



UN MODELO NUMERICO DE DIFUSION PARA LA SIMULACION DE ESTRATIFICACION TERMICA EN CUERPOS DE AGUA

Alfredo TRENTO, Virginia VENTURINI y Ana María ALVAREZ
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas - U. N. del Litoral
CC 495 - (3000) Santa Fe
Email: atrento@fich.unl.edu.ar

Resumen

Se presenta un Modelo Matemático 1D de estratificación térmica con difusión turbulenta variable, para simular el comportamiento de grandes cuerpos de agua. La ecuación de transmisión de calor en la vertical se discretizó mediante un esquema numérico implícito, que considera la variabilidad espacial de la difusividad, parámetro principal del modelo. Se simuló la incidencia de un flujo advectivo con distinta temperatura a la del cuerpo de agua. Se calcularon ciclos estacionales de distribución de temperatura, ocurrencia de termoclina, flujos de calor debido a emisión de onda larga y corta y perfiles verticales de difusividad.

Abstract

A 1D Mathematical Model of Thermal Stratification with variable eddy diffusivity to simulate the behaviour of great water bodies, is presented. The vertical heat diffusion equation was solved by an implicit numerical scheme that accounts for the spacial variability of the eddy diffusivity, the main model parameter. The effect of an advective inflow with a temperature different than that of the water body, was simulated. The model allowed to calculate seasonal cycles of temperature distribution, thermocline generation, heat flows and vertical eddy diffusivity profiles.

INTRODUCCION

El conocimiento de los procesos físicos, químicos y biológicos en la dirección vertical es de vital importancia en reservorios, ya sean naturales o artificiales. Uno de esos procesos es el de estratificación térmica, el cual determina la distribución espacial de las variables de calidad de agua, como también su distribución temporal. El desarrollo informático de las últimas décadas, ha permitido resolver grandes sistemas de ecuaciones y por lo tanto simular con modelos matemáticos procesos ambientales de distinta complejidad. En este trabajo se presenta un Modelo Matemático Unidimensional de Difusividad de Remolino, que permite calcular los perfiles verticales de temperatura del agua en lagos y embalses, a través de la resolución de la ecuación de transmisión de calor.

La estratificación térmica ocurre por el calentamiento diferencial del reservorio a lo largo de su profundidad. En el mismo, la energía originada a partir de la radiación solar incidente se almacena y mezcla mediante la turbulencia. La capa donde tiene efecto la mezcla es el epilimnio, la del fondo es el hipolimnio y la de transición entre ambas es la llamada termoclina, [1]. El gradiente de temperatura es pequeño en las primeras y grande en la región de la termoclina. La termoclina puede ser de tipo estacional, típica de lagos de climas templados, y/o de tipo diaria, característica de lagos de regiones tropicales. La estratificación térmica es determinante de la distribución vertical del oxígeno disuelto, la DBO y de concentraciones de otras variables de calidad de agua.

En lagos y reservorios, una gran parte de la turbulencia proviene de la interacción entre el viento y el agua. La turbulencia como vehículo de energía se propaga según la resistencia que encuentra, medida por el trabajo que debe realizar para elevar dos capas de aguas de distinta densidad. La estratificación, la estabilidad y la viscosidad son quienes ofrecen resistencia a la turbulencia [2].

MODELO DE DIFUSION TURBULENTA

La ecuación de transferencia vertical de calor se expresa:

$$A(z) \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(A(z) K_H(z, T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{A(z)}{\rho C_p} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{Q_e}{A_e \Delta z} (T_e - T) \quad (1)$$

En la que $A(z)$ es el área transversal a la profundidad z , T es la temperatura del agua variable en el espacio y en el tiempo, ρ la densidad del agua y $\phi(z,t)$ un término de fuente de calor interno. C_p es el calor específico a volumen constante de agua. $K_H(z, T)$ es la difusividad de remolino para el transporte vertical de calor, principal parámetro del modelo, se considera variable a lo largo del tiempo y del espacio. v es la velocidad media vertical. Q_e , A_e y T_e corresponden al caudal, área y temperatura de un flujo ingresante al reservorio, respectivamente. $K_H(z, T)$, se expresa de la siguiente forma, de acuerdo a [3]:

$$K_H = \frac{K_{H_0}}{1 + \sigma R_1} \quad (2)$$

K_{H_0} es la difusividad de remolino en ausencia de estratificación o valor neutral de la difusividad de remolino, σ es un parámetro a ajustar. R_1 es el número adimensional de Richardson, que establece una relación entre la producción de empuje y la producción de turbulencia, según [4], y es considerado un parámetro de estabilidad. En [3] se propone parametrizar R_1 y K_{H_0} de la siguiente forma:

$$R_1 = -\alpha_v g z^2 \frac{\partial T}{\partial z} \omega^{*2} \quad (3)$$

$$K_{H_0} = c \omega^* \quad (4)$$

donde α_v es el coeficiente volumétrico de expansión termal y ω^* es la velocidad de corte debida a la tensión generada por el viento en la interfase aire agua. c es una constante empírica, parámetro del modelo a ajustar.

La temperatura en la superficie de intercambio, involucra en su cálculo los diferentes tipos de flujos de calor [5], entrada de radiación en onda corta incidente (ϕ_0), entrada de radiación en onda larga después de la reflexión (ϕ_{r2}), pérdidas de radiación en onda larga (cuerpo negro) (ϕ_{t1}), pérdidas por evaporación

(ϕ_s) y por calor sensible (ϕ_s). La energía neta disponible, ϕ_N , en el reservorio es:

$$\phi_N = \phi_0 + \phi_{r2} - \phi_{r1} - \phi_e - \phi_c \quad (5)$$

Dichos flujos se determinaron en función de las siguientes variables meteorológicas: temperatura del aire, humedad relativa, heliofanía, nubosidad, velocidad del viento y presión atmosférica.

ESQUEMA NUMERICO

El modelo resuelve la ecuación (1), mediante un esquema implícito según el Método de Diferencias Finitas. Así se genera un sistema de ecuaciones lineales para las temperaturas del agua, que se resuelve por un algoritmo de Doble Barrido, [6].

Se adoptó un esquema implícito simple, con una seguridad de primer orden y con un error de truncamiento de $O[\Delta t, \Delta z^2]$, de acuerdo a la propuesta original de Laasonen, [7]. Este esquema es incondicionalmente estable.

De acuerdo a un análisis dimensional es posible justificar la eliminación del término correspondiente a la advección vertical, cuando no existen entradas y salidas significativas, ni gradientes batimétricos considerables, [1].

La discretización espacial se realizó mediante la división de la profundidad del lago, en capas de espesor Δz . Las variables calculadas, temperaturas y coeficientes de difusión, se asignaron al centro de cada capa. El gradiente de temperatura de la ecuación (3), se discretizó por medio de un esquema centrado explícito.

Así, la ecuación (1) se discretiza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \left(A_{j+1} K_{Hj+1}^n \frac{\Delta t}{\Delta z^2} + A_j K_{Hj}^n \frac{\Delta t}{\Delta z^2} + A_j \right) T_j^{n+1} + \\ & + \left(-A_{j+1} K_{Hj+1}^n \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) T_{j+1}^{n+1} + \left(-A_j K_{Hj}^n \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) T_{j-1}^{n+1} = \\ & = \Delta t \left(\frac{\phi_{j-1}^n - \phi_j^n}{\rho C_p \Delta z} \right) + T_j^n A_j^n \end{aligned} \quad (6)$$

De tal modo, el sistema algebraico de ecuaciones se puede expresar:

$$A T_{j-1}^{n+1} + B T_j^{n+1} + C T_{j+1}^{n+1} = D \quad (7)$$

Se aplicó el método el Método de Doble Barrido, para resolver en cada intervalo de tiempo, el sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz de coeficientes es tridiagonal.

El modelo permite adoptar como **Condición Inicial** un perfil de temperatura uniforme o no uniforme.

$$T(j, 0) = T_0 \quad \forall j = 1, J \quad (8)$$

Se estableció como **Condición de Contorno en superficie**:

$$K_H \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{\text{superf}} = \frac{\phi_N^*}{\rho C_p} = \frac{1}{\rho C_p} (Q_s + H_1 + H_2) \quad (9)$$

Se fijó un gradiente de temperatura nulo como **Condición de Contorno en el fondo**:

$$K_H \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_J = 0 \quad (10)$$

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Se aplicó el método de von Neumann para realizar el análisis de estabilidad, [7]. El método se basa en una expansión finita de la solución de la ecuación de calor, en una serie de Fourier. El decaimiento o amplificación de cada modo se considera separadamente para determinar la estabilidad o inestabilidad. A tal fin, la ecuación del modelo se simplificó de la siguiente manera:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_H \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (11)$$

La solución de la ecuación, la temperatura del agua T , puede escribirse como la suma de dos componentes, una debida a radiación (T_ϕ), y la otra al proceso de difusión, (T_{dif}):

$$T = T_\phi + T_{dif} \quad (12)$$

Entonces la ecuación básica del modelo se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial (T_\phi + T_{dif})}{\partial t} = K_H \frac{\partial^2 (T_\phi + T_{dif})}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial T_\phi}{\partial t} + \frac{\partial T_{dif}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 T_\phi}{\partial z^2} K_H + \frac{\partial^2 T_{dif}}{\partial z^2} K_H - \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (14)$$

El primer término de la derecha en la ecuación (14) es nulo, pues T_ϕ no está sometido a difusión. Como la ecuación (14) es lineal, se puede desdoblar en:

$$\frac{\partial T_\phi}{\partial t} = - \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (15)$$

$$\frac{\partial T_{dif}}{\partial t} = K_H \frac{\partial^2 T_{dif}}{\partial z^2} \quad (16)$$

La ecuación (15) es la que resuelve el Modelo de Balance Térmico, y no presenta problemas de estabilidad pues establece un balance cerrado de energía a cada paso de tiempo. En cambio la ecuación (16) es la que puede llegar a presentar problemas de estabilidad, por la presencia de derivadas espaciales de la temperatura en el segundo miembro. Como punto de partida del análisis de estabilidad, si consideramos una aproximación explícita simple, se deduce que la restricción numérica para la determinación del intervalo de tiempo, Δt , queda expresada de la siguiente forma, según [6]:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta z^2}{2 K_H} \quad (17)$$

El esquema numérico adoptado es implícito, incondicionalmente estable, basado en el esquema de Laasonen [6]. El análisis de estabilidad se formula entonces a partir de la siguiente ecuación:

$$T^{n+1} = T^n + (K_H \Delta t) \frac{\partial^2 T^{n+1}}{\partial z^2} \quad (18)$$

V^n es la función amplitud en el intervalo temporal n de la componente particular cuyo número de onda es k_x , $I=(-1)^{1/2}$. θ es el ángulo de fase $\theta = k_x \Delta z$, entonces:

$$T_j^n = V^n e^{I(i-j)\theta} \quad (19)$$

en forma similar :

$$T_{j-1}^{n+1} = V^{n+1} e^{I(i-1)\theta} \quad (20)$$

reemplazando en la ecuación (18), obtenemos :

$$V^{n+1} = V^n + V^{n+1} \left(\frac{K_H \Delta t}{\Delta z^2} \right) (e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2) \quad (21)$$

luego:

$$G = \frac{1}{1 + 2 \frac{K_H \Delta t}{\Delta z^2 (1 - \cos \theta)}} \quad (22)$$

donde G es el factor de amplificación del error y se expresa como V^{n+1}/V^n . Dado que $(1 - \cos \theta) \geq 0$ para todo θ , el valor absoluto del factor de amplificación es ≤ 1 para todo coeficiente de difusión, intervalo de tiempo o intervalo espacial.

En síntesis, el esquema numérico adoptado es incondicionalmente estable, con un error de truncamiento de $O[\Delta t, (\Delta z)^2]$.

APLICACION DEL MODELO

Se representó el proceso de estratificación térmica en el Lago Ohrid. Los datos necesarios para la aplicación del modelo, se tomaron de las mediciones realizadas por Outcalt y Allen [1]. Para el cálculo de los flujos de calor, se expresó el comportamiento medio de las variables meteorológicas: radiación global, temperatura, humedad relativa y nubosidad, según una relación periódica del tipo:

$$\text{var}_i = a_i + b_i \text{seno}(\pi t/\text{per} - \pi/2)$$

donde "per" es el período de tiempo considerado (un año), a_i y b_i son constantes propias de cada variable meteorológica i . Se verificó que el ajuste logrado fuera compatible con la información disponible. Por no disponer de información referida a la presión atmosférica, se adoptó el valor normal de presión; la velocidad del viento se consideró constante, en 3 m/s.

Se establecieron las condiciones iniciales de acuerdo a la información medida. La fase inicial se estableció en 290 días. Por debajo de los 39 metros se fijó una temperatura constante de 7 °C. El modelo se aplicó con un intervalo $\Delta z = 1$ metro y un intervalo temporal $\Delta t = 12$ horas y se consideró nulo el caudal de ingreso al reservorio ($Q_e = 0$).

Las temperaturas del agua medidas a lo largo de 5 años, se muestran en la Figura 1, [1]; donde el intervalo entre las isothermas es de 1 °C y la más profunda corresponde a 7 °C. En la Figura 2, se observan los resultados de la simulación realizada con el modelo de difusividad variable.

Otra aplicación del modelo fue simular las modificaciones generadas en el proceso de estratificación debido a un caudal de ingreso (Q_e). Se contemplaron, entre otras, dos variantes: la primera corresponde a Q_e ingresante en la primer capa solamente y en la segunda se lo considera en las dos primeras capas. Se simularon distintas relaciones Q_e / A_e con diferentes temperaturas.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se analizaron los perfiles verticales de temperatura en dos situaciones típicas del lago, una isothermal y otra con presencia de termoclina, con $Q_e = 0$. La Figura 3 muestra los perfiles medidos y calculados. Los resultados del ajuste, respecto de los principales parámetros del modelo son: coeficiente de absorción (α_1) = 0,40; coeficiente de extinción (α_2) = 0,19 1/m; el parámetro $\sigma = 0,15$ y el parámetro $c = 0,028$.

Se concluye que el proceso de estratificación y los perfiles de temperatura son bien representados por el modelo de difusividad variable. La profundidad del epilimnio y las características de la termoclina se ajustan satisfactoriamente a los valores observados. En la Figura 4, se graficaron los perfiles de difusividad calculados para ambas situaciones simuladas, los cuales son cualitativamente comparables a los obtenidos por [8], para condiciones isotermales y con presencia de estratificación.

Los resultados obtenidos al simular el caudal Q_e ingresante en la primer capa y en las dos primeras capas, se muestran en las Figuras 5 y 6 respectivamente. En las mismas se observan los ciclos anuales de temperatura obtenidos para la relación $Q_e / A_e = 0.1$ m/s y temperatura 9 °C.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Henderson - Sellers, B., "Engineering Limnology", Pitman Publishing Limited, London. 1984. 356 p.
- [2] Margalef, R., "Limnología", Ediciones Omega, Barcelona. 1983. 1010 p.
- [3] Sundaram, T.R. and Rhem, R.G., "The Seasonal Thermal Structure of Deep Temperate Lake", Tellus Vol. 25. 1973. p. 157 - 167.
- [4] Tucci, C.E., "Modelos de Qualidade da Água em Reservatórios", Editora da Universidade de São Paulo, Coleção ABRH de Recursos Hídricos Vol. 1, São Paulo. 1989. p. 222 - 301.
- [5] Nogueira, V.P.Q., "Qualidade da Água em Lagos e Reservatórios", Editora da Universidade de São Paulo, Coleção ABRH de Recursos Hídricos Vol. 3, São Paulo. 1991. p. 161 - 210.
- [6] Roache, P., "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M. 1972. 434 p.
- [7] Anderson, D.A., Tannehill, J.C. and Pletcher R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, Mc Graw Hill. 1984. 599 p.
- [8] Jassby, A. and Powell T., "Vertical Patterns of Eddy Diffusion During Stratification In Castle Lake, California", Limnology and Oceanography. 1975. p 530 - 543.

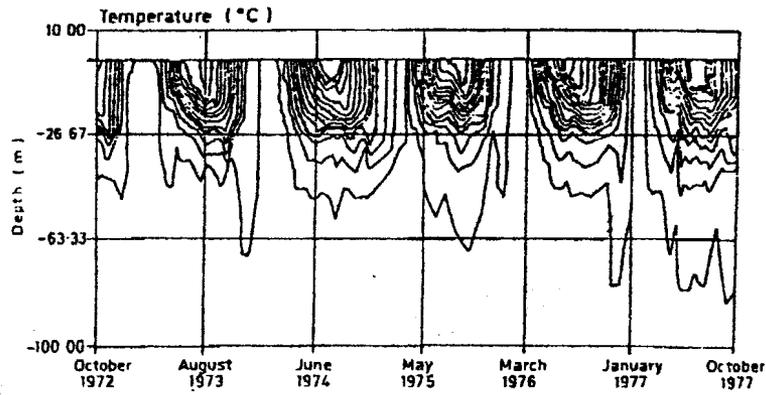


Figura 1: Isoleínas de temperatura medidas (Henderson-Sellers, 1984)

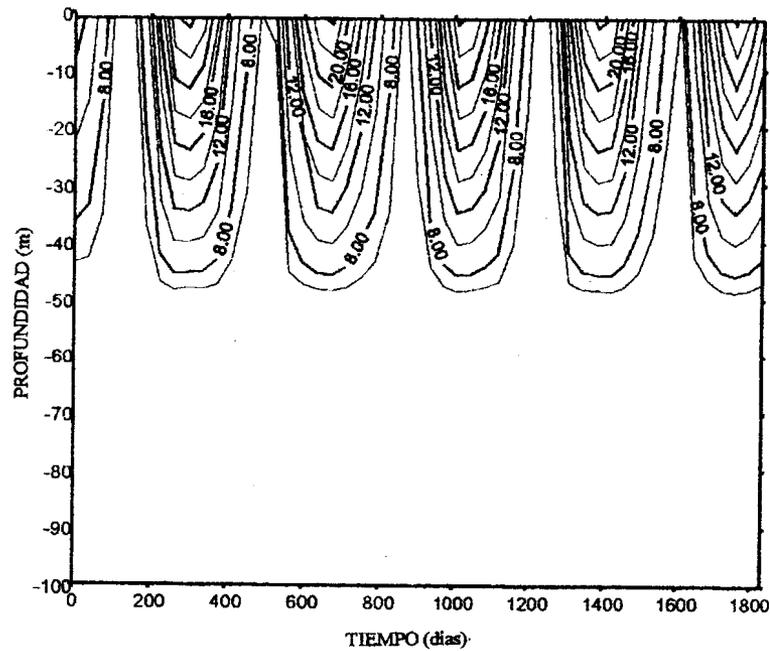


Figura 2: Isoleínas de temperatura calculadas

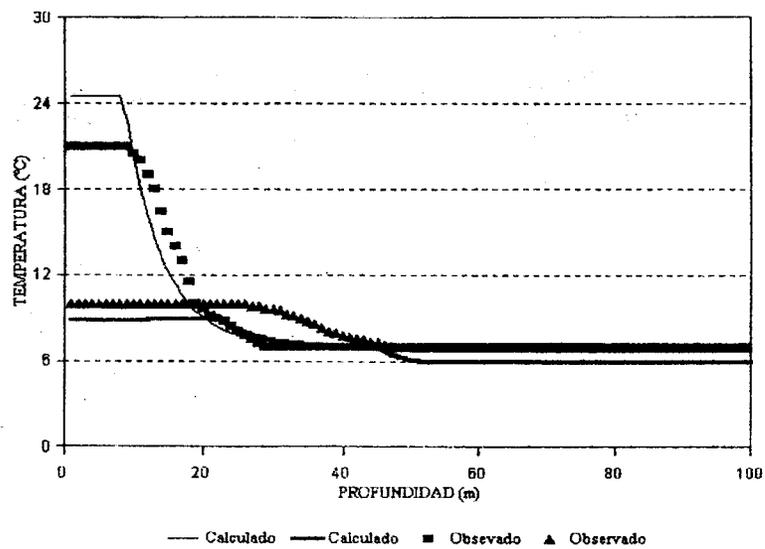


Figura 3: Perfiles verticales para estratificación y recirculación

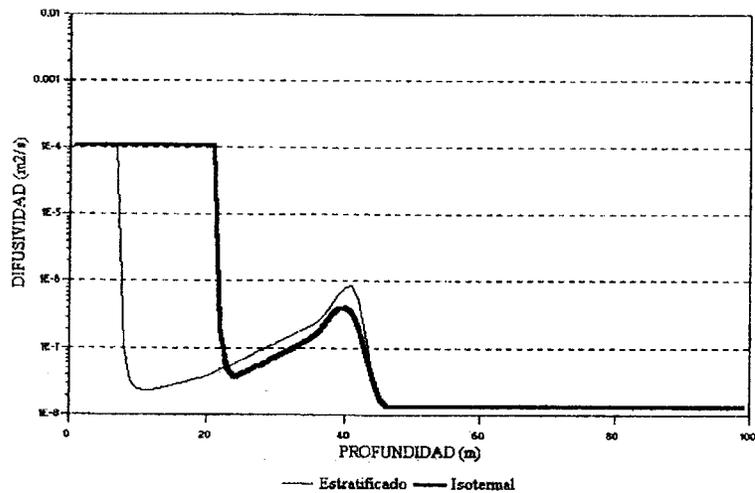


Figura 4: Perfiles verticales de difusividad calculadas

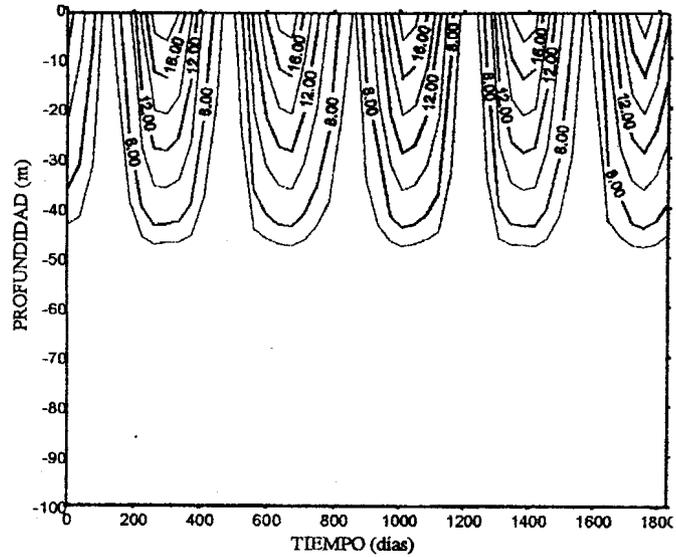


Figura 5: Isoleínas de temperatura calculadas. Simulación de un caudal entrante a 9°C en la primer capa

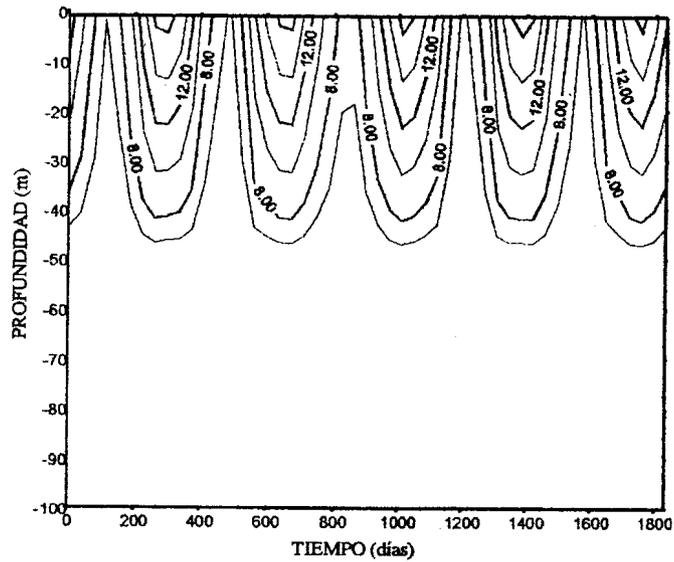


Figura 6: Isoleínas de temperatura calculadas. Simulación de un caudal entrante a 9°C en las dos primeras capa.

