



SOLUCIÓN DEL FLUJO EN CANALES Y DEL FLUJO DE AGUA SUBTERRÁNEA USANDO  
UN MODELO ACOPLADO EN ELEMENTOS FINITOS

Leticia B. Vionnet y Carlos A. Vionnet  
Universidad Nacional del Litoral  
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. CC 495 - 3000 Santa Fe - Arg.

RESUMEN

En el presente trabajo se describe un modelo en elementos finitos que acopla el escurrimiento en canales y el flujo de agua subterránea. La formulación matemática del flujo subterráneo se basa en la teoría de flujos en medios porosos saturados mientras que el flujo en canales abiertos es simulado mediante la aproximación de la onda cinemática. A diferencia del tratamiento clásico como función fuente que recibe el término de acople entre los dos sistemas, se demuestra que el mismo aparece naturalmente en la formulación débil de las ecuaciones de gobierno, siendo por lo tanto necesario introducir un corte de ramificación en el dominio computacional. La resolución de la ecuación del flujo subterráneo se logra utilizando el método clásico de Bubnov-Galerkin, con elementos triangulares y una aproximación lineal de la carga hidráulica. La resolución de la ecuación de la onda cinemática se obtiene a su vez mediante una formulación de Petrov-Galerkin. El modelo es finalmente aplicado a un problema real obteniéndose resultados altamente satisfactorios.

ABSTRACT

In this work a finite element model that couples open channel flow and ground-water flow is presented. The mathematical formulation of the ground-water flow is based on the theory of flow through porous media while the open channel flow is simulated by means of the kinematic wave approximation. It is shown that the coupling term arises naturally from the weak formulation of the governing equations making it necessary to introduce a branch cut in the computational domain, contrary to its standard treatment as a source term. The solution of the ground-water flow equation is accomplished with the Bubnov-Galerkin method, with triangular elements and a linear approximation of the hydraulic head. The kinematic wave equation is solved using a Petrov-Galerkin formulation instead. The model is finally applied to a real problem with highly satisfactory results.

**1. Introducción**

El estudio de la interacción entre acuíferos y ríos en el ámbito de la hidrología no es un tema de investigación reciente. Sin embargo, los métodos y la sofisticación de su tratamiento evolucionaron de la mano del desarrollo de las computadoras y del creciente conocimiento científico sobre el tema. En un comienzo, investigadores como Theis [1], Hantush [2] y Glover [3] popularizaron métodos analíticos para cuantificar el efecto que la extracción de agua subterránea produce sobre el escurrimiento en canales abiertos, aún cuando muchas de las hipótesis simplificadoras que acompañaron los métodos analíticos fueron luego superadas por los modelos numéricos. A pesar de sus limitaciones, los modelos que resuelven sólo el flujo subterráneo aún gozan de gran aceptación (por ej. MODFLOW [4]). No obstante, el tratamiento sencillo que éste tipo de modelo brinda al escurrimiento superficial, una de las componentes esenciales del problema, hace que en numerosos casos de interés práctico MODFLOW no sea la herramienta más adecuada. Por lo tanto, un modelo que resuelva en forma conjunta no

sólo el flujo subterráneo sino también el flujo en canales y su interacción mutua con un grado de sofisticación apropiado, constituye una poderosa herramienta para evaluar el impacto de la explotación del recurso hídrico subterráneo. En este sentido pueden nombrarse contribuciones como las de Pinder y Sauer [5], Cunningham y Sinclair [6], Glover [7], Swain y Wexler [8], por citar sólo unas pocas.

En este trabajo se presenta un desarrollo numérico en elementos finitos alternativo que simula el escurrimiento en canales abiertos y el flujo en medios porosos saturados, el que a diferencia de los trabajos citados, trata el término de acople por intermedio de la condición de borde natural del método. Finalmente, el modelo es usado para resolver un problema real a escala regional, obteniéndose resultados altamente satisfactorios.

## 2. Modelo matemático

El modelo matemático aquí propuesto se basa en acoplar la ecuación del flujo de agua en medios porosos saturados y la ecuación de propagación de una onda cinemática en canales abiertos. La primera de ellas establece el balance del flujo de masa integrado en la vertical a través de un acuífero libre, y puede escribirse como [9]

$$\nabla \cdot \mathbf{K}(h - \eta) \nabla h + S_T - S_y \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

donde  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$  es el operador gradiente en el plano horizontal,  $\mathbf{K}$  es el tensor de conductividad hidráulica,  $h$  es la elevación de la napa freática y  $\eta$  es la elevación del fondo del acuífero, ambas medidas desde un plano de referencia arbitrario,  $S_T$  es un término fuente/sumidero,  $S_y$  es el coeficiente de almacenamiento y  $t$  es el tiempo. En la expresión anterior se ha supuesto que el acuífero está aislado de cualquier formación geológica subyacente, y que los efectos de la elasticidad del material sólido son despreciables. Si bien la ecuación (1) es válida para un acuífero freático bajo la hipótesis de Dupuit, también es válida para un acuífero confinado mediante la sustitución  $T = \bar{K}(h - \eta)$  (= transmisividad), en cuyo caso deviene una ecuación lineal.

La segunda ecuación a resolver es la aproximación de la onda cinemática a las ecuaciones de Saint Venant, basada en la hipótesis de que los efectos de la fricción y de la gravedad son dominantes con respecto a otras fuerzas tales como la presión y la inercia. Si además se adopta una relación constitutiva entre la sección transversal de flujo  $A$  y la descarga  $Q$  de la forma  $Q = \gamma A^m$ , donde  $\gamma$  y  $m$  son parámetros geométricos que relacionan la pendiente del fondo del canal  $S$  y la rugosidad del canal acorde al tipo de expresión de Manning o de Chézy que se utilice, se obtiene [10]

$$\frac{\partial A}{\partial t} + C(A, s) \frac{\partial A}{\partial s} = \sigma(s, t) \quad (2)$$

En (2),  $s$  es la longitud de arco a lo largo del canal,  $C(A, s) = \partial Q / \partial A$  (manteniendo  $s$  fija) es la celeridad de la onda, y  $\sigma$  es el término de acople o interacción entre ambos sistemas. Ahora bien, prácticamente todas las formulaciones matemáticas en las que se basan los modelos que resuelven el flujo subterráneo y el flujo superficial en forma integral tratan a  $\sigma(s, t)$  como una función fuente en la ecuación del flujo subterráneo. Sin embargo, aquellos modelos basados en aproximaciones en elementos finitos (por ej. [6], [7]) no hacen uso de una de las propiedades más ventajosas del método, cual es la incorporación automática de los flujos a lo largo de las fronteras del dominio en las ecuaciones discretizadas. En este trabajo, dicho término se simula a través de una integral de flujo a lo largo de la frontera que representa el río. El uso de la primera identidad de Green para obtener la expresión variacional correspondiente a la ecuación (1) da lugar a la aparición de la integral de línea  $\int W \mathbf{K}(h - \eta) \partial h / \partial n ds$ , extendida a lo largo de la frontera  $\partial \Omega$  para el caso de un tensor de conductividad isotrópica, siendo  $W$  una función de peso admisible. Teniendo en cuenta que  $\mathbf{K}(h - \eta) \partial h / \partial n$  representa un flujo normal a  $\partial \Omega$ , este término puede asociarse naturalmente con el intercambio de agua que tiene lugar entre el acuífero y el río a lo largo de la porción de río  $\Gamma_R$  de la frontera  $\partial \Omega$  que delimita el dominio  $\Omega$ . Es sabido que el uso de la primera identidad de Green requiere de un dominio simplemente conexo, así que para ríos totalmente penetrantes es necesario introducir un corte de ramificación a fin de evitar la existencia de una función  $h$  multivaluada a lo largo de la frontera  $\Gamma_R$  (Figura 1).

En base a la ley de Darcy, el flujo neto total  $\sigma$  entre el acuífero y un río parcialmente penetrante en contacto hidráulico con el acuífero puede expresarse como [11]

$$\sigma = \sigma^+ + \sigma^- = C(h - h_s) \quad , \quad \text{a lo largo de } \Gamma_R \quad (3)$$

donde el supraíndice  $-$  está asociado al vector normal unitario  $\vec{n}$  saliente a  $\Gamma_R$  en la dirección negativa,  $C = K_e P / e$  es la conductancia hidráulica de la interfase,  $P$  es el perímetro mojado del canal,  $K_e$  es la conductividad hidráulica de los sedimentos del fondo del río ( $K_e \ll K$ ),  $e$  es el espesor de dichos sedimentos y  $h_s$  es la elevación del pelo de agua en el canal medida con respecto al mismo plano de referencia que  $h$  y  $\eta$ . De lo contrario, para el caso de un río totalmente penetrante, se utiliza

$$\sigma^+ = C^+(h^+ - h_s) \quad , \quad \text{a lo largo de } ia \quad (4)$$

$$\sigma^- = C^-(h^- - h_s) \quad , \quad \text{a lo largo de } gi \quad (5)$$

Por último, si no hubiera conexión hidráulica entre el río y el acuífero, el flujo entre ambos deviene constante y está dado por

$$\sigma = C(h_b - h_s) \quad , \quad \text{a lo largo de } \Gamma_R \quad (6)$$

donde  $h_b$  es la elevación del fondo del lecho del canal.

Eligiendo un grupo de escalas que tenga en cuenta la disparidad en el tiempo de respuesta de ambos sistemas [12], es posible obtener la forma adimensional apropiada de las ecuaciones (1) y (2). Utilizando notación tensorial, y teniendo presente que todas las variables están ahora normalizadas, la ecuación (1) puede reescribirse como

$$P_e \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - S_T = 0 \quad (7)$$

donde el flujo  $q_i$  se define como

$$q_i = -K_{ij}(h - \eta) \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (8)$$

y  $P_e$  es un número adimensional similar al número de Peclet. De igual manera, la ecuación (2) escrita en función de variables normalizadas toma la forma

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial A}{\partial s} = Q_a B_i (h - h_b - \epsilon u) \quad (9)$$

donde  $v$  es la velocidad media adimensional del flujo superficial calculada mediante la expresión de Manning,  $Q_a$  es un número adimensional aquí denominado número de flujo que representa el cociente entre la tasa volumétrica de bombeo y la descarga media en el canal,  $B_i$  es una especie de número de Biot o conductancia adimensional,  $\epsilon$  es un parámetro adimensional que mide la distorsión entre las escalas verticales, y  $u$  es la profundidad adimensional del agua en el canal.

### 3. Modelo numérico

Asumiendo una aproximación lineal continua por elementos de  $h$  sobre la partición  $\Omega_e$  del dominio  $\Omega$ , la formulación débil correspondiente a la ecuación normalizada del flujo subterráneo (7) puede escribirse ahora como

$$P_e \int_{\Omega_e} \frac{\partial h}{\partial t} \psi_i \, d\Omega + \int_{\Omega_e} T_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\Omega_e} S_T \psi_i \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \sigma \psi_i \, ds \quad , \quad i = 1 \dots N \quad (10)$$

donde  $\sigma = \vec{n} \cdot \vec{q}$  es el flujo a través del contorno  $\partial\Omega_e$  ( $\vec{q}$  está dado por (8)),  $\psi_i$  son las funciones de prueba idénticas a las funciones de forma en el método de Galerkin,  $n_i \equiv \vec{n} = (\cos \nu, \sin \nu)$  es el vector unitario normal saliente a  $\partial\Omega_e$ , y  $\nu$  es el ángulo entre  $\vec{n}$  y el eje horizontal medido positivo en el sentido contrario a las agujas del reloj. El segundo término del miembro de la derecha representa una integral de flujo, utilizada aquí para simular la interacción entre el río y el acuífero a lo largo de la porción  $\Gamma_R$  del

contorno  $\partial\Omega_e$ .

Asumiendo a su vez una aproximación lineal continua por trozos de  $A$  sobre la partición  $\Delta$  en  $NSR$  elementos de la frontera  $\Gamma_R$ , la formulación débil de la ecuación de la onda cinemática convenientemente normalizada deviene

$$\int_{\Gamma_R} (\phi_i + p_i) [\sum a_j \phi_j + \frac{5}{3} \gamma (\sum a_j \phi_j)^{2/3} \sum a_k \phi_k - \sum g_j \phi_j] ds = 0, \quad i = 1, \dots, NSR + 1 \quad (11)$$

donde  $\dot{\cdot} \equiv d/dt$  y  $' \equiv d/ds$ . Aquí  $\phi_i$  representa las funciones de forma y  $p_i$  la perturbación que se adiciona a las mismas en el método de Petrov-Galerkin, definida en el presente trabajo como  $\frac{\Delta s}{\sqrt{15}} \frac{d\phi_i}{ds}$  ([13], [14]). Por último, la compatibilidad entre los espacios de aproximación en ambos sistemas impone que  $\phi_i(s) \equiv \psi_i(\vec{x}) \forall \vec{x} \ni \Gamma_R$ .

En notación matricial, la forma semidiscreta de las ecuaciones anteriores resulta

$$P_e R \dot{h} + A h = b \quad (12)$$

$$D \dot{a} + c(a) = Dg \quad (13)$$

donde  $R$  representa la matriz de masa,  $A$  las contribuciones de los términos fuentes y/o sumideros más la contribución de la integral de línea que incorpora el flujo entre acuífero y río,  $b$  el vector de carga y  $h$  el vector incógnita. Por otra parte,  $D$  es la matriz de masa consistente,  $c$  es el vector no lineal que contiene el término convectivo y  $g$  es el vector que incluye el término de la interacción entre ambas componentes hidrológicas, dado por alguna de las ecuaciones (3)-(6).

La discretización temporal de la ecuación (12) está basada en el método ponderado. En consecuencia, el sistema de ecuaciones a resolver se reduce a

$$[R + \omega_1 A^{n+1}] h^{n+1} = [R - \omega_2 A^{n+1}] h^{n+1} + \omega_2 b^n + \omega_1 b^{n+1} \quad (14)$$

donde  $n$  denota el nivel de tiempo  $t_n = n\Delta t$ ,  $\omega_1 = \theta\Delta t/P_e$  and  $\omega_2 = (1 - \theta)\Delta t/P_e$ . Las soluciones para el estado estacionario se obtienen con el método implícito ( $\theta = 1$ ) mientras que las soluciones transitorias se obtienen con el método de Crank-Nicolson-Galerkin (CNG,  $\theta = 1/2$ ). En general, tanto  $A$  como  $b$  dependen de  $h$  en forma no lineal, en cuyo caso se utiliza una iteración de Picard para avanzar la solución un paso de tiempo. Así la matriz  $A$  y el vector  $b$  son actualizados en cada iteración de forma tal que ambos reflejen la estimación más reciente de  $h$ . Por otra parte, la integración temporal de la ecuación de onda se basa en el método de Newton-Raphson para resolver el sistema de ecuaciones no lineales en cada nivel temporal resultante de aplicar un esquema de CNG a la ecuación (13). Por último, se implementó un esquema de avance de la solución del sistema (12-13) acorde al tiempo de respuesta característico de cada componente hidrológica y basado en la estricta preservación de la masa del término de intercambio [12].

#### 4. Validación del modelo

Las ecuaciones aquí planteadas han sido profusamente tratadas en la literatura y resueltas analíticamente para cada una de las componentes del sistema bajo situaciones extremadamente idealizadas. Sin embargo, el problema acoplado en su versión más general no admite una solución cerrada. La validación del modelo se encaró por lo tanto en forma desagregada para cada módulo, obteniéndose una excelente comparación entre resultados analíticos y numéricos. Un detalle exhaustivo de los ensayos numéricos realizados puede encontrarse en [12].

#### 5. Aplicación del modelo

La aplicación práctica del modelo se realizó en la cuenca del Río Bill Williams, Arizona, USA, caracterizada por la escasez de datos de campo. La malla de elementos

finitos (Figura 2) contiene 387 nodos con 604 elementos triangulares, y engloba una superficie de  $84,6 \text{ Km}^2$ . La misma posee un largo aproximado de  $55 \text{ Km}$  y su desarrollo lateral varía entre un mínimo de  $500 \text{ m}$  en el extremo derecho y un máximo de  $9.000 \text{ m}$  en la parte central. El río Bill Williams atraviesa la región modelada de derecha a izquierda, se origina por la descarga de la represa de Alamo y desemboca en el Lago Havasu, y está representado por 69 elementos lineales de entre  $600 \text{ m}$  y  $900 \text{ m}$  de longitud. Además del escurrimiento superficial, otras variables simuladas incluyen el consumo de agua por parte de la vegetación ribereña y la extracción de agua subterránea a través de pozos de bombeo localizados en la parte central de la malla (Figura 3). Las condiciones de borde implementadas son del primer tipo o de Dirichlet en el extremo derecho de la malla y del segundo tipo o de Neumann a lo largo de todo el resto de la frontera, con valores de flujo diferentes de acuerdo a la ubicación, valores que se estimaron en base a los escasos datos de campo disponibles.

La confiabilidad de los resultados obtenidos se estableció a partir de ciertos indicadores hidrológicos observados. El primero de ellos consiste en la desaparición, en condiciones de flujo normal, del escurrimiento superficial unos  $30 \text{ Km}$  aguas abajo de la represa de Alamo y el posterior resurgimiento del mismo aguas abajo de la zona de localización de los pozos de bombeo, situación que el modelo es perfectamente capaz de reproducir (Figura 4). Cabe mencionar que, aunque de magnitud diferente, este singular fenómeno ocurre aún cuando los pozos no están en operación. Como se aprecia en la Figura 4, el intercambio entre el agua superficial y la subterránea está altamente concentrado en una franja de casi  $12 \text{ Km}$ . La respuesta del sistema subterráneo frente al bombeo puede apreciarse en la Figura 5, donde se han graficado las curvas de nivel de la superficie freática correspondientes a un estado estacionario. Se destaca un claro descenso de los niveles freáticos en respuesta a la puesta en operación de los pozos de bombeo. La Figura 6 muestra algunos de los resultados obtenidos en condiciones transitorias. En particular se ha graficado la variación temporal del área de escurrimiento en tres puntos del recorrido del Río Bill Williams. El hidrograma simulado a los  $4.460 \text{ m}$  aguas abajo de la represa de Alamo preserva la forma del hidrograma de entrada al modelo, el que por brevedad se omite, reflejando que el intercambio volumétrico río-acuífero es mínimo a lo largo de este tramo. En el punto intermedio, ubicado en la progresiva  $31.039 \text{ m}$ , el río permanece seco la mayor parte del tiempo escurriendo sólo en forma esporádica en respuesta a crecidas de magnitud, hecho que concuerda con las observaciones de campo disponibles. Por último, en el punto más alejado de la presa ( $s = 48.234 \text{ m}$ ), el río no sólo responde a la frecuencia impuesta por el hidrograma de entrada al modelo sino que además refleja una escala temporal estacional claramente inducida por el ciclo anual de bombeo y el consumo de agua por parte de la vegetación ribereña, con una leve tendencia declinante.

### 6. Conclusiones

Desde el punto de vista numérico, tanto la formulación de Bubnov-Galerkin para el flujo subterráneo como la de Petrov-Galerkin para el flujo en canales abiertos producen soluciones altamente satisfactorias. El acople entre el sistema subterráneo y el superficial se logra explotando las condiciones de borde naturales del método de los elementos finitos, peculiaridad que no aparece incluida explícitamente en la mayoría de las formulaciones matemáticas encontradas hasta la fecha. Esto lleva a la eventual necesidad de introducir cortes de ramificación a lo largo de la frontera interna que represente el río. Por último, los resultados obtenidos con la aplicación del modelo en la cuenca del Río Bill Williams reproducen adecuadamente indicadores hidrológicos observados en la región.

### 7. Agradecimientos

Este trabajo fue totalmente financiado por un Grant del *Fish and Wildlife Service* (U.S.A.)

### 8. Referencias

- [1] Theis C.V. 1941. The effect of a well on the flow of a nearby stream. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 734-738.
- [2] Hantush M.S. 1959. Analysis of data from pumping wells near a river. *Jour.*

- Geophys. Res.*, 64 (11), 1921-1932.
- [3] Glover R.E. 1974. *Transient ground water hydraulics*. Dept. Civ. Eng., Colorado State University, Fort Collins, CO. 413 pp.
- [4] McDonald M.G. and A.W. Harbaugh. 1988. A modular three-dimensional finite difference ground-water flow model. U.S. Geological Survey Techniques of Water-Resources Investigations. Book 6, Chapter A1.
- [5] Pinder G.F. and S.P. Sauer. 1971. Numerical simulation of a flood wave modification due to bank storage effects. *Water Resour. Res.*, 7(1), 63-70.
- [6] Cunningham A.B. and P.J. Sinclair. 1979. Application and analysis of a coupled surface and groundwater model. *J. Hydrol.*, 43, 129-148.
- [7] Glover K.C. 1988. A finite element model for simulating hydraulic interchange of surface and ground water. U.S. Geological Survey, Water Resources Investigations Report 86-4319.
- [8] Swain E.D. and E.J. Wexler, 1993. A coupled surface-water and ground-water flow model for simulation of stream-aquifer interaction. U.S. Geological Survey Open-File Report 92-138, 162 pp.
- [9] Bear J. and A. Verruijt. 1987. *Modeling groundwater flow and pollution. Theory and Applications of Transport in Porous Media*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- [10] Chow V.T., D.R. Maidment and L.W. Mays. 1988. *Applied hydrology*. McGraw-Hill Book Company.
- [11] De Marsily G. 1986. *Quantitative hydrogeology*. Groundwater hydrology for engineers. Academic Press Inc., San Diego, USA.
- [12] Vionnet L.B. 1995. Investigation of stream-aquifer interactions using a coupled surface-water and ground-water flow model. Ph.D. Dissertation. Department of Hydrology and Water Resources, University of Arizona. Tucson, Arizona.
- [13] Raymond W.H. and A. Garder 1976, Selective dumping in a Galerkin method for solving wave problems with variable grids, *Mon. Weath. Rev.*, 104, 1583-1590.
- [14] Katopodes N.D. 1984. A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow. *J. Hydraul. Eng. ASCE*, 110, No.4, 450-466.

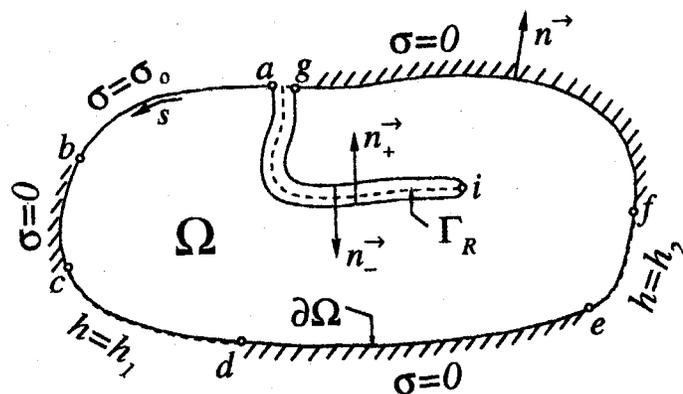


Figura 1: Dominio  $\Omega$  y corte de ramificación a lo largo de la frontera interna  $\Gamma_R$

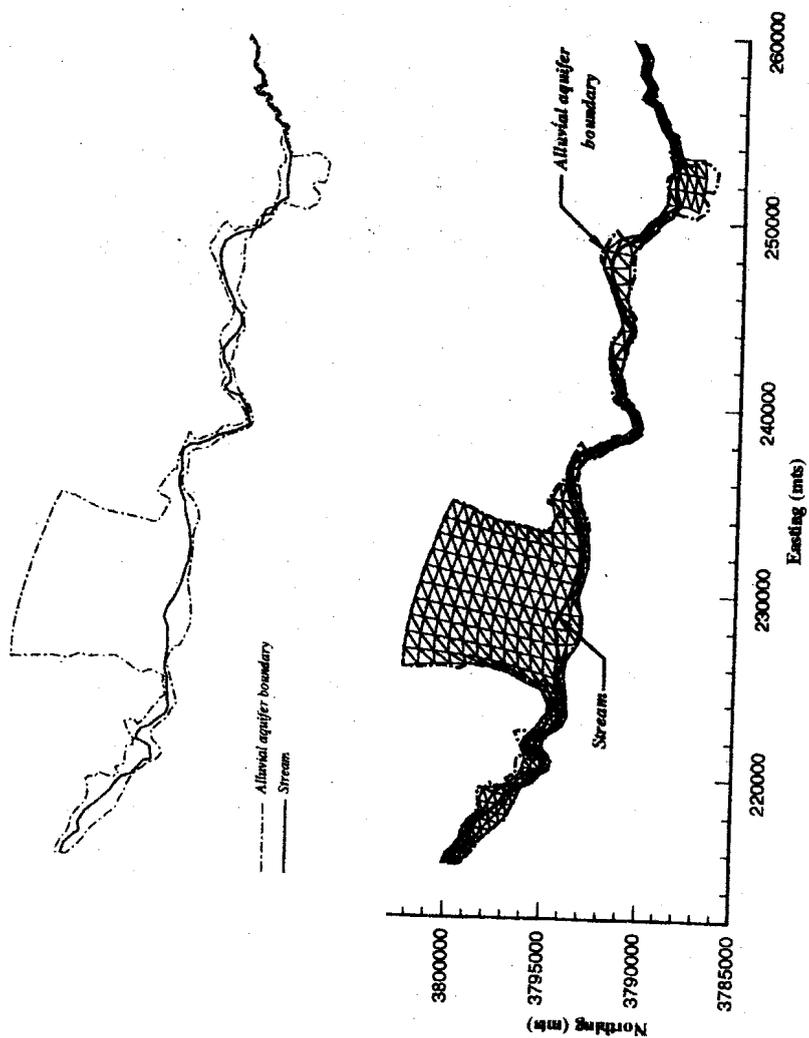


Figura 2: Malla de elementos finitos

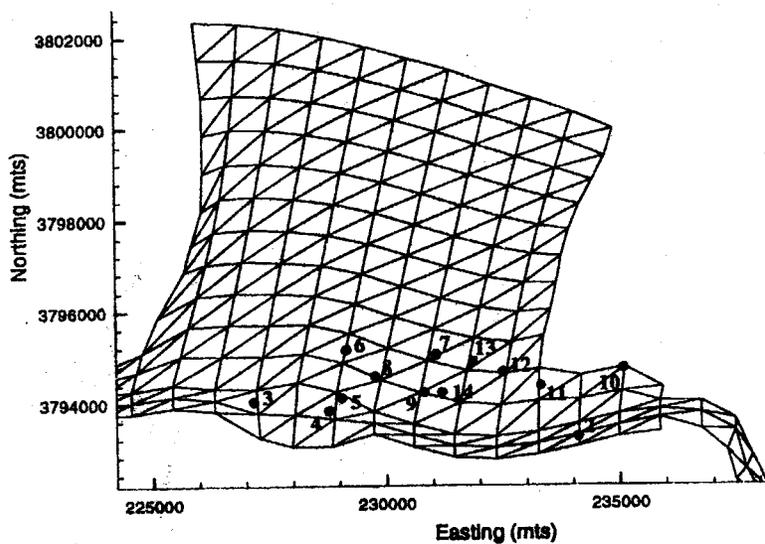


Figura 3: Ubicación de los pozos de bombeo dentro de la malla de elementos finitos

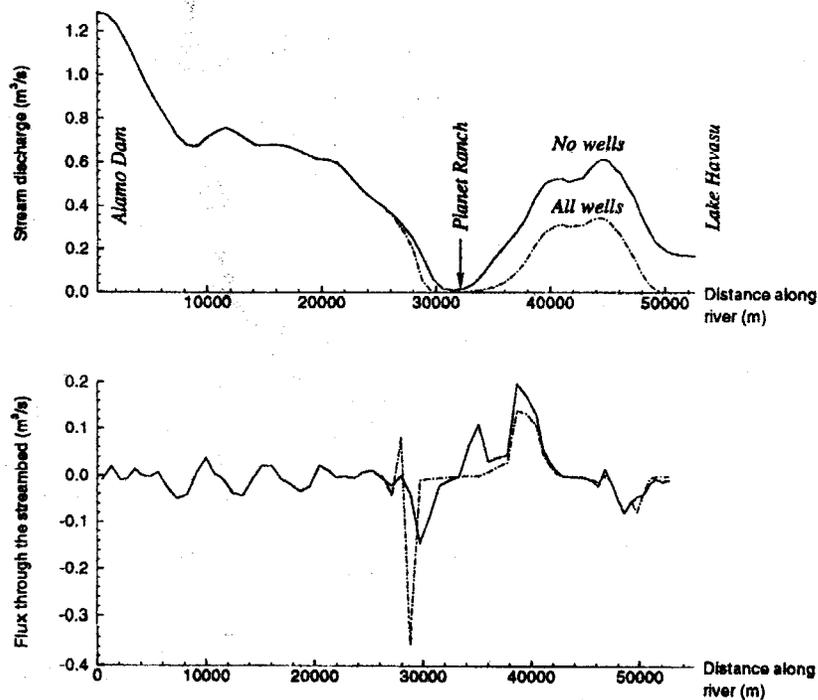


Figura 4: Resultados numéricos mostrando la descarga y el flujo a través del lecho del río

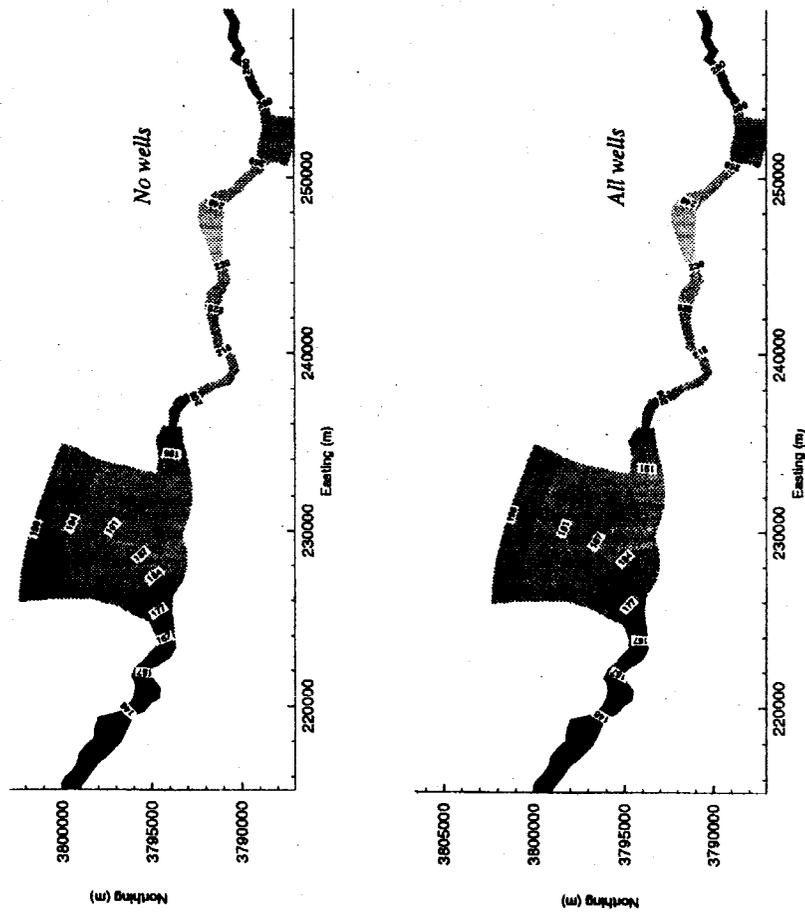


Figura 5: Líneas de igual nivel freático en estado estacionario

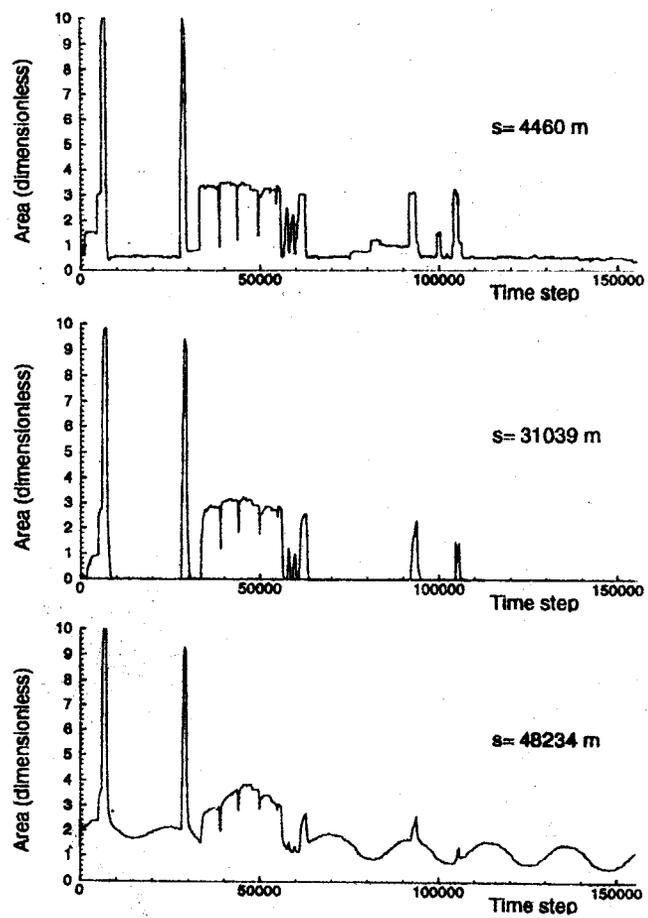


Figura 6: Variación temporal del área de escurrimiento  $A$