



APLICAÇÃO DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN MODELADA COM ELEMENTO BILINEAR E CORTANTE IMPOSTO A PROBLEMAS DINÂMICOS

L. Santos Silva, P. W. Partridge & C. L. Sahlit
Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília,
70910-900, Brasília, DF, Brasil

SUMÁRIO

No presente trabalho, o elemento para flexão de placa de Reissner-Mindlin bilinear de quatro nós com um campo de deformações cizalhantes impostas é investigado com respeito a problemas dinâmicos. Diversos exemplos numéricos, no contexto de vibrações livres e forçadas, são apresentados e os resultados são comparados com outros existentes na bibliografia, com a finalidade de mostrar a confiabilidade do elemento, na classe de problemas estudados.

SUMMARY

Here a four node bilinear Reissner-Mindlin plate bending element with an imposed shear strain field is applied to dynamic problems. Several numerical examples involving both free and forced vibrations are presented and the results are compared to existing solutions taken from the literature, with the objective of demonstrating the adequacy of this element for the class of problems considered.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos muitos elementos, baseados na teoria de placas espessas de Reissner-Mindlin, têm sido desenvolvidos. A maior parte desses elementos, no entanto, não é capaz de reproduzir a condição de placa esbelta naturalmente. À medida que a esbelteza cresce, as deformações cizalhantes devem tender a zero mas, devido a um aumento na parcela de rigidez de cizalhamento, alcança-se um bloqueio na solução [1].

Para eliminar este efeito, vários artifícios têm sido propostos [2-9]. No presente trabalho, adota-se o modelo apresentado por, por exemplo, Bathe & Dvorkin [7] onde se utiliza uma formulação mista na qual deslocamentos e deformações cizalhantes impostas são aproximadas de forma independente em pontos convenientemente escolhidos sobre o elemento bilinear de quatro nós. Seguindo Oñate *et al.* [9], uma matriz substitutiva de deformações cizalhantes é então calculada para o elemento.

O referido modelo é adotado na solução de problemas de vibrações livres e vibrações forçadas, utilizando-se tanto o método da superposição modal quanto o de integração numérica através do esquema de Newmark. A utilização deste elemento em problemas dinâmicos, em preferência aos de mais alta ordem, propicia uma economia computacional significativa, devido ao fato de que um menor número de graus de liberdade é adotado.

ELEMENTO DE PLACA COM DEFORMAÇÕES CIZALHANTES IMPOSTAS

A partir das hipóteses de Reissner-Mindlin para placas espessas [10,11], o campo de deslocamentos é expresso como

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \quad (1a)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \quad (1b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (1c)$$

onde $w(x, y)$ é o deslocamento vertical do plano médio da placa, $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ são os ângulos que definem a rotação da normal ao plano médio e z é a distância do plano médio ao ponto considerado.

O campo de deformações é expresso como

$$\varepsilon_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

e

$$\varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

onde ε_f e ε_c são os vetores de deformações devidas à flexão e ao cisalhamento transversal, respectivamente.

No presente trabalho, adota-se a convenção de eixos (translações e rotações) apresentada na Figura 1.

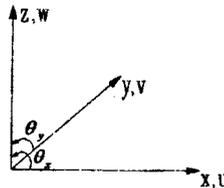


Figura 1: Convenção para Eixos (Translações e Rotações)

Seguindo-se Zienkiewicz & Taylor [5], introduz-se em (2) as aproximações

$$w = N\bar{w} \quad (3a)$$

$$\theta_x = N\bar{\theta}_x \quad (3b)$$

$$\theta_y = N\bar{\theta}_y \quad (3c)$$

onde N é o vetor de funções de forma, e \bar{w} , $\bar{\theta}_x$ e $\bar{\theta}_y$ são vetores que contêm os deslocamentos nos pontos nodais. Pode-se então escrever

$$\varepsilon_f = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial y} & -\frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{bmatrix} = B_f a \quad (4a)$$

e

$$\varepsilon_c = \begin{bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & -N & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{bmatrix} = B_c a \quad (4b)$$

Utilizando-se a matriz B_c na forma apresentada em (4b), não se consegue, para placas esbeltas, que ε_c tenda a zero naturalmente. Por isto, neste trabalho, adota-se um campo de deformações cizalhantes imposto.

A Figura 2 apresenta um elemento típico, no qual os pontos 1, 2, 3 e 4 são os nós do elemento; A, B, C e D são os pontos nos quais as deformações cizalhantes são impostas; e ξ e η formam um sistema de coordenadas denominadas naturais.

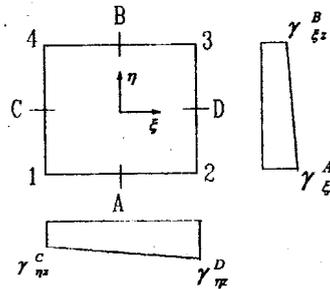


Figura 2: Pontos de Cortante Imposto e Interpolação das Deformações Cizalhantes

Conforme apresentado na Figura 2, define-se uma interpolação linear para as deformações $\gamma_{\eta\xi}$ e $\gamma_{\xi\eta}$, ou seja,

$$\varepsilon_m = \begin{bmatrix} \gamma_{\eta\xi} \\ \gamma_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\eta\xi}^T & 0 \\ 0 & N_{\xi\eta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{\eta\xi} \\ \bar{\gamma}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = N_{\eta\xi} \bar{\gamma}_m \quad (5)$$

onde $N_{\eta\xi}$ e $N_{\xi\eta}$ são funções de forma lineares expressas como

$$N_{\eta\xi} = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi), \quad i = C, D \quad (6a)$$

e

$$N_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(1 + \eta_i \eta), \quad i = A, B \quad (6b)$$

e $\bar{\gamma}_{xy}$ e $\bar{\gamma}_{yx}$ são as deformações cizalhantes impostas nos pontos A, B, C e D, denominados pontos de cortante imposto (CI).

Calculando-se a matriz B_C da Equação (4b) nos pontos de CI, obtém-se

$$\bar{\epsilon}_c = B_{CI} a \quad (7)$$

onde $\bar{\epsilon}_c = [\bar{\gamma}_{xx} \quad \bar{\gamma}_{yy}]^T$ são deformações nos pontos de CI. Para se realizar a conversão de coordenadas cartesianas $(\bar{\gamma}_{xx}, \bar{\gamma}_{yy})$ para coordenadas naturais $(\bar{\gamma}_{\xi\xi}, \bar{\gamma}_{\eta\eta})$ utiliza-se o jacobiano, calculado nos pontos de CI, ou seja,

$$\bar{\epsilon}_m = J_{CI} \bar{\epsilon}_c \quad (8)$$

Substituindo (7) em (8) e o resultado em (5), tem-se:

$$\epsilon_m = N_{\gamma} J_{CI} B_{CI} a \quad (9)$$

A equação (9) expressa as deformações cizalhantes, em coordenadas naturais, calculadas em pontos determinados para que se evite o bloqueio na solução (pontos de CI). Para obter as deformações em coordenadas cartesianas, utiliza-se o inverso do jacobiano calculado nos pontos desejados, ou seja,

$$\epsilon_c = J^{-1} \epsilon_m \quad (10)$$

Substituindo (9) em (10), obtém-se

$$\epsilon_c = J^{-1} N_{\gamma} J_{CI} B_{CI} a \quad (11)$$

onde

$$\hat{B}_C = J^{-1} N_{\gamma} J_{CI} B_{CI} \quad (12)$$

é denominada *matriz de deformação cizalhante substitutiva*. Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais ao domínio discretizado do elemento considerado, pode-se determinar a contribuição de cizalhamento para a rigidez, ou seja,

$$K_C^* = \iint_A \hat{B}^T D_C \hat{B} dA \quad (13)$$

onde K_C^* é a contribuição de cizalhamento para a rigidez do elemento e D_C é a matriz constitutiva para os termos de cizalhamento. A contribuição de flexão para a rigidez do elemento é fornecida em, por exemplo [1], como

$$K_f^* = \iint_A B_f^T D_f B_f dA \quad (14)$$

sendo evidente que a matriz de rigidez K^* do elemento é

$$K^* = K_f^* + K_C^* \quad (15)$$

As Tabelas 1 e 2 apresentam os valores do parâmetro Ω_i , onde i é o modo de vibração, para h/a igual a 0.1 e 0.01, respectivamente. Consideram-se os modelos de massa consistente e de massa concentrada. Como se pode observar o elemento finito adotado fornece excelentes valores para as frequências de vibração para placa espessa ($h/a=0.1$), com uma diferença máxima de 1.56% em relação aos valores apresentados em [17]. Para a placa esbelta ($h/a=0.01$), a diferença máxima é de 2.45% em relação aos valores fornecidos pela solução clássica [18]. Em ambos os casos estudados esta diferença, se se considerar somente a frequência fundamental, se reduz a 0.56%.

Tabela 1: Valores do parâmetro Ω para $h/a = 0.1$

	Ω_1		Ω_2		Ω_3	
	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.
2 x 2	1.852	1.558	4.474	3.000	6.180	3.357
4 x 4	1.646	1.590	3.302	3.048	4.620	4.085
6 x 6	1.613	1.595	3.144	3.060	4.404	4.219
8 x 8	1.601	1.596	3.092	3.060	4.333	4.219
Solução Comparativa[17]	1.594		3.046		4.285	
Solução Clássica[18]	1.756		3.581		5.280	

Tabela 2: Valores do parâmetro Ω para $h/a = 0.01$

	Ω_1		Ω_2		Ω_3	
	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.
2 x 2	0.210	0.169	0.645	0.343	0.944	0.366
4 x 4	0.183	0.174	0.400	0.355	0.591	0.490
6 x 6	0.179	0.175	0.375	0.356	0.553	0.511
8 x 8	0.177	0.175	0.367	0.357	0.541	0.518
Solução Clássica[18]	0.176		0.358		0.528	

As Figuras 3 e 4 mostram a convergência dos valores do parâmetro Ω_1 . Na Figura 3, a solução de referência é a solução comparativa [17], enquanto que na Figura 4, a solução de referência é a solução clássica [18]. A análise dessas figuras mostra que, tanto para a placa espessa quanto para a placa delgada, o modelo de massa concentrada gera uma taxa de convergência maior do que o modelo de massa consistente, com um menor esforço computacional associado.

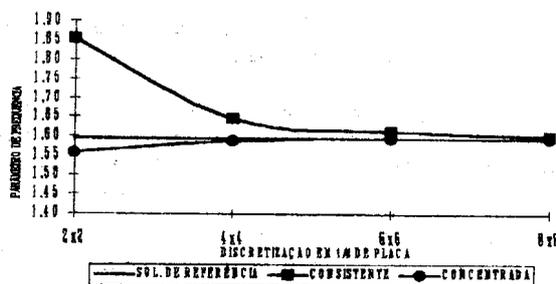


Figura 3: Convergência do parâmetro de frequência Ω_1 ($h/a = 0.1$)

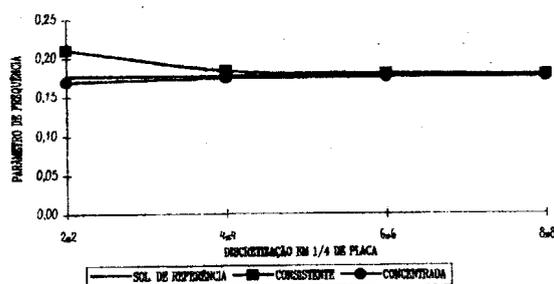


Figura 4: Convergência do parâmetro de frequência Ω_1 ($h/a = 0.01$)

Exemplo 2: Considera-se a placa quadrada do exemplo 1, engastada em dois bordos opostos e apoiada nos outros dois bordos, submetida a vibrações livres sem amortecimento. Estuda-se novamente o comportamento estrutural para os casos de h/a igual a 0.1 (placa espessa) e 0.01 (placa esbelta).

Como a discretização em 6×6 elementos (em $1/4$ de placa) apresentou bons resultados no exemplo 1, esta discretização é adotada neste exemplo. As Tabelas 3 e 4 apresentam os valores obtidos do parâmetro Ω_i , onde i representa o modo de vibração, para h/a igual a 0.1 e 0.01, e utilizando-se os modelos de massa consistente e de massa concentrada. Apresentam-se ainda nestas tabelas os valores da solução comparativa [17] e da solução clássica [18].

Tabela 3: Valores do parâmetro Ω para $h/a = 0.1$

	Ω_1		Ω_2		Ω_3	
	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.
Presente Trabalho	1.319	1.306	2.456	2.396	3.006	2.928
Solução Comparativa [17]	1.302		2.398		2.888	
Solução Clássica [18]	1.413		2.671		3.383	

Tabela 4: Valores do parâmetro Ω para $h/a = 0.01$

	Ω_1		Ω_2		Ω_3	
	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.
Presente Trabalho	0.143	0.141	0.274	0.262	0.355	0.338
Solução Clássica [18]	0.141		0.267		0.338	

Também no caso presente, o elemento finito adotado fornece bons resultados para as frequências de vibração que, evidentemente, são menores do que as calculadas no exemplo 1. Para a placa espessa ($h/a=0.1$), a diferença máxima em relação aos valores apresentados em [17] é agora de 3.93%; e para a placa esbelta ($h/a=0.01$), a diferença máxima é de 4.79% em relação aos valores fornecidos pela solução clássica [17]. Em ambos os casos estudados esta diferença, se se considerar somente a frequência fundamental, se reduz a 1.29%.

Exemplo 3: Considera-se novamente a placa quadrada engastada nos quatro bordos do exemplo 1, submetida a uma carga uniformemente distribuída, aplicada instantaneamente. No caso de $h/a=0.01$, a intensidade (constante) da carga aplicada é de 0.1, sendo esta intensidade igual a 0.001 no caso de $h/a=0.1$.

A Tabela 5 apresenta os valores do deslocamento máximo no ponto central, obtidos por superposição modal e pelo esquema de Newmark. Estes valores são comparados com os fornecidos por Szilard[13]. Observa-se que para as placas esbeltas tanto o modelo de massa consistente quanto o modelo de massa concentrada fornecem valores próximos, ligeiramente maiores que os apresentados em [13]; isto se deve ao fato de se utilizar a teoria de Reissner-Mindlin no presente trabalho, o que torna a placa mais flexível. Para as placas espessas os valores obtidos no presente estudo são ainda maiores que os apresentados em [13], pois neste caso as deformações por cisalhamento, que não são consideradas em [13], se tornam importantes.

Tabela 5: Valores do deslocamento máximo no ponto central

	$h/a=0.1$		$h/a=0.01$	
	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.	MASSA CONSIST.	MASSA CONCENT.
Newmark	0.07749	0.07674	0.06364	0.06317
Superposição Modal	0.07749	0.07674	0.06362	0.06316
Solução Comparativa[13]	0.06048			

A Figura 5 mostra a evolução da resposta para o deslocamento do nó central, considerando-se os modelos de massa consistente e de massa concentrada, para os casos de $h/a=0.1$ e $h/a=0.01$. Observa-se na referida figura que as curvas correspondentes aos dois modelos de massa são praticamente coincidentes. Vale ressaltar que os resultados apresentados foram igualmente obtidos tanto pelo esquema de Newmark quanto pelo método da superposição modal.

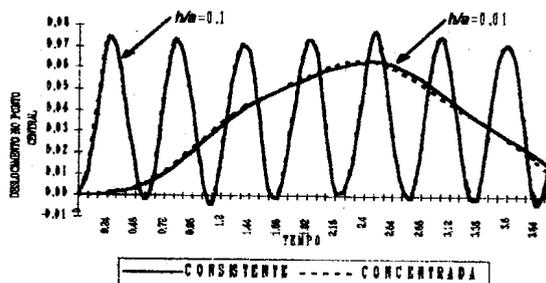


Figura 5: Evolução da resposta no ponto central da placa para $h/a=0.1$ e para $h/a=0.01$

Exemplo 4: Considera-se uma placa circular de diâmetro a igual a 10 e espessura h igual a 0.1, engastada no bordo, em vibrações livres sem amortecimento. Objetiva-se calcular a frequência angular ω correspondente aos três primeiros modos de vibração. Adota-se o coeficiente de Poisson ν igual a 0.3, a massa por unidade de volume ρ igual a 1, o módulo de elasticidade E igual a 1365. Os resultados apresentados a seguir foram obtidos levando-se em conta a simetria estrutural, considerando-se apenas $1/4$ da placa discretizada em 48 elementos.

A Tabela 6 apresenta os valores das três primeiras frequências angulares, obtidos utilizando-se o modelo de massa consistente. Como se pode observar o elemento finito adotado fornece bons valores para as frequências de vibração, no caso de placa circular, com uma diferença máxima de 3.22% em relação aos valores apresentados em [13]. Se se considerar somente a frequência fundamental, a diferença se reduz a 0.43%.

Tabela 6: Valores das três primeiras frequências angulares

	ω_1	ω_2	ω_3
Presente Trabalho	0.461	0.977	1.617
Solução Comparativa[13]	0.459	0.953	1.565
Diferença (%)	0.43	2.46	3.22

CONCLUSÕES

O elemento bilinear de quatro nós com cortante imposto considerado neste trabalho apresenta bom comportamento do ponto de vista de precisão no contexto de problemas dinâmicos, tanto no caso de placa espessa quanto no de placa esbelta, mesmo se considerando malhas pouco refinadas.

Nos exemplos estudados, nota-se que o uso da matriz de massa concentrada possibilita uma convergência mais rápida do que o de massa consistente.

Em vista dos resultados apresentados, este elemento está sendo adotado nos estudos de plasticidade dinâmica, os quais estão sendo desenvolvidos pelos autores.

REFERÊNCIAS

- [1] Oñate, E., *Calculo de Estructuras por el Metodo de Elementos Finitos - Analisis Elástico Lineal*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona (1992).
- [2] Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. & Kanokkulchai, W., A simple and efficient element for plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, 1529-1543 (1977).
- [3] Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. & Tezduyar, T. E., Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four node bilinear isoparametric element, *Journal of Applied Mechanics*, 46, 587-596 (1981).
- [4] Malkus, D. S. & Hughes, T. J. R., Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concepts, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15, 63-81 (1978).
- [5] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., *The Finite Element Method - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*, vol. 2, Fourth Edition, McGraw-Hill International Editions, Singapore (1991).
- [6] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. & Papadopoulos, P., Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements, *Computers & Structures*, 35, 505-522 (1990).
- [7] Bathe, K. J. & Dvorkin, E., A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 367-383 (1985).
- [8] Hinton, E. & Huang, H. C., A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields, *Computers & Structures*, 23, 409-431 (1986).

- [9] Oñate, E., Zienkiewicz, O. C., Suarez, B. & Taylor, R. L., A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 345-367 (1992).
- [10] Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **12**, 69-76, 1945.
- [11] Mindlin, R. D., Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 31-38 (1951).
- [12] Cook, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York (1981).
- [13] Szilard, R., *Theory and Analysis of Plates - Classical and Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1974).
- [14] Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1982).
- [15] Clough, R. W. & Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York (1975).
- [16] Paz, M., *Structural Dynamics - Theory and Computation*, Second Edition, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1985).
- [17] Dawe, D. J. & Roufaeil, O. L., Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates, *Journal of Sound and Vibration*, **69**, 345-359 (1980).
- [18] Leissa, A. W., The free vibration of rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, **31**, 257-293 (1973).