



RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE STOKES POR MÍNIMOS CUADRADOS MÓVILES

Hernán Desimone, Hernán Arrieta, Santiago Urquiza, Enrique Pardo
Departamento de Mecánica. Facultad de Ingeniería. UNMDP.
J. B. Justo 4302. (7600) Mar del Plata

RESUMEN

Se presenta un esquema numérico para la resolución de las ecuaciones de Stokes usando una aproximación por interpolantes de mínimos cuadrados móviles (MCM). En este método no se requiere discretizar el recinto en elementos, sino sólo definir un conjunto de puntos, resultando atractivo para problemas tridimensionales y de recintos deformables.

Primeramente se deriva un principio variacional débil para las ecuaciones de equilibrio con restricciones de incompresibilidad, que además permite explicitar las condiciones de Dirichlet, que no pueden ser impuestas a posteriori, como en elementos finitos. Las ecuaciones son discretizadas usando interpolantes MCM, tanto en velocidad como en presión. Se analiza desde el punto de vista numérico la relación entre los grados de interpolación de los campos de velocidad y presión para lograr aproximaciones estables.

Se analizan ejemplos con solución analítica discutiéndose los diversos aspectos de la aproximación numérica: número de puntos, orden de cuadratura, condiciones de contorno y precisión de los resultados.

ABSTRACT

In this paper a numerical solution for incompressible stokes equations using moving-least square's interpolant is developed. This approach does not require an element discretization, just a cloud of points is necessary. That possibility is very attractive to be used for 3-D problems and deformable domains.

First, we derivate a variational weak principle for equilibrium equations that include incompressibility restriction and Dirichlet boundary conditions. These conditions are not applicable a posteriori as in Finite Elements. Then the discretized resultant equations using a MCM interpolant for velocity and pressure fields are presented. Finally, the influence of interpolation on stability is studied.

Numerical and analytical examples are compared, and different aspects of numerical approximation is discussed: number of points, quadrature order, boundary conditions and accuracy of results.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha visto que en la resolución computacional de problemas de elasticidad, conducción de calor, fluidos y otros tantos problemas de la ingeniería, una de las tareas más complejas y consumidoras de tiempo es la generación de una red de elementos o malla, indispensable en el ampliamente difundido método de los elementos finitos (MEF).

Esta situación ha conducido a los investigadores al estudio de métodos alternativos que faciliten esta tarea. Como una opción particularmente interesante se destaca el método de los elementos de contorno (MEC), en el cual la descripción de la red de elementos es más sencilla que en el MEF pues sólo se requiere discretizar el contorno. A pesar de esta ventaja, el uso del MEC se ve limitado a problemas donde no se necesiten integrales de volumen (no linealidades, campos térmicos con elevados gradientes, etc.) pues en ese caso pierde su principal beneficio.

Como una nueva alternativa, se ha investigado recientemente en elasticidad, fractura y conducción de calor [1],[2],[3], un grupo de técnicas que, a diferencia del MEF, no requieren que el cuerpo sea discretizado en elementos, y que por ello reciben el nombre genérico de "métodos sin malla". Entre estas técnicas se destaca el método de los mínimos cuadrados móviles (MCM).

En el presente trabajo se estudia la implementación de un MCM para la resolución de fluidos de Stokes. Justamente en la resolución de problemas de flujos, este método adquiere particular importancia debido a que su facilidad para la generación de una "red de puntos" lo hacen peculiarmente atractivo para casos de recintos deformables, donde es necesario un *re-meshing* durante la resolución, como ser problemas de llenado de moldes, fluido-estructura acoplados y otros.

Debiéndose en el caso de fluidos determinar los campos de velocidades y de presión, se prestará particular atención a la relación entre los grados de interpolación de estos campos con el objeto de lograr aproximaciones estables.

PRINCIPIO VARIACIONAL

Al utilizar métodos variacionales, el campo incógnita \underline{u} es aproximado por \underline{u}^h mediante una combinación lineal $\underline{u}^h = \sum \varphi_{(i)} \underline{u}_i$ en cierto espacio de dimensión finita N . En el método de elementos finitos los coeficientes incógnita \underline{u}_i son valores nodales del campo \underline{u} . Por ello las condiciones de contorno esenciales pueden introducirse de manera sencilla en el sistema de ecuaciones algebraicas final, y no requieren por ende ser impuestas por la formulación variacional. Sin embargo, si se utilizan espacios lineales más generales, como es el caso de este trabajo, las condiciones de contorno esenciales deben ser impuestas explícitamente por el principio variacional utilizado.

El problema de Stokes, sin considerar las fuerzas de volumen, puede plantearse, en forma diferencial, del siguiente modo: hallar los campos de velocidades \underline{v} y presión p que satisfagan la ecuación de equilibrio[4]:

$$\text{div}(\underline{\sigma}) = 0 \quad (1)$$

con la ecuación constitutiva

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\mu \underline{\varepsilon} \quad (2)$$

y las condiciones:

$$\underline{t} - \underline{t} = 0 \quad \text{en } \Gamma_t, \quad \text{condición de contorno de tracción} \quad (3)$$

$$\underline{v} - \underline{v} = 0 \quad \text{en } \Gamma_v, \quad \text{condición de contorno esencial} \quad (4)$$

$$\text{div}(\underline{v}) = 0 \quad \text{incompresibilidad} \quad (5)$$

La formulación variacional puede obtenerse de la estacionariedad de la energía de disipación con las restricciones (4) y (5). Imponiendo estas últimas mediante multiplicadores de Lagrange, el funcional se escribe:

$$Ed = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} p_r \operatorname{div} \underline{w} \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2\mu \underline{g}(\underline{w}) : \underline{g}(\underline{w}) \, dV - \int_{\Gamma_r} \underline{w}' \cdot \underline{\bar{t}} \, dA + \int_{\Gamma_u} \underline{a}'(\underline{v} - \underline{w}) \, dA + \int_{\Omega} a_2 \operatorname{div} \underline{w} \, dV \quad (6)$$

Siendo p_r los campos posibles de presiones, \underline{w} los campos posibles de velocidades y \underline{a}_1 y a_2 multiplicadores de Lagrange. Como es usual en cálculo de variaciones, consideramos las funciones de comparación en torno a los valores que hacen estacionario el funcional, es decir

$$p_r = p + \beta \delta p \quad (7)$$

$$\underline{w} = \underline{v} + a \delta \underline{v} \quad (8)$$

$$\underline{a}_1 = \underline{\lambda}_1 + \gamma_1 \delta \underline{\lambda}_1 \quad (9)$$

$$a_2 = \lambda_2 + \gamma_2 \delta \lambda_2 \quad (10)$$

Si ahora se minimiza la energía de disipación respecto de los parámetros $(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2)$ se obtiene:

$$\frac{\partial E_d}{\partial \alpha} (\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0) = 0 \Rightarrow - \int_{\Omega} \delta \underline{v}' \operatorname{div} \underline{g} \, dV + \int_{\Gamma_r} \delta \underline{v}' \cdot (\underline{\bar{t}} - \underline{\bar{t}}) \, dA + \int_{\Gamma_u} \delta \underline{v}' \cdot (\underline{\bar{t}} - \underline{\lambda}_1) \, dA + \int_{\Omega} (\frac{\rho}{2} + \lambda_2) \operatorname{div} \delta \underline{v} \, dV = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \beta} (\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0) = 0 \Rightarrow - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{v} \, \delta p \, dV = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \gamma_1} (\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0) = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\lambda}_1' \cdot (\underline{v} - \underline{w}) \, dA = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \gamma_2} (\alpha = \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0) = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{v} \, \delta \lambda_2 \, dV = 0 \quad (14)$$

Como la (11) debe cumplirse para todo $\delta \underline{v}$ se observa que:

$$\operatorname{div} \underline{g} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (15)$$

$$\underline{\bar{t}} - \underline{\bar{t}} = 0 \quad \text{en } \Gamma_r \quad (16)$$

$$\underline{\bar{t}} - \underline{\lambda}_1 = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (17)$$

$$\frac{\rho}{2} + \lambda_2 = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (18)$$

Como también los δp son arbitrarios la (12) lleva a:

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (19)$$

en tanto la (13) al cumplirse para todo $\delta \underline{\lambda}_1$ implica:

$$\underline{v} - \underline{w} = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (20)$$

Las ecuaciones (15),(16),(19) y (20) constituyen, junto con la (2) la formulación en ecuaciones diferenciales (ED) del problema, es decir, minimizar la energía de disipación es equivalente a resolver el sistema de ED. Las ec. (17) y (18) nos proporcionan, en tanto, relaciones entre los multiplicadores de Lagrange y los campos de velocidad y presión. Si se introducen estas relaciones en la ecuación de energía de disipación (2) y luego se busca el mínimo, ahora únicamente respecto de α y β , se llega a:

$$\frac{\partial E_d}{\partial \alpha} (\alpha = \beta = 0) = 0 \Rightarrow -\int_{\Omega} \delta v' \operatorname{div} q \, dV + \int_{\Gamma} \delta v' (t - \bar{t}) \, dA + \int_{\Gamma} (2\mu \underline{g}(\delta v) \underline{n})' (\bar{v} - v) \, dA = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \beta} (\alpha = \beta = 0) = 0 \Rightarrow -\int_{\Omega} \operatorname{div} v \, \delta p \, dV + \int_{\Gamma} -\delta p \, n' (\bar{v} - v) \, dA = 0 \quad (22)$$

Como (21) y (22) deben cumplirse para todo δp y δv , siendo estas dos variables independientes, también debe cumplirse la suma, lo cual lleva al principio variacional utilizado en el presente trabajo.

$$\int_{\Omega} \delta v' \operatorname{div} q \, dV + \int_{\Omega} \operatorname{div} v \, \delta p \, dV = \int_{\Gamma} \delta v' (t - \bar{t}) \, dA - \int_{\Gamma} \delta t' (\bar{v} - v) \, dA \quad (23)$$

INTERPOLANTES MÍNIMOS CUADRADOS MÓVILES

En función de obtener buenas aproximaciones a un costo razonable es preciso construir bases que satisfagan algún criterio de optimalidad, es decir, óptimo ajuste para un número dado de puntos. Un método especialmente promisorio y que satisface ese criterio es el llamado "mínimos cuadrados móviles" (Moving least squares), o también mínimos cuadrados ponderados. El método es descrito con amplitud en las referencias [4] y [5], aquí solo se brinda una descripción somera.

En el ajuste por mínimos cuadrados ordinario se buscan los coeficientes de una aproximación polinómica. Para un polinomio de grado 2 en dos dimensiones se tiene:

$$u(x,y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 \quad (24)$$

Resulta conveniente definir vectores

$$\underline{a}' = (a_1, \dots, a_6) \quad (25)$$

$$\underline{p}' = (1, x, y, x \cdot y, x^2, y^2) \quad (26)$$

y escribir:

$$u(x,y) = \underline{a}' \cdot \underline{p} \quad (27)$$

Dado un conjunto de N datos, asociados a puntos del plano, el ajuste por mínimos cuadrados consiste en minimizar el error cuadrático medio

$$E^2 = \sum_i^N (u(x_i, y_i) - f_i)^2 \quad (28)$$

La solución es un conjunto de coeficientes numéricos a . Este método es poco flexible y da una interpolación global, poco adecuada en mecánica computacional. Con el objeto de obtener aproximaciones locales, más versátiles, es conveniente minimizar una norma ponderada, del tipo:

$$J_{(x)} = \sum_i^N W_i(x,y) \cdot [u(x_i, y_i) - f_i]^2 \quad (29)$$

De este modo, el valor de u en el punto (x_i, y_i) será más fuertemente influido por los datos cercanos al punto, si los pesos se eligen adecuadamente como funciones decrecientes con la distancia, es decir,

$$W_i(\underline{x}) = W\left(\left|\underline{x} - \underline{x}_i\right|\right) \quad (30)$$

Más aún, dado que los pesos son funciones, también lo será la norma de (29) y por ende lo serán los coeficientes a de (27), es decir

$$a = a(x) \quad (31)$$

De este modo la función aproximante no será ya un simple polinomio sino una función que produce el mejor ajuste con los datos en la norma (29), lo cual depende de las funciones de ponderación elegidas. Por ello el método se denomina mínimos cuadrados ponderados o móviles.

Derivando (29) respecto de los coeficientes a se obtienen las "ecuaciones normales"

$$\underline{A}(x) \cdot \underline{a}(x) = \underline{B}(x) \cdot \underline{u} \quad (32)$$

donde:

$$\underline{A}(x) = \sum W_i(x) \cdot \underline{P}(x_i) \cdot \underline{P}'(x_i) \quad (33)$$

$$\underline{B}(x) = [W_1(x) \cdot \underline{P}(x_1), W_2(x) \cdot \underline{P}(x_2), \dots, W_N(x) \cdot \underline{P}(x_N)] \quad (34)$$

$$\underline{u}' = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (35)$$

De donde se obtiene:

$$u^h(x) = \underline{P}'(x) \cdot \underline{a}(x) = \underline{P}'(x) \cdot \underline{A}^{-1}(x) \cdot \underline{B}(x) \cdot \underline{u} = \sum \varphi_i(x) \cdot u_i \quad (36)$$

Quedando entonces definidas las funciones de forma ($\varphi_i(x)$). No obstante, cuando la matriz A no es bien condicionada, la ecuación (36) no puede resolverse con la precisión deseada. Es por lo tanto adecuado buscar una base ortogonal que permita que la matriz A sea diagonal. Con estas consideraciones se obtiene ahora una nueva base [6], que cumple este requisito:

$$q_k(\underline{x}, \underline{x}) = p_k(\underline{x}) - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}(\underline{x}) q_j(\underline{x}, \underline{x}), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (37)$$

Siendo

$$a_{kj}(\underline{x}) = \frac{\sum_i w_i(\underline{x}) p_k(\underline{x}_i) q_j(\underline{x}_i, \underline{x})}{\sum_i w_i(\underline{x}) q_j^2(\underline{x}_i, \underline{x})} \quad (38)$$

En (37) y (38) \underline{x} representa el punto en donde es evaluado el polinomio. La matriz A es ahora diagonal y la (36) lleva a:

$$a_j(\underline{x}) = \frac{\sum_i w_i(\underline{x}) q_j(\underline{x}_i, \underline{x}) u_i}{b_j} \quad j=1, 2, \dots, m \quad (39)$$

Donde

$$b_j = \sum_i w_i(\underline{x}) q_j^2(\underline{x}_i, \underline{x}) \quad (40)$$

Con lo cual las funciones de forma quedan definidas ahora por:

$$\varphi_i(\underline{x}) = w_i(\underline{x}) \sum_j^m C_{ij}(\underline{x}) \quad (41)$$

$$C_{ij}(\underline{x}) = \frac{q_i(\underline{x}, \underline{x}) q_j(\underline{x}, \underline{x})}{b_j(\underline{x})} \quad (42)$$

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Se integra por partes el primer término de la (23):

$$\int_{\Omega} \underline{q} : \delta \underline{q} \, dV - \int_{\Omega} \text{div} \, \underline{v} \, \delta p \, dV = \int_{\Gamma} \underline{t} \cdot \delta \underline{v} \, dA - \int_{\Gamma} \underline{t}' \cdot \delta \underline{v} \, dA - \int_{\Gamma} \underline{v}' \cdot \delta \underline{t} \, dA - \int_{\Gamma} \underline{v} \cdot \delta \underline{t}' \, dA \quad (43)$$

donde $\delta \underline{q} = \underline{q}(\delta \underline{v})$. Por otra parte:

$$\underline{t} = \underline{q} \cdot \underline{n} = -p \underline{n} + 2\mu \underline{q}(\underline{v}) \cdot \underline{n} \quad (44)$$

Entonces, de las ec(43), (44) y (2) puede obtenerse:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} p \text{div} \, \delta \underline{v} \, dV + 2 \int_{\Omega} \mu \underline{q} : \delta \underline{q} \, dV - \int_{\Omega} \text{div} \, \underline{v} \, \delta p \, dA = \\ & = \int_{\Gamma} \underline{t} \cdot \delta \underline{v} \, dA - \int_{\Gamma} p \delta \underline{v}' \cdot \underline{n} \, dA - 2 \int_{\Gamma} \mu \underline{v}' \cdot \delta \underline{q} \cdot \underline{n} \, dA - \int_{\Gamma} \underline{v}' \cdot \underline{n} \, \delta p \, dA - 2 \int_{\Gamma} \mu \underline{v} \cdot \delta \underline{q} \cdot \underline{n} \, dA \end{aligned} \quad (45)$$

Se definen ahora un conjunto de $3n$ funciones de peso (n : número de nodos):

$$\delta \underline{w}_i(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \delta v_{ix} \\ \delta v_{iy} \\ \delta p_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

Y se suponen ahora las formas funcionales:

$$\delta \underline{a}_i(\underline{x}) = \underline{A}_i(\underline{x}) \delta \underline{a}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (47)$$

Siendo,

$$\underline{A}_i(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \phi_i & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & \psi_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (48)$$

$$\delta \underline{a}_i = \begin{pmatrix} \delta u_i \\ \delta v_i \\ \delta p_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (49)$$

Los campos de velocidad y presión se interpolan con las mismas funciones de forma que las variaciones elementales, ie,

$$\underline{W}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \underline{A}_i(\underline{x}) \underline{a}_i \quad (50)$$

y se definen para simplificar,

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$\underline{B}_i = \underline{L}_i \cdot A_i \quad (52)$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} \overline{i}_x \\ \overline{i}_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$\underline{b}'_i = \underline{d}'_i \cdot A_i \quad (56)$$

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Entonces la ecuación (45) resulta en:

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega} \delta a'_i \underline{b}_i \underline{Z}'_i \underline{w} dV + 2 \int_{\Omega} \mu \delta a'_i \underline{B}'_i \underline{D} \underline{L}_i \underline{W} dV - \int_{\Omega} \delta a'_i \underline{A}'_i \underline{Z} \underline{d}'_i \underline{W} dV = \\ & = \int_{\Gamma} \delta a'_i \underline{A}'_i \underline{i} dA - \int_{\Gamma} \delta a'_i \underline{A}'_i \underline{n} \underline{Z}'_i \underline{W} dA - 2 \int_{\Gamma} \mu \delta a'_i \underline{A}'_i \underline{N} \underline{L}_i \underline{W} dA + 2 \int_{\Gamma} \mu \delta a'_i \underline{B}'_i \underline{N}' \underline{W} dA + \\ & - \int_{\Gamma} \delta a'_i \underline{A}'_i \underline{Z} \underline{n}' \underline{W}' dA + \int_{\Gamma} \delta a'_i \underline{A}'_i \underline{Z} \underline{\overline{v}}' \underline{n} dA - 2 \int_{\Gamma} \mu \delta a'_i \underline{B}'_i \underline{N}' \underline{\overline{v}} dA \end{aligned} \quad (58)$$

Como debe cumplirse para un $\delta a'_i$ arbitrario la (58) se transforma en el sistema:

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f} \quad (59)$$

donde

$$\begin{aligned} K_{ij} = & 2 \int_{\Omega} \mu \underline{B}'_i \underline{D} \underline{B}'_j dV - \int_{\Omega} (\underline{b}_i \underline{Z}'_i \underline{A}'_j + \underline{A}_i \underline{Z} \underline{b}'_j) dV - \int_{\Gamma} (\underline{A}_i \underline{n} \underline{S}'_j \underline{Z}'_i \underline{A}'_j + \underline{A}_i \underline{Z} \underline{S}'_j \underline{n}' \underline{A}'_j) dA + \\ & - 2 \int_{\Gamma} \mu (\underline{A}_i \underline{N} \underline{S}'_j \underline{B}'_j + \underline{B}'_i \underline{N} \underline{S}'_j \underline{A}'_j) dA \end{aligned} \quad (60)$$

$$f_i = \int_{\Gamma} \underline{A}'_i \underline{i} dA - \int_{\Gamma} \underline{A}'_i \underline{Z} \underline{n}' \underline{S}'_j \underline{\overline{v}} dA - 2 \int_{\Gamma} \mu \underline{B}'_i \underline{N}' \underline{S}'_j \underline{\overline{v}} dA \quad (61)$$

Como puede observarse la matriz K es simétrica. En las ecuaciones sobre la frontera de Dirichlet se ha introducido la matriz S que contempla la dirección en que son impuestas las velocidades.

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

siendo: $s_x = 1$ si v_x esta prescripto en Γ_u
 $s_x = 0$ en caso contrario
 y análogamente con s_y .

RESULTADOS

En primer lugar se corrió, como *path test*, imponiendo condiciones de Dirichlet a la entrada y en los bordes superior e inferior de dos placas paralelas ($V_x=1$, $V_y=0$). Se eligió la geometría que muestra la figura 1. El caso se ha corrido con 30 *nodos*. Se ha obtenido la velocidad que corresponde (V_x uniforme e igual a la unidad) en todo el interior y en la salida. La presión obtenida es cercana a cero (1.E-8) y constante en todo el dominio. El polinomio generador (ver ec.(26), (37) y (38)) para la interpolación en velocidades en cada nodo se eligió de segundo orden, en tanto que para la presión se adoptaron polinomios de primer orden.

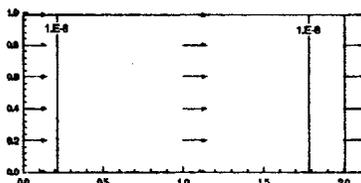


Figura 1: path test

En segundo lugar, con la geometría que se muestra en la figura 2, y siempre para placas paralelas, se corrió con una parábola de velocidades a la entrada ($V_x=4.x(1-x)$) y velocidad impuesta en los bordes superior e inferior ($V_x=V_y=0$). Como se sabe, la solución del problema se corresponde con velocidad igual a la impuesta en la entrada para todo corte a $x=cte$, en tanto que el gradiente de presiones resulta constante y en la dirección x . Como se puede observar, los resultados obtenidos concuerdan con la solución exacta. Los campos de velocidades y presiones se han interpolado con los mismos ordenes que en primer caso.

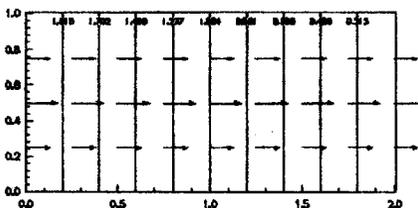


Figura 2: parábola a la entrada

Finalmente, se corrió el caso que muestra la figura 3. En este caso se ha elegido a la entrada una parábola truncada, siguiendo la siguiente ecuación:

$$V_x = 0.816 \quad \text{para } 0.2 \leq y \leq 0.8$$

$$V_x = 5.1(1-y)y \quad \text{para otro } y$$

La solución del problema debe ser el desarrollo de una parábola exacta para las velocidades (en x) a la salida (valor máximo 1). Los resultados numéricos obtenidos coinciden con esta solución, como se aprecia en la figura 3. No obstante, los valores de presión sobre el final de las placas paralelas deberían ser constantes a $x=cte$ (es decir, en la figura se apreciarían como rectas). La solución mejora sensiblemente con mayor cantidad de nodos, aunque aumenta considerablemente el tiempo de cálculo. Este caso se corrió con 45 nodos y la resolución tomó un tiempo de computadora del orden de los 600 segundos (PC 486 DX2). Para los polinomios en velocidad se eligió orden 2 y para la presión polinomios de orden 1, como en los anteriores casos.

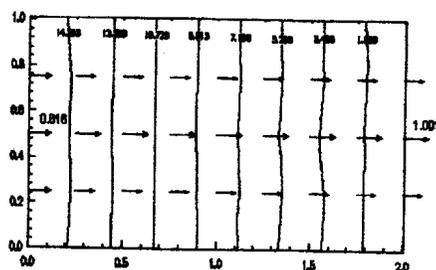


Figura 3: parábola truncada a la entrada

Otros casos: Se han realizado diversas experiencias adicionales. La más significativa es quizás la realizada con las mismas condiciones del tercer caso pero interpolando la presión y la velocidad con polinomios de igual orden (polinomios completos de segundo grado). Los resultados concuerdan con los exhibidos en la figura 3. No obstante, otras interpolaciones llevan a marcadas oscilaciones en los campos de presión (por ejemplo, velocidad y presiones lineales o velocidad lineal y presión cuadrática). El método presenta además inconvenientes para captar variaciones abruptas en velocidad, y es por eso que en el tercer caso se impuso a la entrada una parábola truncada y no simplemente una velocidad uniforme. Una vez más la solución se encamina con una mayor densificación pero a costa de un mayor consumo de tiempo de CPU.

En todos los casos discutidos se ha trabajado con cuatro celdas rectangulares de 8 puntos de Gauss cada una para la integración numérica.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un esquema numérico basado en los llamados métodos difusos o sin red. Derivando el principio variacional correspondiente para el presente caso se implementó luego el esquema numérico. Los resultados obtenidos muestran que el método ajusta bien en ciertos casos, mostrando campos de velocidades y presiones estables. En otros casos, como ser abruptas discontinuidades en la velocidad, el método muestra desventajas con respecto, por ejemplo, al MEF, y es necesario continuar trabajando a fin de poder obtener correctas aproximaciones a un razonable costo computacional.

Agradecimientos:

Los autores desean expresar su agradecimiento al Ing. Martín Goñi y a la Srta. Adriana Giacopini por sus colaboraciones en la confección del presente trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, J. "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements", *Computational Mechanics*, 10 (1992), pp. 307-318.
- [2] Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., "Element Free Galerkin Methods", *Int. J. Num. Methods Engrg.* 37 (1994), pp. 229-256, .
- [3] Lu, Y.Y., Belytschko, T. and Gu L., "A new implementation of the element free Galerkin method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 113(2), (1994), pp. 397-414.
- [4] M. Gunzburger, "Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows" Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [5] Lancaster, P. and Salkauskas, K., "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods", *Mathematica Computational*, 37 (1981) 141-158.
- [6] Lancaster, P. and Salkauskas, K., "Curve and Fitting" Academic Press, Boston, MA, 1986.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for transparency and accountability, particularly in financial reporting and auditing. The text notes that incomplete or inaccurate records can lead to significant errors and potential legal consequences.

2. The second part of the document addresses the challenges associated with data management and storage. It highlights the need for robust security measures to protect sensitive information from unauthorized access and data breaches. The author suggests implementing multi-layered security protocols, including encryption and access controls, to ensure the integrity and confidentiality of the data.

3. The third part of the document focuses on the importance of regular data backups and disaster recovery planning. It explains that unexpected events, such as hardware failures or natural disasters, can result in the loss of critical data. By maintaining up-to-date backups and having a clear recovery strategy in place, organizations can minimize downtime and ensure business continuity.

4. The fourth part of the document discusses the role of technology in streamlining operations and improving efficiency. It mentions the use of cloud-based solutions and automation tools to reduce manual tasks and enhance productivity. The text also touches upon the importance of staying current with technological advancements to maintain a competitive edge in the market.

5. The fifth and final part of the document provides a summary of the key points discussed and offers some concluding thoughts. It reiterates the importance of a proactive approach to data management and the need for continuous improvement in organizational processes. The author encourages readers to take the time to review their current practices and make necessary adjustments to ensure long-term success.