de exudación 3.87×10^{-3} se muestran en la Fig. 2. El número elástico elegido se corresponde con los valores de rodilla normal $R = 0.1$ m, $V = 0.1$ m/s, $L = 2$ mm, $E = 10$ MPa y una viscosidad del líquido sinovial de 0.1 Pa s.

La presión generada en el líquido sinovial resulta en una fuerza neta que tiende a mantener las superficies articulares separadas y que aumenta con el atravesamiento hipotético inicial $2H_0$. La magnitud $2H_0$ es un valor no conocido experimentalmente y en los resultados presentados se utilizó $H_0 = 209.13 \times 10^{-6}$ m definido como la distancia que permite alcanzar una carga adimensional

$$\int p \, dx = 3.869,$$

equivalente a una fuerza de separación entre las superficies de 18500 Nw/m (o aproximadamente tres veces el peso de un adulto normal para una longitud axial típica de las superficies cilíndricas de 0.1 m).

A partir de $x \sim \sqrt{2}$, la presión comienza a crecer rápidamente como consecuencia del aumento de los esfuerzos viscosos a medida que el fluido es arrastrado al interior del canal. La presión alcanza un máximo de $p \sim 2$ en $x = 0$ para luego caer nuevamente a su valor inicial en $x_1 = 1.423$. De acuerdo a estos resultados, el efecto de la fácil deformabilidad del cartilago es promover que la presión en el líquido sinovial coincida muy estrechamente con la presión del límite de contacto seco $h \rightarrow 0$. En estas condiciones límites la presión tiende a la forma cuadrática [ec.(3)]:

$$p(x) = 2 - x^2 \quad (5)$$

en el rango $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ y es nula fuera de este rango. Para el caso $\theta = 0$, los resultados arrojan presiones ligeramente inferiores a las obtenida con el cartilago poroso (ver recuadro de la Fig. 2a).

Como consecuencia del campo de presión hidrodinámica desarrollado en el líquido sinovial, las superficies articulares se separan desde su hipotético estado inicial $h = -2 + x^2$ [ec.(1)] formando, cuando $\theta = 0$, un canal de flujo delgado, del orden de 5.46×10^{-6} m en $x = 0$, con la forma aplanada típica de los contactos no porosos muy cargados [3]. En las mismas condiciones, sin embargo, el cartilago poroso adopta una forma convexa que es un 25% más alta en el centro del canal. Al interpretar este resultado, es conveniente tener en mente que para valores de h muy pequeños, la ec.(2) implica

$$h \sim 2q_e, \quad (6)$$

por lo que si $\theta = 0$, $h \rightarrow$ constante. En el caso poroso q_e es variable y es necesario analizar su evolución a lo largo del cartilago para entender la causa de la convexidad obtenida.

Para ello, en la Fig. 3b se grafica el caudal que circula entre las superficies articulares como una función de la posición, tanto para el caso poroso como para $\theta = 0$. En el caso no poroso, el caudal tiene un valor constante $q_e = 0.0131$ [$\sim h(x=0)/2$]. Por otro lado, cuando $\theta = 3.87 \times 10^{-3}$, el valor de $q_e(x)$ crece a partir de $x \sim \sqrt{2}$ gracias a la exudación provocada por la compactación del cartilago articular en la zona de presiones crecientes. Esto origina que en $x = 0$ circule un caudal aproximadamente 30% superior al caudal que ingresa al canal. Para valores de $x > 0$, el caudal decrece hasta su valor inicial $q_e = 0.012435$ a causa de la absorción de líquido por la expansión del cartilago durante la descompresión. También en este caso los resultados obtenidos convergen al resultado analítico del límite de contacto seco ya que, según las ecs.(4) y (5), cuando $h \rightarrow 0$,

$$q_e(x) \sim q_e(-\infty) + \frac{1}{2}\theta(2 - x^2). \quad (7)$$

Es interesante notar que el caudal que ingresa al canal en el caso poroso es menor que el que se necesita con un sustrato no poroso para sostener aproximadamente la misma carga. No obstante, las superficies articulares permanecen más separadas durante la mayor parte del dominio en el caso poroso que cuando $\theta = 0$. El cartilago articular parece exudar su fluido intersticial de una manera apropiada para mantener la película líquida necesaria para la lubricación.

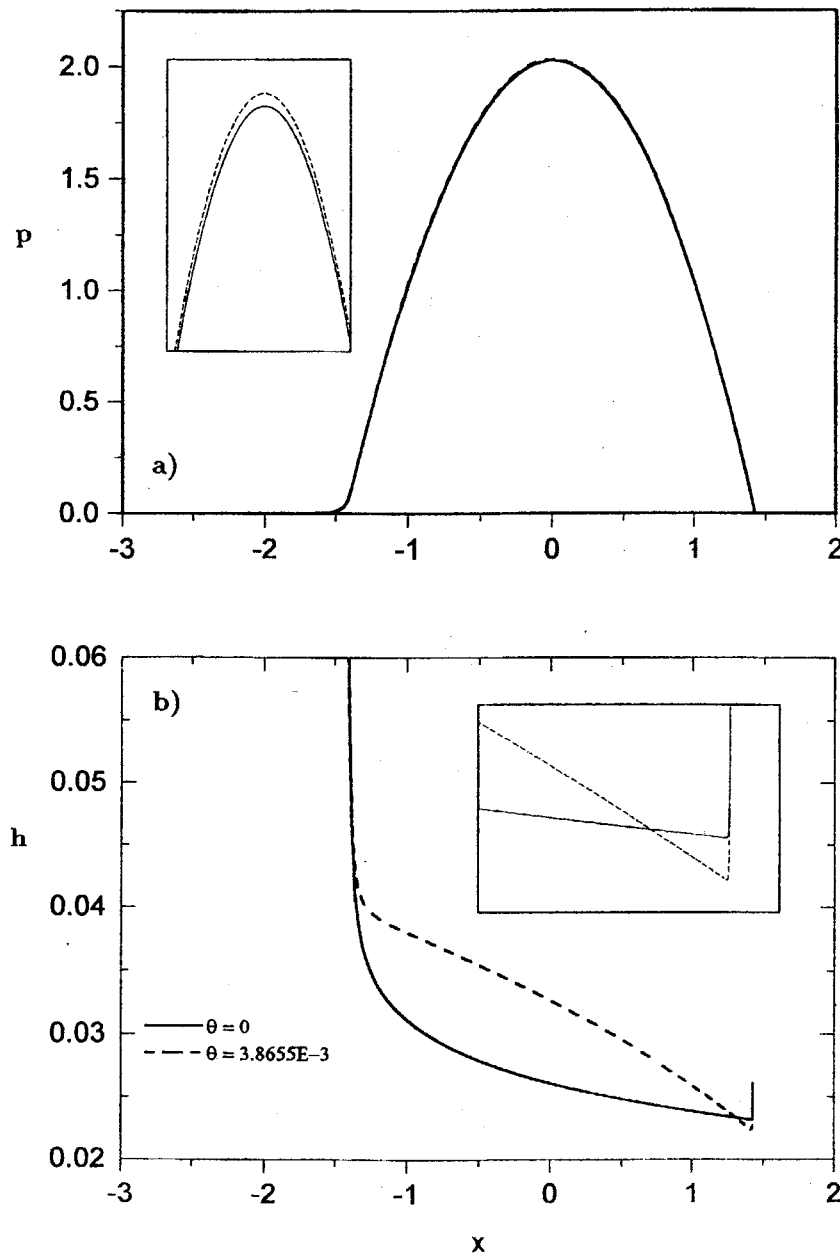


Figura 2: Presión $p = PL/(H_0E)$ (a) y separación $h = (H_2 - H_1)/H_0$ de las superficies articulares (b), comparando los resultados obtenidos con un cartilago no poroso (línea llena) y con $\theta = 3.8710^{-3}$ (línea de trazos).

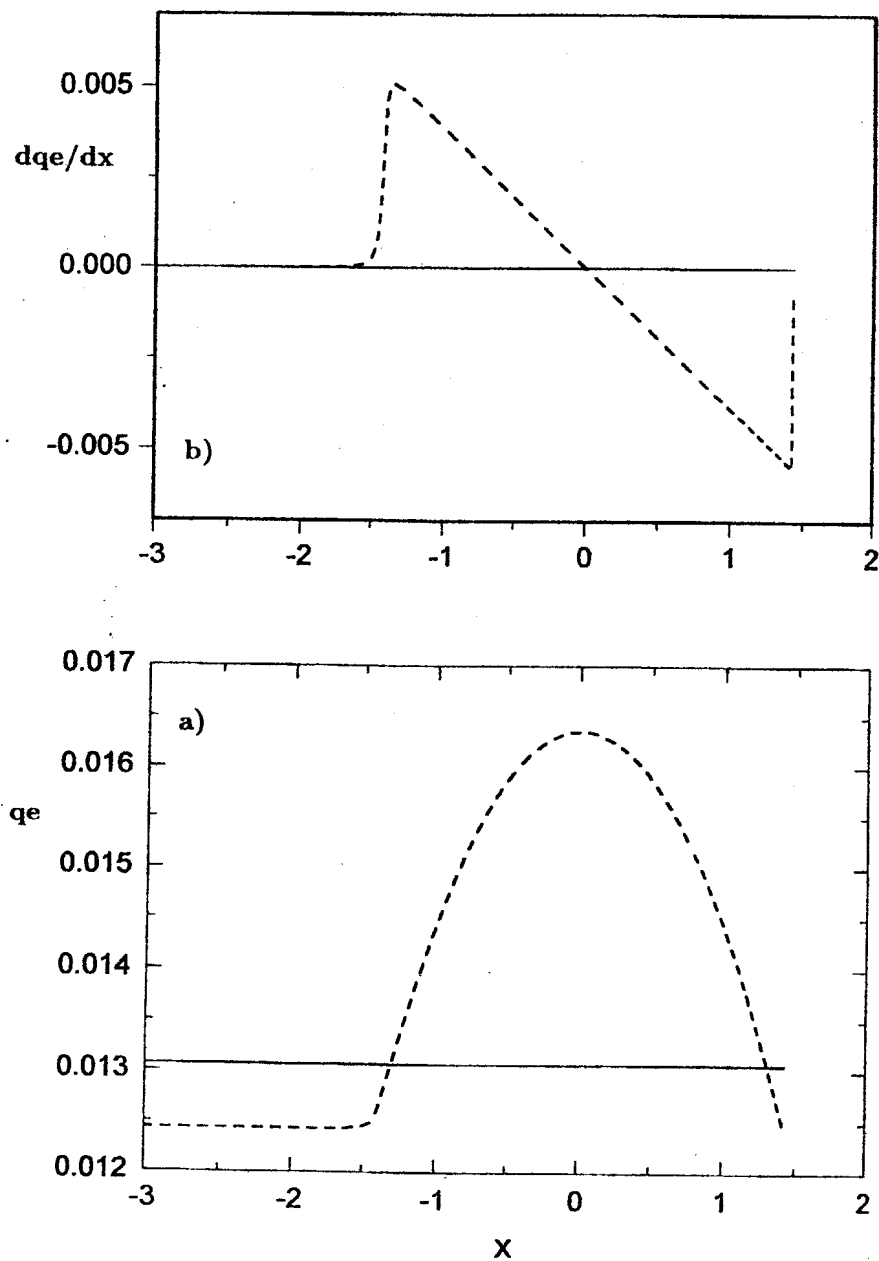


Figura 3: Caudal $q_e = Q_e/(2VH_0)$ (a) y velocidad de exudación dq_e/dx (b) comparando resultados obtenidos con un cartilago no poroso (línea llena) y con $\theta = 3.8710^{-3}$ (línea de trazos).

A partir de la ec.(7) se puede predecir que la velocidad con la que se exudará el líquido desde el interior del cartilago dq_e/dx crecerá casi instantáneamente apenas se acerque el frente de presión en un entorno de $x = -\sqrt{2}$ hasta un valor de velocidad máxima de $O(\theta\sqrt{2})$. Luego la velocidad de exudación debe disminuir linealmente hasta anularse en el centro del canal como consecuencia de que el cartilago es comprimido con una presión que aumenta en forma cuadrática. Después de pasado el máximo de presión, el cartilago comenzará a embeberse de líquido con una velocidad de imbibición creciente hasta alcanzar un máximo de $O(\theta\sqrt{2})$ en un entorno de $x = \sqrt{2}$. A partir de esta posición la carga ya ha pasado y el cartilago deja de absorber líquido. Los valores de velocidad de exudación obtenidos que se grafican en la Fig. 3a confirman que los resultados del modelo se corresponden ajustadamente con las predicciones.

Finalmente, las ecuaciones (6) y (7) y la concordancia de los resultados obtenidos con el límite de contacto seco nos permiten suponer que el espesor del canal de flujo deberá tender cuando $h \rightarrow 0$ hacia la forma de parábola invertida $h \rightarrow 2q_e(-\infty) + \theta p \sim 2q_e(-\infty) + \theta(2 - x^2)$, lo que explica la forma convexa obtenida en las predicciones numéricas.

4. CONCLUSIONES

Se ha formulado un modelo elastohidrodinámico unidimensional de junta sinovial acoplado la ecuación de lubricación de Reynolds con un modelo simple de cartilago articular en el que la deformación y la exudación son proporcionales a la carga local. De esta manera fue posible predecir por simple integración las principales características de presión, deflexión, caudal y velocidad de exudación sobre un cartilago poroso en condiciones semejantes a las de una articulación de rodilla.

La adimensionalización utilizada permitió caracterizar el modelo con solamente dos parámetros, el número de elasticidad Ne que relaciona las fuerzas elásticas y viscosas puestas en juego y el factor de exudación θ . Un resultado interesante es la predicción de que para un valor típico del Ne , el sistema funciona en condiciones cercanas al límite hertziano de contacto seco. Esto origina la formación de un canal entre las superficies articulares que posee forma convexa en lugar del canal de espesor aproximadamente constante que es típico en los contactos lubricados no porosos. Existe además concordancia cualitativa entre las velocidades de exudación calculadas con el modelo y las publicadas usando modelos constitutivos del cartilago articular mucho más sofisticados (estas predicciones fueron calculadas por Mow y Lai [9] bajo la acción de una carga constante, parabólicamente distribuida, sin tener en cuenta el fenómeno de lubricación acoplado). Esto es indicativo de que el modelo, a pesar de su simplicidad, ha conseguido captar las características físicas principales del problema.

No existen datos corrientemente disponibles para el factor de exudación, por lo que debe ser utilizado como un parámetro. Aún cuando el valor de θ utilizado -que permite un incremento del caudal circulante en el canal de más del 30% del valor de entrada- parece ser apropiado, las dificultades numéricas asociadas a la utilización de un jacobiano numérico impidieron obtener resultados para valores de θ mucho más elevados. Actualmente se está trabajando en la resolución del modelo usando el método de elementos finitos y técnicas especiales para obtener la posición de la frontera libre como las usadas en Di Paolo [10]. Esto permite usar un jacobiano analítico en la iteración de Newton y métodos de continuación paramétrica [11], que presumiblemente permitirán alcanzar valores más elevados del factor de exudación.

Agradecimientos- Los autores agradecen a los estudiantes de bioingeniería D. Campana, M. Bava, M. Platini y G. Vilche su asistencia en la obtención de los resultados numéricos. Este trabajo se desarrolló como parte del PID No. 6124 de UNER y del PID No. 0201-1005 de CONICET.

REFERENCIAS

- [1] Dowson, D., *Biotribology of natural and replacement synovial joints*. In Biomechanics of Diarthrodial Joints (Vol. 2), eds. V.C. Mow, A. Ratcliffe and S.L.Y. Woo, Springer-Verlag, 1990.
- [2] Ermakov, S.F., *Biomechanics of synovia in living joints. 1- Modern concepts of living joints friction, wear and lubrication*, J. Friction Wear, 14, Num. 6, 97-109, 1993.
- [3] Dowson, D. and Higginson, G.R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, Pergamon Press, 1977.
- [4] Dintenfass, L., *Rheology of complex fluids and some observations on joints lubrication*, Fed. Proc., 25, 1054-1060, 1960.
- [5] Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena and Living Systems*, John Wiley and Sons, 1974.
- [6] Dowson, D. and Yao, J., *A full solution to the problem of film thickness prediction in natural synovial joints*, Proc. 16 Leeds-Lyon Symposium on Tribology. Amsterdam, Elsevier, 1990.
- [7] Coyle, D.J., *Forward roll coating with deformable rolls: A simple one-dimensional elastohydrodynamic model*, Chem Engng. Sci., 43, Num. 10, 2673-2684, 1988.
- [8] Dowson, D. Jin, Z.M., *A full numerical solution to the problem of micro-elastohydrodynamic lubrication of a stationary compliant wavy layered surface firmly bonded to a rigid substrate*, Submitted to Engineering in Medicine, 1992.
- [9] Mow, V. C. and Lai, W.N., *Recent development in synovial joint biomechanics*, Siam Review, 22, Num. 3, 275, 1980.
- [10] Di Paolo, J. y Saita, F.A., *Solución del problema elastohidrodinámico de contacto lineal*, Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing., 8, Núm. 4, 427-438, 1992.
- [11] Corvalán, C.M. and Saita, F.A., *Automatic stepsize control in continuation procedures*, Comp. Chem. Engng., 15, Num. 10, 729-739, 1991.