



**USO DE UNA MALLA COMPUESTA PARA ESTIMAR
ERRORES DE DISCRETIZACION Y MEJORAR LA
SOLUCION EN ELEMENTOS FINITOS**

V. E. Sonzogni

INTEC, CONICET, UNIVERSIDAD NACIONAL DE LITORAL
Güemes 3450, 3000, Santa Fe, Argentina
e-mail: sonzogni@intec.unl.edu.ar, Tel/Fax: 54(42)556673

M. B. Bergallo

y

C. E. Neuman

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (FIQ), UNIVERSIDAD NACIONAL DE LITORAL
Santiago del Estero 2829, 3000 Santa Fe, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se introduce la idea de utilizar una malla compuesta de elementos finitos para estimar errores de discretización. En forma similar a la utilización de la teoría de mezclas para el modelado de materiales compuestos por varias fases, se propone un modelo de elementos finitos donde las partes componentes tienen diferentes errores de discretización. De esta manera el comportamiento global de la "mezcla" de mallas brinda información para estimar el error de discretización. Más aún, esto puede ser utilizado para mejorar la solución numérica obtenida. Se muestran ejemplos de aplicación en problemas para los que se dispone de solución analítica.

ABSTRACT

The use of a composite finite element mesh in order to estimate discretization errors and improve the numerical solution, is introduced. Similarly to the use of mixture theory for multiphase materials, several numerical meshes are allowed to share the same spatial domain, each with its own participation factor. This composite mesh may be used either for estimating discretization errors or for improving the numerical solution. Examples are presented for problems with known exact solutions.

1. INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos proporciona una solución aproximada del problema en estudio. Sin una evaluación posible del orden del error contenido en los resultados, el método en sí tendría un valor limitado. Obviamente el cálculo exacto del error de la solución no es posible en la mayoría de los casos. La estimación del error de una solución de elementos finitos ha acaparado la atención de los investigadores y es motivo de intensos trabajos de investigación y desarrollo. Por otra parte, en algunos problemas de la mecánica de sólidos, en el caso de materiales formados por varios componentes, se han desarrollado teorías de mezcla en las que varias fases comparten un volumen, cada una con su factor de participación [1,2]. Por ejemplo si se trata de un medio poroso saturado (suelo arenoso saturado), la porosidad es el factor de participación del agua intersticial y su complemento el factor de participación del suelo. Las propiedades físicas de cada componente entran en la mezcla multiplicadas por ese factor de participación.

En este trabajo se introduce la idea de utilizar un modelo de elementos finitos compuesto donde cada componente, en lugar de representar materiales con propiedades distintas, representa mallas con diferentes errores de aproximación. Es fácil comprender el procedimiento, si se piensa en dos mallas de elementos finitos, cada una con diferente orden de aproximación, que comparten el mismo espacio y están conectadas en algunos nodos. Si se adjudica a cada una, por ejemplo, la mitad de las propiedades físicas (o geométricas) se obtendrá un resultado global que se espera intermedio entre los resultados que se obtendrían con cada malla individualmente.

La riqueza de la malla compuesta permite realizar varias cosas. Si se desea estimar el error de discretización, la información obtenida a partir del comportamiento diferente de ambas componentes puede usarse para calcular ese estimador del error. Por otro lado, puede obtenerse una solución mejorada y disminuir significativamente el error de discretización.

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se describe la utilización de una malla compuesta de elementos finitos de diferentes órdenes de aproximación. Luego se discute cómo mejorar los resultados, ya sea por extrapolación de soluciones de mallas diferentes, o bien mediante el uso de una malla compuesta. En la sección 4 se muestran algunos ejemplos y se discuten los resultados obtenidos.

2. MALLA DE ELEMENTOS FINITOS, COMPUESTA

La idea central de este trabajo es utilizar una malla compuesta, de elementos finitos, de manera similar a los modelos de mezclas para materiales de varias fases. Este procedimiento puede aplicarse de distintas maneras. En todas ellas se utiliza el hecho de que cada componente del modelo tiene distinto error de discretización.

Una primera forma, que es la utilizada en los ejemplos presentados, es una *versión h*, donde las mallas componentes tienen distinto tamaño de elementos, pero el mismo grado de interpolación. El caso más simple es para mallas estructuradas donde un elemento, por ejemplo rectangular, comparte el espacio que ocupa con otros cuatro elementos de la malla más fina, en el caso bidimensional (o con ocho elementos en 3D). La conexión entre ambas mallas se fuerza en los nodos de la malla más gruesa. Esto da lugar a diferentes alternativas que van desde la construcción de un elemento finito compuesto, especial, hasta la utilización de programas como caja negra, sin acceso al código fuente. En este último caso los nodos de la malla más gruesa son compartidos por la malla más fina. Alternativamente pueden definirse distintos nodos en la misma posición y forzar la conexión mediante: reemplazo directo en el sistema de ecuaciones; uso de multiplicadores de Lagrange; uso de factores de penalización; etc.

Una segunda forma es una *versión p*, donde se utilizan dos mallas componentes de igual tamaño de elementos h , pero con diferentes grados de las funciones interpolantes p . Esto facilita el tratamiento geométrico de las mallas. Al igual que en el caso anterior, la conexión se realiza en los nodos de la malla más gruesa.

El procedimiento admite una generalización ya que pueden idealizarse mallas compuestas de más de dos componentes. Se enriquece de esta manera el procedimiento pero aumenta la complejidad del mismo.

El factor de participación de cada malla en el modelo compuesto puede ser introducido en las constantes físicas del material. En realidad bastaría con que la matrices del sistema fuesen multiplicadas por ese factor. Vale decir que en un problema elástico puede afectarse el módulo de elasticidad, o bien, si se trata de un problema de placas o membranas, el espesor de las mismas.

Nuevamente se puede proceder de diversas formas en este punto. Se puede adjudicar igual peso a cada malla componente, esto es un factor igual a 0.5 para cada una. La solución obtenida estará en algún punto intermedio entre las soluciones de cada una de las mallas, individualmente consideradas. Esta intuición ha sido corroborada en los resultados. A pesar de tenerse aquí un

mayor error con respecto a la malla más fina, la diferencia de comportamiento entre ambas permite estimar el error de discretización.

Otra interesante posibilidad es determinar los factores de participación de manera de minimizar el error. En los ejemplos se muestra la excelente calidad de la solución obtenida para los casos estudiados, empleando esta alternativa.

3. MEJORA DE LOS RESULTADOS

3.1 Extrapolación de resultados de mallas simples

Considérese que T_{h_1} y T_{h_2} son dos mallas regulares de elementos finitos, con pasos de discretización (tamaño de elementos) h_1 y h_2 , respectivamente, y que se efectúa un análisis por separado con cada una de ellas. Si U es el valor exacto de la función incógnita (generalmente desconocido) y U_{h_i} son las aproximaciones asociadas a las mallas T_{h_i} ($i = 1, 2$), se puede expresar

$$U = U_{h_1} + Ch_1^p + O(h_1^q)$$

$$U = U_{h_2} + Ch_2^p + O(h_2^q)$$

donde p es el orden del método y $q > p$. Eliminando la constante C se obtiene

$$U = \frac{\frac{h_1^p}{h_2^p}}{\left(\frac{h_1^p}{h_2^p} - 1\right)} U_{h_2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1^p}{h_2^p} - 1\right)} U_{h_1} + O((\max\{h_1, h_2\})^q)$$

y si $h_1 = 2h_2 = 4h_3$

$$u_{h_1 h_2 r} = \frac{2^p}{(2^p - 1)} U_{h_2} - \frac{1}{(2^p - 1)} U_{h_1} \quad (1)$$

La notación $u_{h_1 h_2 r}$ significa que $h_1 > h_2$, que se efectúa la extrapolación de Richardson entre los "pasos" h_1 y h_2 , que en los nodos de la grilla fina (correspondiente a h_2) se utiliza U_{h_2} , y que en los de la grilla gruesa (correspondiente a h_1) se utiliza la extrapolación $u_{h_1 h_2 r}$ propiamente dicha. En forma análoga se obtiene

$$\frac{U_{h_2} - U_{h_1}}{U_{h_3} - U_{h_2}} \approx \frac{h_1^p - h_2^p}{h_2^p - h_3^p}$$

y si $h_1 = 2h_2 = 4h_3$

$$\frac{U_{h_2} - U_{h_1}}{U_{h_3} - U_{h_2}} \approx 2^p \quad (2)$$

Esta expresión que permite determinar el orden numérico aproximado del método a partir de los resultados en una multigrilla y estimar así los coeficientes de la combinación lineal de extrapolación.

3.2 Uso de una malla compuesta

El procedimiento indicado en la sección anterior, de extrapolación utilizando dos mallas, una fina y una gruesa, con nodos comunes, permite obtener un resultado con una mejor aproximación en los nodos (comunes) contenidos en la malla gruesa. Si se desea esa aproximación en la malla fina es necesario calcular con otra malla más fina aún lo que resulta computacionalmente más complejo. Un procedimiento que mantiene el subespacio de funciones en la dimensión determinada por los nodos de la malla fina pero que incorpora las ventajas de la extrapolación es el uso de una malla compuesta.

En este método se utilizan dos mallas, denominadas T_{h_1} y T_{h_2} con tamaños de elementos h_1 y h_2 respectivamente, con nodos comunes. En la práctica basta tomar la más fina como refinamiento de la más gruesa. En lugar de obtener las soluciones aproximadas respectivas en dos cálculos por separado (como se efectúa en 3.1), se interpreta que el dominio está formado por la yuxtaposición de dos mallas con factores de participación α y $1 - \alpha$, correspondiendo el primero a la malla fina (paso h_2) y el segundo la gruesa (paso h_1). Cuando $\alpha = 1$ se tiene el problema original en la malla fina y cuando $\alpha = 0$ el correspondiente en la gruesa.

El método consiste en definir el conjunto compuesto de elementos gruesos y finos estableciendo los nodos comunes y construir el sistema de ecuaciones para obtener los valores nodales de la aproximación de la solución, pesando los aportes de unos y otros elementos a la matriz de rigidez y vector de cargas mediante los mencionados coeficientes.

Sea $A_1 u_1 = f_1$ el sistema de ecuaciones que debe resolverse por el método de elementos finitos para la malla T_{h_1} y $A_{12} u_{12} = f_{12}$ el mismo sistema completado con ceros para igualar las dimensiones del sistema $A_2 u_2 = f_2$ correspondiente a la malla T_{h_2} . Con los nodos comunes colocados en las mismas posiciones, la solución aproximada por el método de mezcla se obtiene del sistema

$$(\alpha A_2 + (1 - \alpha) A_{12}) u_{h_1 h_2} = (\alpha f_2 + (1 - \alpha) f_{12})$$

donde $u_{h_1 h_2}$ representa la solución aproximada con la malla compuesta siendo $h_1 > h_2$.

4. EJEMPLOS

4.1 Problema de Poisson sobre campo escalar

Como primer ejemplo se ha resuelto por elementos finitos el problema de Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{en } \Gamma (= \partial\Omega) \end{cases}$$

donde $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y f es un polinomio:

$$f(x, y) = (-2500x^3 + 4050x^2 - 1905x + 237)y(250y^4 - 525y^3 + 340y^2 - 69y + 4) + (250x^4 - 675x^3 + 635x^2 - 237x + 27)x(-2500y^3 + 3150y^2 - 1020y + 69)$$

La solución analítica es:

$$u(x, y) = 31250x(x-1)\left(x-\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{9}{10}\right)y(y-1)\left(y-\frac{4}{5}\right)\left(y-\frac{1}{5}\right)\left(y-\frac{1}{10}\right)$$

y está representada en la figura 1.

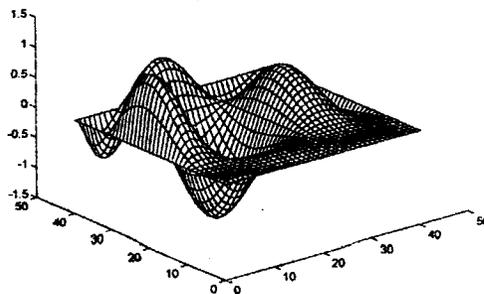


Figura 1: Función $u(x, y)$ solución del problema homogéneo de Poisson

En primer lugar se resolvió este problema con las triangulaciones regulares $T_{\frac{1}{20}}$ y $T_{\frac{1}{40}}$ de 800 y 3200 triángulos rectángulos respectivamente, los primeros de diámetro $h_1 = 0.05$ y los segundos de diámetro $h_2 = 0.025$. Con estas mallas se obtuvieron las aproximaciones $u_{0.05}$ y $u_{0.025}$. El error de aproximación de la segunda de ellas está representado en la figura 2.

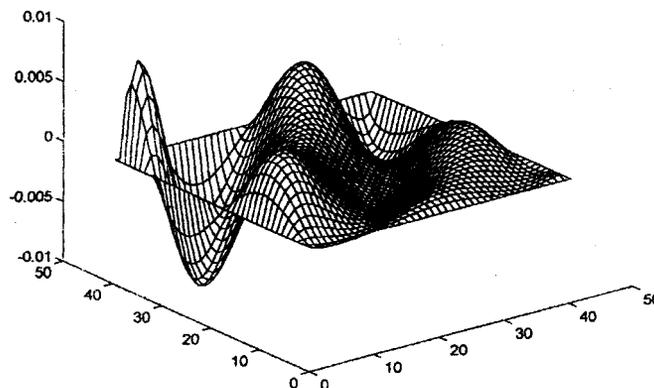


Figura 2: Error de aproximación $u_{0.025} - u$

4.1.1 DETERMINACIÓN DEL ORDEN

En forma análoga fueron calculadas las aproximaciones $u_{0.1}$, $u_{0.05}$, $u_{0.025}$, $u_{0.0125}$, y $u_{0.00625}$. Mediante las mismas fue posible calcular 4 extrapolaciones y 3 estimaciones del orden (ver ecuación (2)). Una de ellas (la tercera) está resumida en la tabla 1 y permite estimar un valor de $p \approx 2$.

Tabla 1: 2^p con p el orden del método

$x \setminus y$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	4.04	3.94	3.98	4.06	3.96	3.98	3.99	4.07	3.92
0.2	3.98	3.99	3.46	3.98	3.99	3.96	3.98	3.99	4.03
0.3	3.98	3.98	4.00	3.95	3.98	3.98	3.97	3.98	3.99
0.4	3.98	3.98	3.99	4.01	3.97	3.98	3.99	3.98	3.98
0.5	3.99	3.98	3.98	3.99	4.04	3.98	3.98	4.01	3.97
0.6	3.98	3.99	3.96	3.98	3.99	4.19	3.98	3.99	4.06
0.7	3.98	3.99	4.00	3.97	3.98	3.99	3.94	3.98	3.99
0.8	3.99	3.99	3.99	3.99	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98
0.9	3.91	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.98	3.97	3.96

También se efectuaron las 3 dobles extrapolaciones y las 2 estimaciones del orden q (segundo exponente en el desarrollo asintótico del error). La segunda está resumida en la tabla 2 y permite estimar un valor de $q \approx 4$.

Debe notarse que en esta tabla 2 se observa una mayor variabilidad atribuible a las aproximaciones numéricas. En todos estos casos tomamos una submatriz soportada en la grilla discreta $[0:0.1:1] \times [0:0.1:1]$ con el fin de realizar las diferencias, extrapolaciones y comparaciones sobre los mismos puntos del dominio Ω .

En la figura 3 se muestra el error de aproximación correspondiente a los resultados de la extrapolación a partir de las soluciones aproximadas $u_{0.05}$ y $u_{0.025}$

Tabla 2: 2^q con q el orden del segundo exponente del desarrollo asintótico del error del método de extrapolación

$x \setminus y$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	14.39	16.24	17.96	14.06	15.45	15.87	17.76	14.61	17.44
0.2	15.54	15.20	16.49	16.39	16.95	15.84	16.17	16.66	14.69
0.3	15.64	15.63	17.84	16.01	16.00	16.04	15.96	16.12	16.83
0.4	15.73	15.85	16.03	15.76	15.90	15.96	16.31	15.76	15.80
0.5	14.82	16.57	16.20	16.22	15.76	15.93	16.12	14.39	15.56
0.6	15.53	14.67	16.25	16.06	16.17	15.88	16.09	16.98	15.00
0.7	15.45	15.58	16.44	16.19	16.09	15.87	16.38	16.27	17.98
0.8	15.59	16.67	15.56	13.69	16.14	15.76	15.52	15.87	15.93
0.9	14.19	15.57	15.44	15.49	16.05	15.69	15.56	15.03	14.98

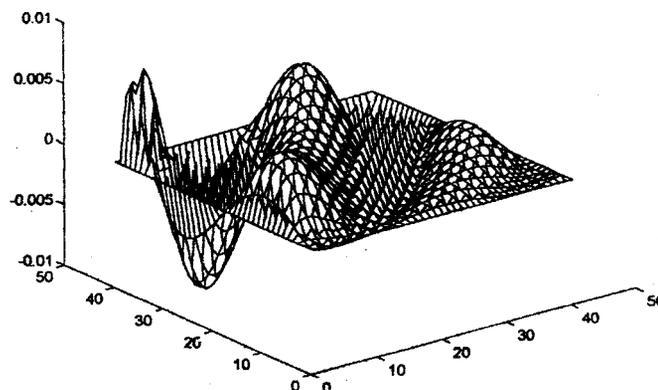


Figura 3: Error de aproximación $u_{0.05,0.025} - u$

Debe notarse que en los nodos comunes se logra una aproximación significativamente mejor que en los restantes.

4.1.2 USO DE MALLA COMPUESTA

Conforme a lo indicado anteriormente, con el fin de utilizar este método es preciso determinar los factores de participación de cada malla, es decir estimar el parámetro α . A partir de la ecuación (1) y de los valores de la tabla 2, se deduce el valor $\alpha = \frac{4}{3}$. En la figura 4 se ha representado la norma del error de aproximación de las distintas soluciones $u_{\frac{1}{20}, \frac{1}{40}}(x, y; \alpha)$ en función del valor de α . De aquí se puede verificar numéricamente que el valor de $\alpha = \frac{4}{3}$ es adecuado para este caso. Se ha mostrado en esa figura el entorno cercano de $\alpha = \frac{4}{3}$ pero para el rango $[0.5, 1.5]$ de valores de α el comportamiento es como el de la figura 4.

En la figura 5 se muestra el error de aproximación de la solución obtenida con la mezcla de los 3200 elementos de la malla $T_{\frac{1}{40}}$ con peso $\frac{4}{3}$ con los 800 de la malla $T_{\frac{1}{20}}$ con peso $\frac{1}{3}$, en total 4000

elementos. Debe notarse que se ha logrado una aproximación un orden de magnitud mejor con un problema de la misma complejidad computacional.

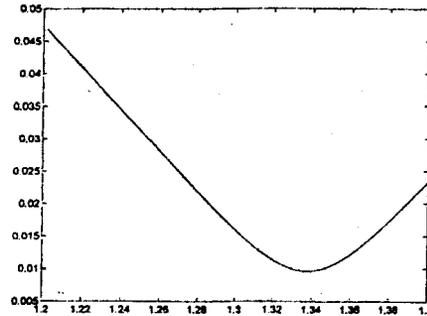


Figura 4: Norma del error en función de α

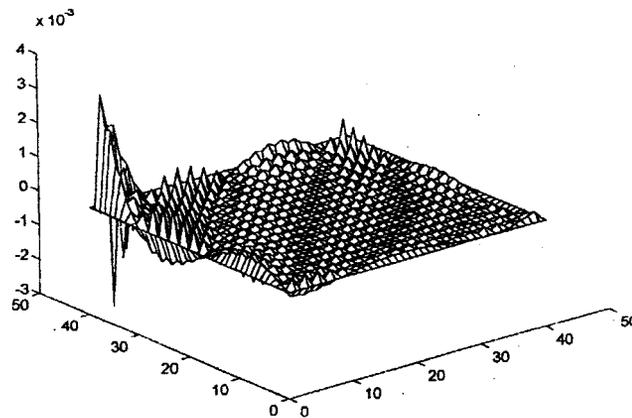


Figura 5: Error de aproximación $u_{0.05,0.025} - u$

En la tabla 3 se representan las normas en el espacio $L_2(\Omega)$ de los respectivos errores de aproximación, donde se aprecia la mejora en un orden al aplicar el método de mezcla.

Tabla 3: Normas de los errores

Norma de error de aproximación	Estimación
$\ u_{h_2} - u\ _{L_2(\Omega)}$	0.00227
$\ u_{h_{2r}} - u\ _{L_2(\Omega)}$	0.00180
$\ u_{h_{2h_1}} - u\ _{L_2(\Omega)}$	0.00014

4.2 Problema de elasticidad: viga en voladizo

Se ha realizado el análisis de tensiones y deformaciones de una viga elástica en voladizo. Este problema se ha elegido pues para la particular forma de las condiciones de contorno posee solución analítica y ha sido utilizado para evaluar estimadores del error [3]. La viga es de geometría cuadrada y estudiada como estado plano de tensiones con espesor unitario.

En primer lugar se efectuó un análisis estándar de elementos finitos con diferentes refinamientos de la malla. La malla 0 tiene un sólo elemento en toda la viga. La malla 1 tiene 2×2 elementos, y así la malla n tiene $2^n \times 2^n$ elementos.

Luego se realizó el análisis con una malla compuesta donde la participación de cada componente era igual, es decir con $\alpha = \frac{1}{2}$. En estos casos, tal como se esperaba, la respuesta fue intermedia entre la de las mallas componentes individualmente consideradas. En la figura 6 se muestra el valor del desplazamiento vertical del nodo inferior del extremo de la viga, para las diferentes mallas. Se muestra allí la solución con mallas simples (estándar), la solución con malla compuesta, y la solución exacta. En cuanto a la notación de mallas compuestas, la malla 1 tiene una componente de 2×2 y otra de 1 elemento; la malla 2 tiene una componente de 4×4 y otra de 2×2 ; etc.

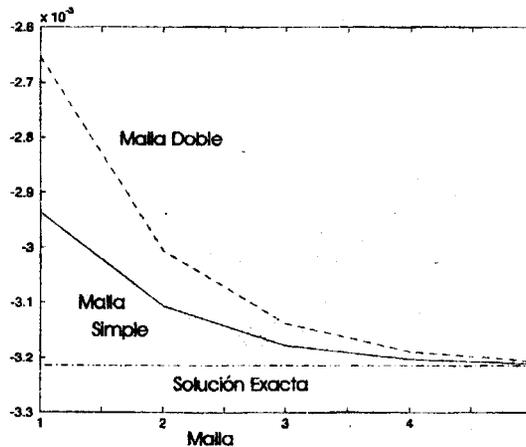


Figura 6: Desplazamiento vertical del extremo del voladizo para mallas simples y compuestas, con $\alpha = 0.5$

A pesar de que el agregado de una malla más gruesa ha deteriorado los resultados, para estos modelos se han utilizado las fuerzas de interacción en los nodos comunes para estimar el error de discretización [4].

Un resumen de los mismos se da en la Tabla 4. Allí se representa con δ_i un estimador del error en norma de energía, y se ha normalizado con el error exacto, en la misma norma. Los tres valores representados son:

- δ_1 norma energética de un campo de tensiones correctivas ficticias, calculadas dividiendo las fuerzas de interacción por el tamaño del elemento;
- δ_2 raíz cuadrada del trabajo realizado por las fuerzas de interacción para igualar los desplazamientos de ambas mallas;
- δ_3 norma energética de la diferencia en tensiones medias de ambas mallas componentes del modelo.

También se ha colocado en esa tabla el error en norma L_2 de la diferencia de desplazamientos entre las mallas gruesa y fina, dividido el error exacto.

Tabla 4: Estimadores del error

Estimador	Malla 1	Malla 2	Malla 3	Malla 4	Malla 5
$\ u_h - u_h\ / \ u - u_h\ $	-	0.6167	0.6592	0.6966	0.6778
$\delta_1 / \ \sigma - \sigma_h\ $	0.6249	0.6738	-	0.4307	0.1183
$\delta_2 / \ \sigma - \sigma_h\ $	0.8295	0.7555	0.8031	0.7667	0.7165
$\delta_3 / \ \sigma - \sigma_h\ $	0.3578	0.5450	0.4939	0.4703	0.4353

Puede observarse que la medida basada en δ_2 tiene un comportamiento similar al de la diferencia de desplazamientos (primera fila de la tabla), pero con valores más cercanos al error exacto (70–80%). Los valores de la Tabla 4 sugieren un factor para corrección del estimador, como suele realizarse en la práctica [5].

Finalmente el análisis con el modelo compuesto se realizó para las mismas mallas, pero tomando un coeficiente $\alpha = \frac{4}{3}$, como en el ejemplo anterior. Los resultados se resumen en la Figura 7. Se indican allí los resultados para las mallas simples, para las mallas compuestas y la solución exacta. Puede verse la excelente convergencia resultante, aún para mallas gruesas.

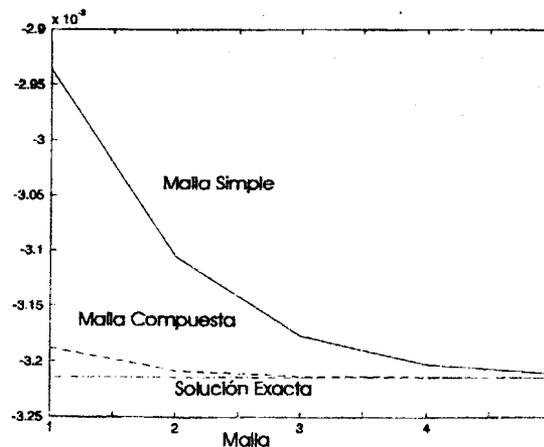


Figura 7: Desplazamiento vertical del extremo del voladizo para mallas simples y compuestas, con $\alpha = 0.5$

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto el concepto de malla compuesta, basada en la teoría de mezclas, con el objeto de estimar errores de discretización y mejorar la solución de elementos finitos. Por aplicación de esta técnica se ha conseguido una precisión muy buena de los resultados, superior a las que pueden obtenerse con mallas afines en tamaño y orden. La información obtenida del

análisis permite además estimar los errores de discretización. Se han mostrado algunos ejemplos que ratifican estas conclusiones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con el apoyo de la Universidad Nacional del Litoral y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

El trabajo de los autores M.Bergallo y C.Neuman se realizó con fondos provenientes de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), a través de la programación *Curso de Acción para la Investigación y el Desarrollo (CAI+D)*, Secretaría de Ciencia y Técnica de la UNL. Proyecto *Problemas Teóricos y Numéricos Asociados a la Obtención de Soluciones de Ecuaciones Elípticas y parabólicas*.

REFERENCIAS

- 1 Truesdell C. and Toupin R., 1960, "The Classical Field Theory", Handbuch der Physik, Ed. S. Flugge, V. III/1, Springer-Verlag, Berlin.
- 2 Prevost J.H., 1980, "Mechanics of Continuous Porous Media", *Int.J.Engineering Science*, V.18, pp. 787-800.
- 3 Beckers P. and Dufeu E., 1995, "Estimación de Error Basada en Ecuaciones de Equilibrio", Proc. Jornadas Intern. Mecánica, Computacional y CAD/CAM, Concepción, Chile, 22-24 nov. 1995, pp.17-26.
- 4 Sonzogni V.E. and Bergallo M.B., 1996, "Towards a Mixture Theory type of Error Estimators for Finite Elements", Trabajo enviado a PACAM V:5th Pan American Congress of Applied Mechanics, 2-4 Enero 1997, San Juan, Puerto Rico.
- 5 Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., 1994, "El Método de los Elementos Finitos", McGraw-Hill - CIMNE, Barcelona, 1994.