Mecánica Computacional Vol. XVI
compilado por G. Etse y B. Luccioni
Tucumán, Septiembre de 1996

DESARROLLO DE UN ALGORITMO DE ETIQUETAMIENTO PARA LA RESOLUCIÓN DE REDES DE DISTRIBUCIÓN HIDRAÚLICA, MEDIANTE TEORÍA DE GRAFOS.

Cabezas, Sergio. Curia, Lisandro. Itovich, Griselda. Perini, Alejandra.
Dpto. de Matemática - Facultad de Economía y Administración - U.N.Comahue.
Buenos Aires 1400. 8300 Neuquén. Argentina.

RESUMEN

Dado que las ecuaciones que rigen el comportamiento de las redes de distribución hidráulica forman un sistema no lineal, éste puede describirse matricialmente para luego resolverse por medio del método iterativo de Newton - Raphson.
Durante el planteo del problema puede ocurrir que cada nodo de la red esté conectado a pocas tuberias y, en consecuencia, la matriz de coeficientes resulta rala y el sistema es de simple resolución.
Sin embargo, en la mayoría de los casos que suceden en la práctica, los nodos pueden tener un alto grado de conectividad y la dispersión de la matriz de coeficientes es un factor de importancia. Debido a esto, para obtener una rápida resolución del sistema, interesa reducir el ancho de banda de la matriz. En este trabajo se emplea la teoría de grafos para describir en forma clara y sistemática la topología de una red en régimen estacionario y se propone un algoritmo de etiquetamiento del grafo basado en el método de Jeppson y Davis, que permite concentrar los elementos cerca de la diagonal principal y de esta forma disminuir el tiempo y esfuerzo computacional. Con el objeto de ilustrar la forma de desarrollar el algoritmo, se exponen algunos ejemplos sencillos de aplicación.

ABSTRACT

Since the equations that are involved in the behaviour of a flow distribution network form a non-linear system, it can be described mathematically through matrixes and solved with the iterative Newton - Raphson method.
When stating this problem, each node of the network would be connected to a few pipes thus resulting in a sparsed coefficient matrix. Therefore the resultant system is easily solved.
However, in most current cases, the nodes may have a great connectivity grade and the sparseness of the coefficient matrix is an important factor. Due to this fact, the bandwidth of the matrix should be reduced in order to obtain a quick solution of the system. Here, the theory of graphs is applied to describe a steady state network topology clearly and systematically and an algorithm for labelling the graph -based on Jeppson and Davis method- is proposed. Such algorithm allows the concentration of elements close to the main diagonal and the computer time and effort are therefore saved. Some simple examples of its application are shown so as to explain how the algorithm is developed.

INTRODUCCIÓN

La formulación matemática empleada en el proceso de resolución de sistemas de líquidos a presión en escurrimiento permanente, descripta mediante una notación matricial, permite conocer las características de los sistemas de ecuaciones involucrados. Estos son no lineales y se resuelven por métodos iterativos [1].

La configuración de la matriz asociada al planteo del problema citado puede variar, en el caso más desfavorable puede resultar con gran cantidad de elementos dispersos debido a un alto grado de conexión en los nodos. Numerosos han sido los esfuerzos dirigidos al desarrollo de algoritmos para reducir el ancho de banda de la matriz de coeficientes que describe la red. En este sentido, Epp y Fowler [2] desarrollaron un algoritmo aplicado al método de los caudales en tanto que, Jeppson y Davis [2] sugieren otro que posibilita bandear la matriz asociada a sistemas obtenidos por aplicación indistinta de los métodos de los caudales o de los nodos.

El algoritmo propuesto toma las ideas básicas de estos últimos autores, para desarrollar a través de un modelo de grafos, un método iterativo que permite bandear la matriz que interviene en el planteo del problema y surge como consecuencia una simplificación en la resolución del mismo.

1. TOPOLOGÍA DE REDES DE DISTRIBUCIÓN

Una red de distribución puede ser considerada como un grafo lineal dirigido, compuesto de un número finito de arcos (secciones de tuberías, cada uno con su longitud, diámetro y rugosidad especificada) interconectados de acuerdo a una configuración específica. Las secciones de tuberías pueden contener bombas y otros accesorios como curvas o válvulas. Los puntos extremos (vértices) de los arcos, son identificados como nodos, dentro de los cuales encontramos los nodos de unión y los nodos de grado fijo.

Sea dado un grafo G = (V , U) donde V es el conjunto de vértices y U es el conjunto de aristas de G. Las siguientes definiciones son necesarias para adaptar la teoría de grafos al estudio de redes de distribución.

Definición 1: Se llama ***subgrafo de G*** a todo grafo G' donde G' = (V' , U') , $V' \subseteq V$ y $U' \subseteq U$. (G' puede obtenerse a partir de G, eliminado los vértices de V - V' y las aristas que inciden en estos últimos).
Definición 2: Se llama ***nodo de unión de G*** al vértice donde dos o más aristas se unen.
Definición 3: Se llama ***nodo de grado fijo de G*** a un punto de energía constante. (Por ejemplo: la conexión de un reservorio, elevación de un depósito o una región de presión constante)
Definición 4: Se llama ***grado de un nodo*** de G al número de aristas que inciden en el nodo.
Definición 5: Se llama ***grafo etiquetado*** a un grafo tal que a algunos de sus elementos (vértices o aristas) se les asigna etiquetas, es decir nombres, marcas, valores, símbolos, secuencia de símbolos, etc.
Definición 6: Se llama ***bucle de G*** a una arista de G en la que coinciden los extremos.
Definición 7: Se llama ***matriz de adyacencia (vértice - vértice) de G*** a la matriz $A = (a_{ij})$ donde a_{ij} = número de aristas de extremos i y j.
Definición 8: Se llama ***ciclo de G*** a un conjunto ordenado minimal $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1$ donde $u_i \in V$ y existen aristas en U que unen u_i, con u_{i+1} para todo $i=1,2,\ldots,n-1$ y u_n con u_1.

2. GRAFOS ETIQUETADOS

2.1. ALGORITMO PARA MEJORAR EL ETIQUETAMIENTO DE LOS VÉRTICES

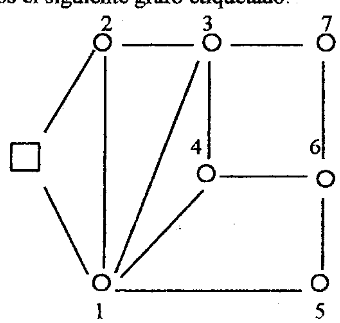
Sea dado un grafo etiquetado G = (V,U) , con bucles en cada uno de sus vértices. A través del algoritmo de Jeppson y Davis, se logra un etiquetado que transforma la matriz de adyacencia original del grafo G, en una matriz de adyacencia banda.

Se construye la matriz de adyacencia del grafo G, cuyas filas y columnas se corresponden con la numeración de los nodos y sobre ésta se aplica el siguiente algoritmo:
1er. Paso: Se efectúa la suma de las columnas correspondientes al primer y último elemento no nulos de cada fila. De acuerdo a estos resultados, se ordenan las filas en orden creciente (de arriba hacia abajo). En el caso que hubiera filas con el mismo resultado, estas se ordenan entre sí en forma arbitraria. El número de nodo correspondiente a la fila se conserva.
2do. Paso: Se realiza la suma de las filas correspondientes al primer y último elemento no nulos de cada columna. De acuerdo a estos resultados, se ordenan las columnas en orden creciente (de izquierda a derecha). En el caso que hubiera columnas con el mismo resultado, éstas se ordenan entre sí en forma arbitraria. El número de nodo correspondiente a la columna se conserva.

Estos dos pasos se repiten hasta que todas las filas y columnas se ubiquen en orden ascendente y no ocurra cambio en sus posiciones, o hasta que algún número máximo establecido de iteraciones se alcance (para evitar repetir cambios ya efectuados en iteraciones consecutivas). Es posible observar que partiendo de una matriz de adyacencia, que es simétrica, no siempre se obtiene al concluir este algoritmo otra matriz simétrica. En las aplicaciones a problemas con redes de distribución, el objetivo es alcanzar una matriz simétrica al concluir el algoritmo, como veremos más adelante. Debido a esto, se realiza con las columnas los mismos cambios efectuados con las filas en el 1er. Paso, y a partir de allí se repite el algoritmo, si corresponde continuar. Finalmente, se reetiquetan los vértices asignando a cada uno de ellos el número correspondiente a la posición, que guardan en la matriz una vez finalizado el algoritmo.

2.2. EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE JEPPSON Y DAVIS

Consideremos el siguiente grafo etiquetado:



Si se le añaden bucles al grafo anterior en cada uno de los vértices, la matriz de adyacencia A resulta:

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Veamos si podemos mejorar el etiquetamiento, usando el algoritmo:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix} & & \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0&1\\1&0&1&1&0&1&0\\1&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}6\\4\\8\\7\\7\\11\\10\end{matrix} & \begin{matrix}2\\1\\5\\4\\3\\7\\6\end{matrix}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|} \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix} & & \\ \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&1&0\\1&0&1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}4\\6\\7\\7\\8\\10\\11\end{matrix} & \begin{matrix}2\\1\\5\\4\\3\\7\\6\end{matrix}\end{array} \Rightarrow$$

Aplicando el 1er. Paso del algoritmo, intercambiamos las filas 1-2, 3-5 y 6-7

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} & \begin{matrix}2&1&5&4&3&7&6\end{matrix} & \\ \begin{matrix}2\\1\\5\\4\\3\\7\\6\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&1&0&0&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&1\\0&1&0&1&1&0&1\\1&1&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&1&1\\0&0&1&1&0&1&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}6\\6\\9\\9\\8\\12\\10\end{matrix}\end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&0&0&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&0&1\\0&1&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&1&1\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix} \begin{array}{c|c|} 6&2\\6&1\\8&3\\9&4\\9&5\\10&6\\12&7\end{array} \Rightarrow$$

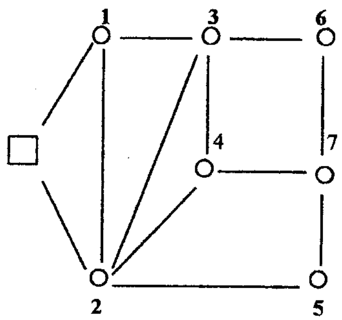
Efectuamos con las columnas los mismos cambios que se realizaron con las filas, intercambiamos las columnas 1-2, 3-5 y 6-7. Aplicamos a esta nueva matriz el 1er. Paso del algoritmo. Esto hace que se deba intercambiar las filas 3-5 y 6-7.

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} & \begin{matrix}2&1&3&4&5&6&7\end{matrix} & \\ \begin{matrix}2\\1\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0&1\\0&1&1&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}4\\6\\8\\8\\8\\11\\10\end{matrix}\end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix} \begin{array}{c|c|} 4&2\\6&1\\8&3\\8&4\\8&5\\10&7\\11&6\end{array} \Rightarrow$$

De acuerdo a lo establecido, efectuamos con las columnas los mismos cambios que realizamos con las filas en el último paso. Aplicamos a esta nueva matriz el 1er. Paso del algoritmo. Esto hace que se deba intercambiar las filas 6-7. Resta intercambiar las columnas 6-7.

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} & \begin{matrix}2&1&3&4&5&7&6\end{matrix} & \\ \begin{matrix}2\\1\\3\\4\\5\\7\\6\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}4\\6\\8\\8\\9\\10\\11\end{matrix}\end{array}$$

Con esta matriz concluye el algoritmo, ya que si efectuamos el primer paso del algoritmo, no cabe hacer otro cambio significativo. De esta manera un mejor etiquetamiento del grafo dado es como sigue:



3. MECANISMOS DE FLUJO DE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN

Las leyes que caracterizan la distribución del flujo estacionario en una red hidráulica o de gas son las leyes de Kirchhoff , llamadas de energía y de continuidad. Éstas se vinculan a través de la relación entre pérdida de carga y caudal. De acuerdo al método de resolución que se empleará, basta considerar la última ley y la relación mencionada.

3.1. LEY DE CONTINUIDAD

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}.Q_{ij} + q_j = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n. \tag{3.1}$$

donde n = número de nodos.

Q_{ij} = caudal circulante en la tuberia donde n = número de nodos.

Q_{ij} = caudal circulante en la tuberia que une el nodo i con el nodo j.

q_j = caudal saliente o entrante en el nodo j.

$\alpha_{ij} = \{-1,0,1\}$ según la orientación en la tuberia que une el nodo i con el nodo j. a que une el nodo i con el nod

q_j = caudal saliente o entrante en el nodo j.

$\alpha_{ij} = \{-1,0,1\}$ según la orientación en la tuberia que une el nodo i con el nodo j.

3.2. RELACIÓN ENTRE PÉRDIDA DE CARGA Y CAUDAL

Se considera, entre las relaciones empíricas existentes, la ecuación conocida de Hazen - Williams :

$$Q_{ij} = \Delta P_{ij}.r_{ij} = \Delta P_{ij}.C.D^{2,632}.\left(\frac{|\Delta P_{ij}|}{10,624.L}\right)^{0,541} \tag{3.2}$$

donde L es la longitud de la tuberia que une al nodo i con el nodo j

R_{ij} = Resistencia de la tuberia que une al nodo i con el nodo j.

$\Delta P_{ij} = P_i - P_j$, donde P_i y P_j son las presiones en los nodos i y j.

3.3. EL MÉTODO DE LOS NODOS

El método de los nodos es uno de los empleados para la resolución de redes, por medio del cual se establece un sistema de ecuaciones que tiene como incógnitas las presiones nodales.

De las ecuaciones (3.1) y (3.2) resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} r_{ij} . \Delta P_{ij} + q_j = 0 \quad j = 1,2,\ldots n \tag{3.3.1}$$

donde n = número de nodos.

Si se reordenan y agrupan los términos que contienen a una misma presión P_i , i =1,2..,n , el sistema puede reescribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &R.P + q = 0 \qquad \text{esto es} \\ &R.P = -q \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$R = (\overline{r_{ij}})$ Matriz de resistencias de orden n x n.

$\overline{r_{ij}}$ = factor de resistencia que resulta de agrupar las resistencias de una misma presión.

$P = (P_j)$ Vector de presiones nodales de orden n x 1.

$q = (q_j)$ Vector de caudales de orden n x 1.

Desarrollando la ecuación matricial (3.3.2) resulta:

$$\begin{aligned} F_1 &= \overline{r_{11}}.P_1 + \cdots + \overline{r_{1n}}.P_n = -q_1 \\ F_2 &= \overline{r_{21}}.P_1 + \cdots + \overline{r_{2n}}.P_n = -q_2 \\ \vdots & \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ F_n &= \overline{r_{n1}}.P_1 + \cdots + \overline{r_{nn}}.P_n = -q_n \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Diferenciando el sistema de ecuaciones anterior y tomando una fila F_i se obtiene:

$$dF_i = -dq_i, \text{ esto es}$$

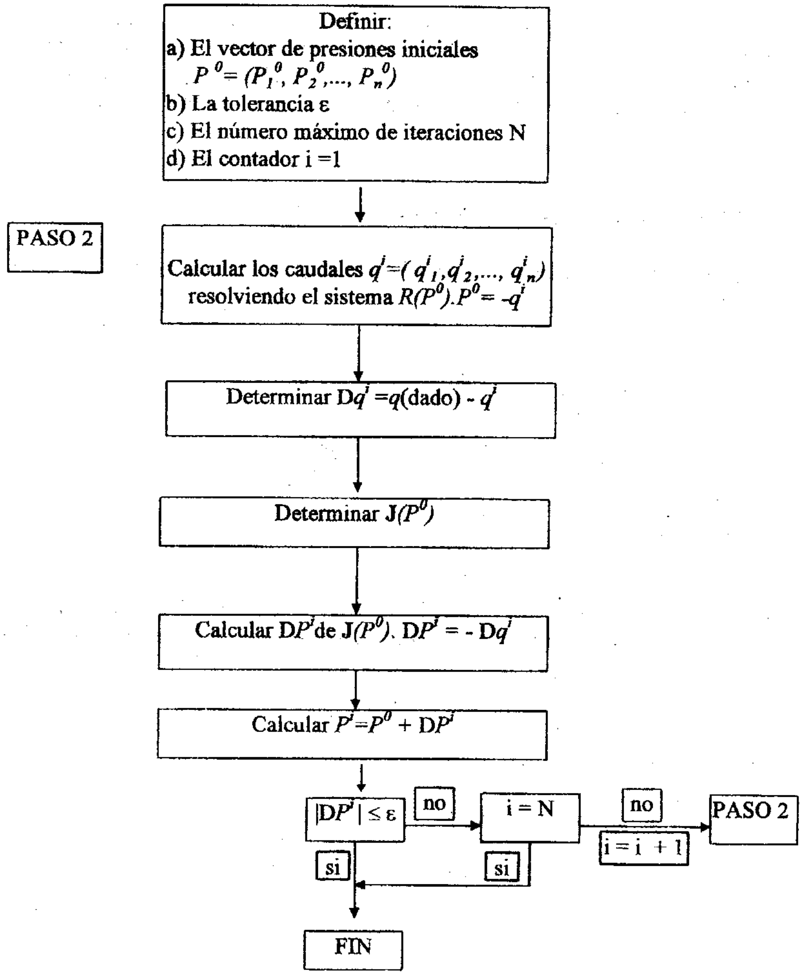
$$\frac{dF_i}{dP_1}.dP_1 + \frac{dF_i}{dP_2}.dP_2 + \cdots + \frac{dF_i}{dP_n}.dP_n = -dq_i$$

y se construye una matriz jacobiana o tangente **J** que vincula las variaciones de las correspondientes a los caudales. De esta forma:

$\mathbf{J}.\mathrm{D}P = -\mathrm{D}q$ donde $\mathbf{J} = (a_{ij}) = \left(\dfrac{dF_i}{dq_j}\right)$

3.4. ALGORITMO DE RESOLUCIÓN

Una vez que están definidos los parámetros de la red de distribución: número de nodos, conectividad, diámetro de las tuberias, presiones, caudales especificados y cotas de error, el algoritmo de resolución del sistema de ecuaciones no lineales que surge de la aplicación del método de los nodos, consta de los siguientes pasos:



4. ALGORITMO DE JEPPSON Y DAVIS PARA REDES DE DISTRIBUCIÓN

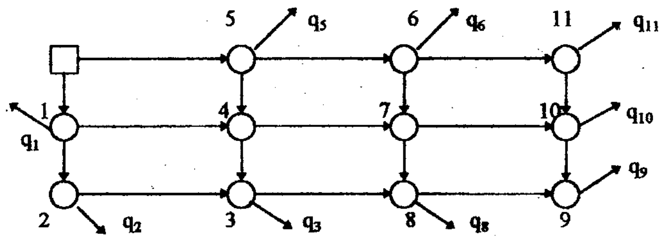
A través del algoritmo se logra un etiquetado que transforma la matriz jacobiana original en una matriz banda. El algoritmo consta de dos pasos en los cuales cambian de posición las filas y las columnas de la matriz de adyacencia.

Para obtener una representación topológica de una red de distribución, se utiliza la teoría de grafos. Al grafo que resulta, se le incorporan bucles en cada nodo de unión (esto no incide en la mecánica de la red). Se analiza el subgrafo que resulta de eliminar los vértices que representan fuentes de la red y se lo etiqueta otorgando una numeración arbitraria a los nodos. Se construye la matriz de adyacencia del subgrafo considerado y sobre éste se aplica el algoritmo enunciado en 2.1.

En las aplicaciones a problemas con redes de distribución, el objetivo es alcanzar una matriz simétrica al concluir el algoritmo ya que el resultado de éste debe interpretarse como la matriz de adyacencia del subgrafo original para un cierto etiquetamiento. Debido a esto, en el 2do. Paso se efectúan con las columnas los mismos cambios realizados con las filas en el 1er. Paso, y a partir de allí se repite el algoritmo, si corresponde continuar.

5. EJEMPLO DE APLICACIÓN EN REDES DE DISTRIBUCIÓN

Se quieren determinar en la siguiente red, las presiones en cada nodo (P_i) a partir de las demandas (q_i) en los nodos de unión exteriores.



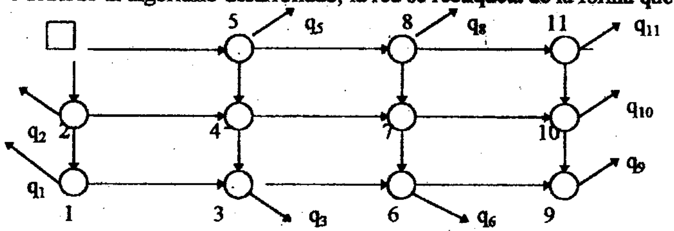
Para reetiquetar la red, usaremos el algoritmo de Jeppson y Davis obteniendo una matriz jacobiana banda. Esta se empleará en la resolución del sistema no lineal por el método de Newton - Raphson. Sea A la matriz de adyacencia correspondiente a la red de distribución anterior:

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c|c|c|}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{matrix} & \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix} &
\begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 10 \\ 8 \\ 10 \\ 16 \\ 14 \\ 12 \\ 18 \\ 18 \\ 17 \end{matrix}
\end{array}
$$

Luego de aplicar el algoritmo, arribamos a la matriz que marca el etiquetamiento definitivo, que es la siguiente:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

De acuerdo al algoritmo desarrollado, la red se reetiqueta de la forma que se muestra a continuación:



Las ecuaciones de continuidad en cada nodo resultan:

(1) $F_1 = Q_{21} - Q_{13} - q_2 = 0$
$\Rightarrow F_1 = (P_2 - P_1)\, r_{12} - (P_1 - P_3)\, r_{23} - q_2 = 0$

(2) $F_2 = Q_{02} - Q_{21} - Q_{24} - q_1 = 0$
$\Rightarrow F_2 = (P - P_2)\, r_{01} - (P_2 - P_1)\, r_{12} - (P_2 - P_4)\, r_{14} - q_1 = 0$

(3) $F_3 = Q_{13} + Q_{43} - Q_{36} - q_3 = 0$
$\Rightarrow F_3 = (P_1 - P_3)\, r_{23} + (P_4 - P_3)\, r_{43} - (P_3 - P_6)\, r_{38} - q_3 = 0$

(4) $F_4 = Q_{24} + Q_{54} - Q_{43} - Q_{47} = 0$
$\Rightarrow F_4 = (P_2 - P_4)\, r_{14} + (P_5 - P_4)\, r_{54} - (P_4 - P_3)\, r_{43} - (P_4 - P_7)\, r_{47} = 0$

(5) $F_5 = Q_{05} - Q_{54} - Q_{58} - q_5 = 0$
$\Rightarrow F_5 = (P - P_5)\, r_{05} - (P_5 - P_4)\, r_{54} - (P_5 - P_8)\, r_{56} - q_5 = 0$

(6) $F_6 = Q_{36} + Q_{76} - Q_{69} - q_8 = 0$
$\Rightarrow F_6 = (P_3 - P_6)\, r_{38} + (P_7 - P_6)\, r_{78} - (P_6 - P_9)\, r_{89} - q_8 = 0$

(7) $F_7 = Q_{47} + Q_{87} - Q_{76} - Q_{7(10)} = 0$
$\Rightarrow F_7 = (P_4 - P_7)\, r_{47} + (P_8 - P_7)\, r_{67} - (P_7 - P_6)\, r_{78} - (P_7 - P_{10})\, r_{7(10)} = 0$

(8) $F_8 = Q_{58} - Q_{87} - Q_{8(11)} - q_6 = 0$
$\Rightarrow F_8 = (P_5 - P_8)\, r_{56} - (P_8 - P_7)\, r_{67} - (P_8 - P_{11})\, r_{6(11)} - q_6 = 0$

(9) $F_9 = Q_{69} + Q_{(10)9} - q_9 = 0$
$\Rightarrow F_9 = (P_6 - P_9)\, r_{89} + (P_{10} - P_9)\, r_{(10)9} - q_9 = 0$

(10) $F_{10} = Q_{7(10)} + Q_{(11)(10)} - Q_{(10)9} - q_{(10)} = 0$
$\Rightarrow F_{10} = (P_7 - P_{10})\, r_{7(10)} + (P_{11} - P_{10})\, r_{(11)(10)} - (P_{10} - P_9)\, r_{(10)9} - q_{10} = 0$

(11) $F_{11} = Q_{8(11)} - Q_{(11)(10)} - q_{(11)} = 0$
$\Rightarrow F_{11} = (P_8 - P_{11})\, r_{6(11)} - (P_{11} - P_{10})\, r_{(11)(10)} - q_{11} = 0$

A partir de estas ecuaciones, se puede establecer una matriz R tal que $R = (\overline{r_{ij}})$ cuyos elementos de la diagonal principal son:

$$\overline{r_{11}} = -(r_{12} + r_{23})$$
$$\overline{r_{22}} = -(r_{01} + r_{12} + r_{14})$$
$$\overline{r_{33}} = -(r_{23} + r_{43} + r_{38})$$
$$\overline{r_{44}} = -(r_{14} + r_{54} + r_{43} + r_{47})$$
$$\overline{r_{55}} = -(r_{05} + r_{54} + r_{56})$$
$$\overline{r_{66}} = -(r_{38} + r_{78} + r_{89})$$
$$\overline{r_{77}} = -(r_{47} + r_{67} + r_{78} + r_{7(10)})$$
$$\overline{r_{88}} = -(r_{56} + r_{67} + r_{6(11)})$$
$$\overline{r_{99}} = -(r_{89} + r_{(10)9})$$
$$\overline{r_{(10)(10)}} = -(r_{7(10)} + r_{(11)(10)} + r_{(10)9})$$
$$\overline{r_{(11)(11)}} = -(r_{6(11)} + r_{(11)(10)})$$

De esta forma, queda planteada la ecuación matricial Q = R.P cuyo desarrollo es :

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 - P.r_{01} \\ q_3 \\ 0 \\ q_5 - P.r_{05} \\ q_8 \\ 0 \\ q_6 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{r_{11}} & r_{12} & r_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{12} & \overline{r_{22}} & 0 & r_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{23} & 0 & \overline{r_{33}} & r_{43} & 0 & r_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{14} & r_{43} & \overline{r_{44}} & r_{54} & 0 & r_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{54} & \overline{r_{55}} & 0 & 0 & r_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{38} & 0 & 0 & \overline{r_{66}} & r_{78} & 0 & r_{89} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{47} & 0 & r_{78} & \overline{r_{77}} & r_{67} & 0 & r_{7(10)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{56} & 0 & r_{67} & \overline{r_{88}} & 0 & 0 & r_{6(11)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{89} & 0 & 0 & \overline{r_{99}} & r_{(10)9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{7(10)} & 0 & r_{(10)9} & \overline{r_{(10)(10)}} & r_{(11)(10)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{6(11)} & 0 & r_{(11)(10)} & \overline{r_{(11)(11)}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \end{bmatrix}$$

Se puede mostrar que la matriz jacobiana **J** coincide con R.

CONCLUSIONES

El algoritmo de reetiquetamiento expuesto es de importancia en grandes redes donde existen nodos con alto grado de conectividad. Su aplicación facilita la resolución del sistema no lineal que resulta de análisis de la formulación de las ecuaciones que rigen el equilibrio de la red, ya que disminuye el ancho de banda de la matriz de coeficientes, al mismo tiempo que reduce el correspondiente a la matriz tangente utilizada en el método iterativo de Newton-Raphson.

Al reetiquetar la red mediante el procedimiento citado, las matrices simétricas y bandeadas que resultan, hacen que la aplicación del método iterativo requiera menor esfuerzo y tiempo computacional.

El método descripto se puede aplicar a todo tipo de redes, en cualquier rango de operación y donde el sistema de ecuaciones tiene como incógnitas básicas a los caudales o bien a las alturas nodales.

REFERENCIAS

[1]. Kinkaid, D. & Cheney W., Análisis Numérico, 1994 Addison Wesley.
[2]. Bhave, P. R., Analysis of flow in water distribution networks, 1991 TECHNOMIC.