



# ANÁLISIS DE VIBRACIONES NATURALES DE PLACAS RECTANGULARES CONSIDERADAS COMO SÓLIDOS TRIDIMENSIONALES

C.P.Filipich

Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos, Universidad Tecnológica Nacional y  
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur.

M.B.Rosales y P.M.Bellés

Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,  
Bahía Blanca, Argentina.

## Resumen

Un método variacional desarrollado por los autores para problemas de borde en una y dos dimensiones se extiende en el presente trabajo a tres dimensiones. Dicho método consiste en extremar un funcional adecuado proponiendo ciertas secuencias que satisfacen condiciones de borde esenciales. Disponer de una solución clásica en el sentido del método inverso de Saint-Venant que sucintamente se incluye en un apéndice, permite comprobar la exactitud de la solución generalizada, que por otro lado es fundamentada en el presente trabajo por los teoremas correspondientes. Finalmente, los valores numéricos de frecuencias naturales permiten medir la aproximación de resultados dados por la teoría de Mindlin.

## Abstract

A variational method developed by the authors for boundary value problems in both one and two dimensions is herein extended to three dimensions. The method consists in extremizing an appropriate functional after using certain sequences that fulfil essential boundary conditions. The exactness of the proposed solution is founded by means of theorems. A comparison is carried out with an available classical solution in the sense of Saint-Venant's inverse method. A brief discussion of the latter is included in an Appendix. Finally the numerical values of the natural frequencies allow to measure the approximation involved in the Mindlin theory of thick plates.

## 1 INTRODUCCIÓN

El método variacional que desarrollamos se basa en esencia en resolver un amplio espectro de problemas diferenciales de borde (ordinario o no, lineal o no) a través de extremar un funcional adecuado mediante secuencias apropiadas. Se han abordado problemas de autovalores y equilibrio, lineales y no lineales y con diversas complejidades, ver por ejemplo [1], [2] y [3].

Es bien conocido el método variacional [4][5] para problemas lineales con funcionales simétricos y positivos (funcionales energéticos) y cabe señalar que uno de este tipo será utilizado para resolver el problema

del título. Los autores han extendido la forma del funcional a casi cualquier tipo de sistema diferencial para problemas de borde. Otra novedad consiste en que no se trata de un método de Ritz ya que se utilizan series ampliadas de Fourier donde se combinan linealmente conjuntos que en general no satisfarían las condiciones de borde esenciales (estas condiciones de borde serán definidas abajo). En el presente trabajo los teoremas y corolarios que justifican la exactitud de la propuesta serán sintéticamente incluidos y demostrados. Es interesante destacar que para cualquier problema diferencial de borde se ha demostrado [6] que la forma de aplicar el procedimiento que nos ocupa consiste en aplicar un seudo teorema de los Trabajos Virtuales a las secuencias extremantes.

Tomando prismas rectangulares con lados de dimensión arbitraria y sus cuatro caras laterales soportadas en forma consecutiva por tímpanos, se presentan valores de frecuencias para los modos transversales (por razones de simplicidad no se incluyen frecuencias de tipo axirespiratorio aunque podrían ser fácilmente consideradas). Los valores obtenidos se comparan con una solución clásica existente [7] a través del método inverso de Saint-Venant; una descripción de esta solución se incluye en un apéndice. Además el trabajo incluye la comparación de las presentes soluciones "exactas" con las frecuencias determinadas por la teoría de Mindlin para placas planas gruesas. Dicha comparación permite acotar u observar el alcance de esta última teoría y especialmente la influencia del factor de corte.

Finalmente cabe consignar que en este desarrollo se estudia la placa gruesa simplemente apoyada dejándose para una contribución futura las placas con otras condiciones de borde así como la resolución exacta por esta metodología variacional de la viga rectangular para compararla con la viga Timoshenko.

## 2. FUNCIONAL ENERGÉTICO

Para problemas de movimiento tridimensionales, isotrópicos y homogéneos la elasticidad clásica brinda un sistema (denominado de Lamé) de ecuaciones diferenciales en las componentes del vector desplazamiento  $u$ ,  $v$  y  $w$  (funciones de posición y del tiempo) que en coordenadas cartesianas rectangulares  $(x, y, z)$  y con notación clásica vale:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \nabla^2 u + \frac{\lambda}{\nu} \frac{\partial I}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_x^* \quad (a) \\ \frac{\mu}{2} \nabla^2 v + \frac{\lambda}{\nu} \frac{\partial I}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + F_y^* \quad (b) \\ \frac{\mu}{2} \nabla^2 w + \frac{\lambda}{\nu} \frac{\partial I}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_z^* \quad (c) \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $\rho$  la densidad del cuerpo en el punto considerado; las constantes de Lamé  $\mu = \frac{E}{1+\nu}$ ;  $\lambda = \frac{\nu\mu}{1-2\nu}$ ;  $\nu$  el coeficiente de Poisson;  $E$  el módulo de elasticidad;  $F_x^*$ ,  $F_y^*$ ,  $F_z^*$  funciones proporcionales a las componentes de las fuerzas de masa;  $I = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  el invariante lineal de deformación;  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ , y  $\epsilon_z$  deformaciones axiales específicas según los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente;  $\nabla^2(\cdot) \equiv \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}$  y  $t$  coordenada temporal.

Admitiendo modos normales de vibración de frecuencia circular  $\omega$  es decir, admitiendo que  $F_x^* = F_y^* = F_z^* = 0$  y que

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}(x, y, z, t) = u(x, y, z) \cos \omega t \quad (a) \\ v &= \hat{v}(x, y, z, t) = v(x, y, z) \cos \omega t \quad (b) \\ w &= \hat{w}(x, y, z, t) = w(x, y, z) \cos \omega t \quad (c) \end{aligned} \quad (2)$$

y reemplazando en (1) obtenemos:

$$\frac{\mu}{2} \nabla^2 u + \frac{\lambda}{\nu} \frac{\partial I}{\partial x} + \rho \omega^2 u = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\mu}{2} \nabla^2 v + \frac{\lambda}{\nu} \frac{\partial I}{\partial y} + \rho \omega^2 v = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\mu}{2} \nabla^2 w + \frac{\lambda}{\nu} \frac{\partial I}{\partial z} + \rho \omega^2 w = 0. \quad (c)$$

Es sencillo hallar el funcional energético  $\mathcal{F}$  correspondiente a (3) que vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}[u, v, w] = & \frac{\lambda}{2} \|\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z\|^2 + \frac{\mu}{2} (\|\epsilon_x\|^2 + \|\epsilon_y\|^2 + \|\epsilon_z\|^2) + \mu (\|\gamma_{xy}\|^2 + \|\gamma_{yz}\|^2 \\ & + \|\gamma_{zx}\|^2) - \frac{\rho \omega^2}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2) \end{aligned} \quad (4)$$

donde a través de las relaciones cinemáticas sabemos que

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a); \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b); \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (c); \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (d); \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (e); \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (f). \end{aligned} \quad (5)$$

En (4) hemos introducido una notación del análisis funcional [5] donde si  $P = P(x, y, z)$  y  $Q = Q(x, y, z)$  son dos funciones cuadrado integrables en el dominio de interés  $D$  definimos

$$(P, Q) \equiv \iiint P(p, q, r) Q(p, q, r) dp dq dr \quad (a); \quad \|P\|^2 \equiv \iiint P^2(p, q, r) dp dq dr. \quad (b) \quad (6)$$

### 3 SECUENCIAS EXTREMANTES

En este trabajo al ser  $\mathcal{F}$  simétrico y definido positivo [5] las secuencias serán minimizantes. Las series de Fourier para dominios prismáticos rectangulares  $\{D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  que podremos utilizar serán de la forma  $\sum \sum \sum f_1 f_2 f_3$  donde  $f_1, f_2, f_3$  son cualesquiera de las siguientes combinaciones

$$s_i s_j s_k, s_i s_j c_k, s_i c_j s_k, s_i c_j c_k, c_i s_j s_k, c_i s_j c_k, c_i c_j s_k, c_i c_j c_k \quad (7)$$

habiéndose utilizado la nomenclatura siguiente

$$\begin{aligned} \alpha_i &\equiv i\pi; \quad \beta_j \equiv j\pi; \quad \gamma_k \equiv k\pi \\ s_i &\equiv \sin \alpha_i x; \quad s_j \equiv \sin \beta_j y; \quad s_k \equiv \sin \gamma_k z; \quad c_i \equiv \cos \alpha_i x; \quad c_j \equiv \cos \beta_j y; \quad c_k \equiv \cos \gamma_k z. \end{aligned}$$

Dichas series garantizan, como sabemos, la convergencia en la media de cualquier función cuadrado integrable. Sin embargo, en la metodología propuesta en el presente trabajo es necesario tener además convergencia uniforme de las denominadas funciones esenciales continuas, que en este problema son  $u, v$  y  $w$ . A continuación mostraremos sucintamente cómo se generan las series tridimensionales para una función continua.

Partiendo de una función continua  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  de tres variables para la cual requiramos convergencia uniforme en  $D$  podremos tomar como secuencia aproximante alguno de los dos siguientes desarrollos en  $x$ . Existen otras combinaciones válidas y posibles.

$$\varphi_M(x, y, z) = \sum_i^M B_i(y, z) \sin \alpha_i x + x B_0(y, z) + b_0(y, z); \quad (a) \quad (8)$$

$$\varphi_M(x, y, z) = \sum_i^M A_i(y, z) \cos \alpha_i x + A_0(y, z); \quad (b)$$

De ( 8a,b) bastará para tener convergencia uniforme (por la Teoría de Fourier), que:

$$B_i(y, z) = 2 \int_0^1 \varphi(\eta, y, z) \sin \alpha_i \eta \, d\eta \quad (9)$$

$$B_0(y, z) = \varphi(1, y, z) - \varphi(0, y, z); \quad b_0(y, z) = \varphi(0, y, z) \quad (10)$$

En cambio

$$A_i(y, z) = 2 \int_0^1 \varphi(\eta, y, z) \cos \alpha_i \eta \, d\eta; \quad A_0(y, z) = \int_0^1 \varphi(\eta, y, z) \, d\eta \quad (11)$$

Tanto ( 8b) como ( 8a) con la función soporte  $-xB_0(y, z) + b_0(y, z)$  dan (como puede fácilmente demostrarse) convergencia uniforme para  $\varphi$ . Ahora bien, si cualquiera de las funciones de  $(y, z)$  intervinientes en ( 8a,b) son desarrolladas análogamente en la variable  $y$ , y luego de igual manera las funciones de  $z$  intervinientes en series de  $z$  formalmente iguales a ( 8) tendremos todas las combinaciones posibles. Vamos a trabajar formas modales de tipo transversal (flexionales) en un prisma rectangular con tímpanos en  $x = 0, 1$  e  $y = 0, 1$  (ver Figura 1) y entonces

$$\text{en } x = 0, 1 : w = 0, v = 0; \quad \text{en } y = 0, 1 : w = 0, u = 0 \quad (12)$$

donde se han utilizado coordenadas adimensionalizadas.

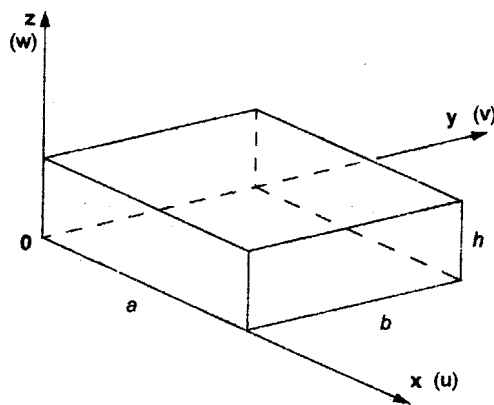


Figura 1: Sólido prismático soportado por cuatro tímpanos en las caras  $(x, z)$  e  $(y, z)$ .

Además exigimos

$$w(x, y, z) = w(x, y, 1 - z); \quad u(x, y, z) = -u(x, y, 1 - z); \quad v(x, y, z) = -v(x, y, 1 - z) \quad (13)$$

con lo cual las secuencias completas tridimensionales de Fourier generadas como se explicó al comenzar esta sección y de convergencia uniforme para  $u, v$  y  $w$ , se reducen a las siguientes:

$$\begin{aligned} u_{LMN}(x, y, z) &= \sum_i^L \sum_j^M \sum_k^N A_{ijk} c_i s_j c_k + \sum_j^M \sum_k^N A_{0jk} s_j c_k(a) \\ v_{LMN}(x, y, z) &= \sum_i^L \sum_j^M \sum_k^N B_{ijk} s_i c_j c_k + \sum_i^L \sum_k^N B_{i0k} s_i c_k(b) \\ w_{LMN}(x, y, z) &= \sum_i^L \sum_j^M \sum_k^N C_{ijk} s_i s_j s_k + \sum_i^L \sum_j^M d_{ij} s_i s_j(c) \end{aligned} \quad (14)$$

debiendo ser  $k = 1, 3, 5, \dots$  (impar).

#### 4 TEOREMAS, COROLARIOS Y FORMAS DE APLICACIÓN

Las secuencias seleccionadas dan convergencia uniforme para  $u$ ,  $v$  y  $w$  que se asumen continuas pero para algunas derivadas de las mismas sólo tendremos convergencia en  $L_2$ . Con esto bastará para demostrar la convergencia hacia el valor exacto de las frecuencias buscadas. Tendremos entonces, al menos,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Delta u}{\partial x_m} \right\| &\equiv \left\| \frac{\partial u_{LMN}}{\partial x_m} - \frac{\partial u}{\partial x_m} \right\| \rightarrow 0 \quad L, M, N \rightarrow \infty \quad (a) \\ \left\| \frac{\partial \Delta v}{\partial x_m} \right\| &\equiv \left\| \frac{\partial v_{LMN}}{\partial x_m} - \frac{\partial v}{\partial x_m} \right\| \rightarrow 0 \quad L, M, N \rightarrow \infty \quad (b) \\ \left\| \frac{\partial \Delta w}{\partial x_m} \right\| &\equiv \left\| \frac{\partial w_{LMN}}{\partial x_m} - \frac{\partial w}{\partial x_m} \right\| \rightarrow 0 \quad L, M, N \rightarrow \infty \quad (c) \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $m = 1, 2, 3$  y  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  y además

$$\begin{aligned} |\Delta u| &\equiv |u_{LMN} - u| \rightarrow 0 \quad L, M, N \rightarrow \infty \quad \forall x, y, z \quad (a) \\ |\Delta v| &\equiv |v_{LMN} - v| \rightarrow 0 \quad L, M, N \rightarrow \infty \quad \forall x, y, z \quad (b) \\ |\Delta w| &\equiv |w_{LMN} - w| \rightarrow 0 \quad L, M, N \rightarrow \infty \quad \forall x, y, z \quad (c) \end{aligned} \quad (16)$$

Aunque no será el caso, sólo se requiere que las derivadas de  $u$ ,  $v$  y  $w$  sean cuadrado integrables y no necesariamente continuas.

**Teorema 1** "El funcional  $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}[u, v, w]$  es un extremo entre  $\mathcal{F}_{LMN} \equiv \mathcal{F}[u_{LMN}, v_{LMN}, w_{LMN}]$  donde  $u_{LMN}, v_{LMN}$  y  $w_{LMN}$  son secuencias extremantes".

Debe notarse que por ahora no necesitamos que  $u$ ,  $v$  y  $w$  satisfagan el sistema (3).

Demostración: calculamos en base a la definición (4)

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_{LMN} - \mathcal{F} &= \frac{\lambda}{2} [\|\Delta I\|^2 + 2(I, \Delta I)] + \frac{\mu}{2} [\|\Delta \epsilon_x\|^2 + \|\Delta \epsilon_y\|^2 + \|\Delta \epsilon_z\|^2 \\ &+ 2(\epsilon_x, \Delta \epsilon_x) + 2(\epsilon_y, \Delta \epsilon_y) + 2(\epsilon_z, \Delta \epsilon_z)] + \mu [\|\Delta \gamma_{xy}\|^2 + \|\Delta \gamma_{yz}\|^2 + \\ &\|\Delta \gamma_{zx}\|^2 + 2(\gamma_{xy}, \Delta \gamma_{xy}) + 2(\gamma_{yz}, \Delta \gamma_{yz}) \\ &+ 2(\gamma_{zx}, \Delta \gamma_{zx})] - \frac{\rho \omega^2}{2} [\|\Delta u\|^2 + \|\Delta v\|^2 + \|\Delta w\|^2 \\ &+ 2(u, \Delta u) + 2(v, \Delta v) + 2(w, \Delta w)] \end{aligned} \quad (17)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \Delta I &\equiv (I_{LMN} - I) = \left( \frac{\partial u_{LMN}}{\partial x} + \frac{\partial v_{LMN}}{\partial y} + \frac{\partial w_{LMN}}{\partial z} \right) - I \\ \Delta \epsilon_x &\equiv \epsilon_{xLMN} - \epsilon_x = \frac{\partial u_{LMN}}{\partial x} - \epsilon_x; \quad \text{etc.} \\ \Delta \gamma_{xy} &\equiv \gamma_{xyLMN} - \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u_{LMN}}{\partial y} + \frac{\partial v_{LMN}}{\partial x} \right) - \gamma_{xy}; \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (18)$$

Utilizando el teorema de la divergencia para integrar por partes y recordando la ley de Hooke para materiales isotrópicos:

$$\sigma_x = \mu \epsilon_x + \lambda I; \quad \sigma_y = \mu \epsilon_y + \lambda I; \quad \sigma_z = \mu \epsilon_z + \lambda I \quad (19)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{2} \gamma_{xy} = \frac{\mu}{2} \gamma_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu}{2} \gamma_{yz} = \frac{\mu}{2} \gamma_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{\mu}{2} \gamma_{zx} = \frac{\mu}{2} \gamma_{xz}$$

Puede verse que de acuerdo a ( 15) y ( 16) previa utilización del teorema de Cauchy-Schwarz

$$(P, Q) \leq \|P\| \|Q\| \quad (20)$$

para  $L, M$  y  $N \rightarrow \infty$  se verifica

$$|\Delta \mathcal{F}| = 0 \quad (21)$$

es decir

$$\mathcal{F}_{LMN} = \mathcal{F} \quad \text{para} \quad L, M, N \rightarrow \infty \quad (22)$$

**Corolario 1** Hemos demostrado que  $\mathcal{F}$  es un extremo entre  $\mathcal{F}_{LMN}$  pero también indica que  $\mathcal{F}_{LMN}$  es un extremo con una adecuada elección de las constantes de las secuencias.

**Teorema 2** "Para que  $\mathcal{F}$  sea un extremo entre funcionales  $\mathcal{F}_{LMN}$  siendo  $u_{LMN}, v_{LMN}, w_{LMN}$  secuencias (no necesariamente extremantes) que satisfacen las eventuales C. de B. esenciales (es decir aquellas que no involucren a  $u, v$  y  $w$  entonces las funciones  $u, v$  y  $w$  deben satisfacer el sistema diferencial ( 3)."

**Demostración:** Calculemos  $\mathcal{F}^* \equiv \mathcal{F}[u + pu_{LMN}, v + qu_{LMN}, w + ru_{LMN}]$  donde  $p, q$  y  $r \in \mathcal{R}$ . Hallemos  $\delta \mathcal{F}$  o sea

$$\delta \mathcal{F} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial p} \right|_{p=0} + \left. \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial q} \right|_{q=0} + \left. \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (23)$$

o lo que es lo mismo que simultáneamente

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial p} \right|_{p=0} = 0 \quad (a) \quad ; \quad \left. \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial q} \right|_{q=0} = 0 \quad (b) \quad ; \quad \left. \frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (c) \quad (24)$$

Aplicando el teorema de la divergencia llegamos por ( 23a) a que deberá cumplirse

$$\left\{ \left[ \left( \mu \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial I}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 u \right], u_{LMN} \right\} = 0 \quad (a) \quad (25)$$

$$\iint \left[ (\mu \epsilon_x + \lambda I) l + \frac{\mu}{2} (\gamma_{xy} m + \gamma_{xz} n) \right] u_{LMN} d\Omega = 0 \quad (b)$$

siendo  $l, m$  y  $n$  los cosenos directores de la normal a la superficie  $\Omega$  que rodea el dominio. Análogamente se trabaja con ( 24b y c); y que, como se ve, aceptando las ecuaciones de equilibrio ( 3) y que las secuencias satisfacen las eventuales condiciones de nulidad para  $u, v$  y  $w$  que hubiera, efectivamente se demuestra el Teorema 2.

#### 4.1 Forma de aplicación

Planteando la condición de extremo para  $\mathcal{F}_{LMN}$  obtenemos

$$\delta \mathcal{F}_{LMN} = 0 \quad (26)$$

donde  $\delta$  indica variación respecto de las constantes de las secuencias, es decir

$$\begin{aligned} & \lambda(I, \delta I_{LMN}) + \mu[(\epsilon_x, \delta \epsilon_{xLMN}) + (\epsilon_y, \delta \epsilon_{yLMN}) + (\epsilon_z, \delta \epsilon_{zLMN})] \\ & + 2\mu[(\gamma_{xy}, \delta \gamma_{xyLMN}) + (\gamma_{yz}, \delta \gamma_{yzLMN}) + (\gamma_{xz}, \delta \gamma_{xzLMN})] \\ & - \rho \omega^2 [(u, \delta u_{LMN}) + (v, \delta v_{LMN}) + (w, \delta w_{LMN})] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

no es más que un pseudo teorema de los Trabajos Virtuales aplicado a las secuencias extremantes.

## 5 RESULTADOS

Aplicando (26) y factorizando, de acuerdo a (14)  $\sum_i \sum_j \sum_k \delta A_{ijk}$ ,  $\sum_i \sum_j \sum_k \delta B_{ijk}$ ,  $\sum_i \sum_j \sum_k \delta C_{ijk}$ ,  $\sum_j \sum_k \delta A_{0jk}$ ,  $\sum_i \sum_k \delta B_{i0k}$ ,  $\sum_i \sum_j \delta d_{ij}$  obtenemos las 6 ecuaciones siguientes:

$$(\lambda + 2G) \left( \frac{\alpha_i^2}{a^2} A_{ijk} \right) + \lambda \left( \frac{\alpha_i \beta_j}{ab} B_{ijk} - \frac{\alpha_i \gamma_k}{ah} C_{ijk} \right) + G \left[ -\frac{\gamma_k}{h} \left( \frac{\alpha_i}{a} C_{ijk} - \frac{\gamma_k}{h} A_{ijk} + \frac{2\alpha_i}{a} d_{ij} I_k \right) + \frac{\beta_j}{b} \left( \frac{\beta_j A_{ijk}}{b} + \frac{\alpha_i B_{ijk}}{a} \right) \right] - \Omega^2 A_{ijk} = 0 \quad (28)$$

$$(\lambda + 2G) \left( \frac{\beta_j^2}{b^2} B_{ijk} \right) + \lambda \left( \frac{\alpha_i \beta_j}{ab} A_{ijk} - \frac{\beta_j \gamma_k}{bh} C_{ijk} \right) + G \left[ -\frac{\gamma_k}{h} \left( \frac{\beta_j}{b} C_{ijk} - \frac{\gamma_k}{h} B_{ijk} + \frac{2\beta_j}{b} d_{ij} I_k \right) + \frac{\alpha_i}{a} \left( \frac{\beta_j A_{ijk}}{b} + \frac{\alpha_i B_{ijk}}{a} \right) \right] - \Omega^2 B_{ijk} = 0 \quad (29)$$

$$(\lambda + 2G) \left( \frac{\gamma_k^2}{h^2} C_{ijk} \right) - \lambda \left( \frac{\alpha_i \gamma_k}{ah} A_{ijk} + \frac{\beta_j \gamma_k}{bh} B_{ijk} \right) + G \left[ \frac{\beta_j}{b} \left( \frac{\beta_j}{b} C_{ijk} - \frac{\gamma_k}{h} B_{ijk} + \frac{2\beta_j}{b} d_{ij} I_k \right) + \frac{\alpha_i}{a} \left( \frac{\alpha_i C_{ijk}}{a} - \frac{\gamma_k A_{ijk}}{h} + \frac{2\alpha_i}{a} d_{ij} I_k \right) \right] - \Omega^2 [C_{ijk} + 2d_{ij} I_k] = 0 \quad (30)$$

$$G \left[ \frac{\beta_j^2}{b^2} + \frac{\beta_j^2}{b^2} \sum_i C_{ijl} I_l - \frac{\beta_j}{bh} \sum_i \gamma_l B_{ijl} I_l + \frac{\alpha_i^2}{a^2} d_{ij} + \frac{\alpha_i^2}{a^2} \sum_i C_{ijl} I_l - \frac{\alpha_i}{ah} \sum_i \gamma_l A_{ijl} I_l \right] - \Omega^2 [d_{ij} + \sum_i C_{ijl} I_l] = 0 \quad (31)$$

$$A_{0jk} \left[ (r^2 \beta_j^2 + R^2 \gamma_k^2) - \frac{\Omega^2}{G} \right] = 0 \quad (32)$$

$$B_{i0k} \left[ (\alpha_i^2 + R^2 \gamma_k^2) - \frac{\Omega^2}{G} \right] = 0 \quad (33)$$

donde  $\Omega^2 \equiv \rho \omega^2$  y  $\gamma = \rho h$ . Después de adimensionalizar utilizando los siguientes parámetros,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad m = \frac{1-2\nu}{12\nu(1-\nu^2)}; \quad \Omega = \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \omega a^2; \quad \kappa = \frac{1-2\nu}{\nu}; \quad r = \frac{a}{b}; \quad R = \frac{a}{h},$$

de las ecuaciones (32) y (33) y para  $A_{0jk} \neq 0$ ,  $B_{i0k} \neq 0$  y el resto de coeficientes nulos, puede obtenerse respectivamente,

$$\Omega_{jk}^2 = \frac{2\kappa R^2}{m} (r^2 \beta_j^2 + R^2 \gamma_k^2) \quad (a); \quad \Omega_{ik}^2 = \frac{2\kappa R^2}{m} (\alpha_i^2 + R^2 \gamma_k^2) \quad (b) \quad (34)$$

Las formas modales resultan (con  $i=1,2,3, \dots$ ;  $j=1,2,3, \dots$ ;  $k=\text{impar}$ ), de acuerdo con (14) para las frecuencias (34a)

$$u_{MN}^{jk} = A_{0jk} s_j c_k; \quad v_{LMN} = w_{LMN} = 0 \quad (35)$$

y para las frecuencias (34b)

$$v_{LN}^{ik} = B_{i0k} s_i c_k; \quad w_{LMN} = u_{LMN} = 0. \quad (36)$$

A continuación se exponen los resultados numéricos de los parámetros de frecuencia transversal  $\Omega$  obtenidos a través del procedimiento descrito en esta sección y su comparación con los resultados de la solución clásica del apéndice como así también con valores numéricos del trabajo de Liew *et al.*

[8] provenientes de la teoría de Mindlin. En las sumatorias intervinientes en la presente propuesta se consideraron un millón de términos.

En la Tabla 1 se muestran los valores para placas cuadradas ( $r = a/b = 1$ ) correspondientes al primer modo de vibración ( $i = j = 1$ ), para  $R = a/h = 1, 10, 25, 45, 250$  siendo  $\nu = 1/3$ . Además una placa rectangular de relación  $r = a/b = 2/3$  es resuelta para relaciones  $R = a/h = 1, 250$  utilizando  $\nu = 1/3$  (Tabla 2). Como caso límite se presenta en la misma tabla una placa con  $r = a/b \rightarrow 0$  con relaciones  $R = a/h = 2.5, 250$ . En Tabla 2 se hallan valores para  $i = 1, 2$  y  $j = 1, 2$ . Debe notarse que  $R \rightarrow \infty$  indica que se trata de placas delgadas.

Tipo de solución	R = a/h				
	1	10	25	45	250
Presente trabajo	7.5466	19.0695	19.6266	19.7060	19.7887
Clásica	7.5466	19.0694	19.6261	19.7040	19.7380

Tabla 1: Parámetro de frecuencia transversal  $\Omega$  de una placa cuadrada.  $r = a/b = 1; \nu = 1/3; i = j = 1$ . Comparación con solución clásica (Apéndice).

Tipo de solución	r=a/b=2/3		r=a/b → 0	
	R=2.5	R=250	R=2.5	250
	i=1, j=2	i=2, j=1	i=1, j=1	i=2, j=1
Presente trabajo	17.6529	43.9098	7.9557	39.5245
Clásica	17.6529	43.8593	7.9557	39.4738

Tabla 2: Parámetro de frecuencia transversal  $\Omega$  de una placa rectangular.  $r = a/b = 2/3, 0; \nu = 1/3$ . Comparación con solución clásica (Apéndice).

Las tablas 3 y 4 muestran la comparación de resultados entre la propuesta del presente trabajo y referencia [8] resuelto con la teoría para placas gruesas de Mindlin con  $\nu = 0.3$ , y un factor de corte 0.823. En Tabla 3 se reportan los valores del parámetro de frecuencia correspondientes a los 6 primeros modos de vibración de una placa cuadrada con dos relaciones lado/altura ( $R = 0.5, 10$ ). Como es lógico suponer, los modos 2 y 3 corresponden a igual valor de frecuencia, como así también los modos 5 y 6. La Tabla 4 muestra los valores de frecuencia correspondientes a placas rectangulares con dos relaciones de lados ( $r = 0.5, 2/3$ ).

Modo	(i,j)	R=a/h			
		0.5		10	
		Presente trabajo	Teoría Mindlin [8]	Presente trabajo	Teoría Mindlin [8]
1	(1,1)	17.5261	17.4307	19.0901	19.0592
2,3	(1,2),(2,1)	38.4827	38.0769	45.6193	45.4495
4	(2,2)	55.7872	55.0102	70.1042	69.7209
5,6	(1,3),(3,1)	66.9960	64.9617	85.4876	84.9329

Tabla 3: Parámetro de frecuencia transversal  $\Omega$  de una placa cuadrada.  $r = a/b = 1; \nu = 0.3$  Comparación con teoría de Mindlin.

## 6 COMENTARIOS

El trabajo consiste primordialmente en comparar dos soluciones digamos exactas y cotejar sus valores de frecuencias naturales para un prisma "simplemente apoyado" con los hallados por la teoría de Mindlin. La



Modo	r=a/b					
	0.5			2/3		
	(i,j)	Presente trabajo	Teoría Mindlin [8]	(i,j)	Presente trabajo	Teoría Mindlin [8]
1	(1,1)	12.0777	12.0646	(1,1)	13.9118	13.8954
2	(1,2)	19.0901	19.0592	(1,2)	26.1917	26.1337
3	(1,3)	30.4235	30.3461	(2,1)	40.8747	40.7378
4	(2,1)	39.1917	39.0708	(1,3)	45.6194	45.4495
5	(2,2)			(2,2)	52.1456	51.9269
6	(1,4)	45.6194	45.4495	(2,3)	70.1042	69.7208

Tabla 4: Parámetro de frecuencia transversal  $\Omega$  de una placa rectangular.  $R = a/h = 10; \nu = 0.3$ . Comparación con teoría de Mindlin con factor de corte 0.823.

solución exacta que se desarrolla en la parte principal de este trabajo está fundamentada en un método variacional que en definitiva se reduce al cálculo de sumatorias en el sentido  $z$ . Cuanto menor es el espesor  $h$  relativamente a  $a$  — $R$  grandes— más términos deben sumarse para lograr una aproximación buena académicamente hablando. No se incluye pero se verifica de una forma bastante simple, que en el límite para  $R \rightarrow \infty$  las soluciones exactas dan lugar a los valores de frecuencia de la teoría de Germain-Lagrange.

Los autores están extendiendo la metodología a prismas con condiciones de borde arbitrarias donde ya no existe la solución clásica y en cambio puede ser abordado con la metodología aquí expuesta. No es motivo de este trabajo, pero sí el disponer de las soluciones exactas por este método variacional es evidentemente un modo de corregir factores de corte para la teoría de Mindlin.

#### REFERENCIAS

1. Filipich, C.P. and Rosales, M.B. *Exact frequencies of beams and plates: a generalized solution. Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences Part I*, pp.307-316. Proceedings of the International Congress. University of Concepción, Chile, 16-20 November, 1992.
2. Filipich, C.P. and Rosales, M.B. *Beams and arcs: exact values of frequencies via a generalized solution. Journal of Sound and Vibration* 170(2) pp. 263-269, 1994.
3. Filipich, C.P., Rosales, M.B. and Cortínez V.H. *Natural frequencies of a Timoshenko beam: exact values by means of a generalized solution. Mecánica Computacional* (14) pp- 134-143. Ed. AMCA, Santa Fe, 1994. Actas del MECOM 94, Mar del Plata, Argentina, 8-11 Nov. 1994.
4. Mikhlín, S. *Variational Methods in Mathematical Physics*. Pergamon Press, 1963.
5. Rektorys, K. *Variational Methods in Mathematical Sciences and Engineering*. D. Reidel Publ. Co., 1971.
6. Filipich, C.P. and Rosales M.B. *A brief discussion on some dynamic variational principles. Journal of Vibration and Control*, in press, 1996.
7. Filipich, C.P. *Solution of the Three Dimensional Equations of Motion for Plates*. Publicación del Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina, 1977.
8. Liew, K.M., Xiang, Y., Kitipornchai S. and Wang C.M. *Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory. Journal of Sound and Vibration* 168(1), pp. 39-69, 1993.

#### APÉNDICE

En este apéndice se presenta una descripción somera de la solución del problema de vibraciones naturales de un cuerpo prismático, clásica en el sentido del método inverso de Saint-Venant. Mayores detalles pueden encontrarse en [7].

Para resolver las ecuaciones gobernantes (3) del problema en estudio, se proponen las siguientes funciones de  $x, y, z$

$$\begin{aligned} u_{MN}(x, y, z) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M A_{ij}(z) \cos \alpha_i x \sin \beta_j y \\ v_{MN}(x, y, z) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M B_{ij}(z) \sin \alpha_i x \cos \beta_j y \\ w_{MN}(x, y, z) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M C_{ij}(z) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y \end{aligned} \quad (37)$$

donde  $\alpha_i = i\pi$ ,  $\beta_j = j\pi$  y que satisfacen las condiciones de borde

$$\sigma_x = \nu = w = 0 \text{ en } x = 0, 1 \text{ (a); } \sigma_y = u = w = 0 \text{ en } y = 0, 1 \text{ (b)} \quad (38)$$

donde  $\sigma_x, \sigma_y$  son componentes del tensor de tensiones. Al reemplazar (37) en las ecuaciones (3) surge —para cada par de valores  $i, j$ — el siguiente sistema de ecuaciones en  $A(z) = A_{ij}(z)$ ,  $B(z) = B_{ij}(z)$  y  $C(z) = C_{ij}(z)$ ,

$$\begin{aligned} -[i^2\pi^2k + d]A + R^2\bar{A} - ij\pi^2rkB + i\pi kR\bar{C} &= 0 \\ -ij\pi^2rkA + \{-j^2\pi^2r^2k + d\}B + R^2\bar{B} + j\pi rkR\bar{C} &= 0 \\ i\pi kR\bar{A} + j\pi rkR\bar{B} + \{dC - (1+k)R^2\bar{C}\} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

donde se ha utilizado la siguiente nomenclatura:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a}{b}; \quad R = \frac{a}{h}; \quad \gamma = \rho h; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad \Omega = \sqrt{\frac{\gamma}{D}} \omega a^2; \quad \hat{\Omega}_{ij} = \pi^2\{i^2 + (rj)^2\}; \quad Q = \frac{\Omega}{s}; \\ d &= \hat{\Omega}_{ij}(1-Q); \quad s = 2R \hat{\Omega}_{ij}^2 \sqrt{\frac{3}{2}(1-\nu)}; \quad k = \frac{1}{1-2\nu}; \quad (\bar{\cdot}) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Nótese que  $\hat{\Omega}_{ij}$  son los valores del parámetro de frecuencia correspondiente a la teoría de placas delgadas (Germain-Lagrange).

Si ahora se proponen las siguientes funciones de  $z$  como solución, siendo  $F, G$  y  $H$  constantes arbitrarias y  $\theta$  autovalores,

$$A(z) = F e^{\theta z}; \quad B(z) = G e^{\theta z}; \quad C(z) = H e^{\theta z} \quad (40)$$

las ecuaciones (39) se transforma en el siguiente sistema en  $F, G$  y  $H$

$$\begin{aligned} [\theta^2 R^2 - k i^2 \pi^2 + d]F - ij\pi^2 rkG + i\pi kR\theta H &= 0 \\ -ij\pi^2 rkF + [\theta^2 R^2 - k j^2 \pi^2 r^2 + d]G + j\pi rkR\theta H &= 0 \\ i\pi kR\theta F + j\pi rkR\theta G - [\theta^2 R^2(1+k) + d]H &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Planteando la nulidad del determinante de este sistema homogéneo se extraen seis raíces, aunque no todas distintas, a saber:

$$\Delta_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{d+k\Omega^2}{(1+k)}}; \quad \Delta_{2,4} = \pm \sqrt{d}; \quad \Delta_{5,6} = \pm \sqrt{d}, \quad (42)$$

donde  $\Delta \equiv \theta a$ . El reemplazo de estas raíces en las expresiones (40) permite arribar a la solución general del problema. Finalmente deben imponerse las condiciones de borde para los planos  $z = 0$  y  $z = h$ , o sea  $\tau_{zx} = 0$ ;  $\tau_{zy} = 0$ ;  $\sigma_x = 0$  en dichos planos. Luego de varios pasos algebraicos se establece la ecuación característica para los modos transversales de vibración de un cuerpo prismático,

$$\frac{U}{V} = 1 \text{ donde } U = \frac{\tanh \Delta_1/R}{\tanh \Delta_2/R}; \quad V = \frac{\sqrt{(1-Q^2)(1-Q^2/(1+k))}}{(1-0.5Q^2)^2}, \quad (43)$$

con la cual pueden obtenerse los parámetros de frecuencia de vibración transversal  $\Omega$ .