

## EXPERIMENTOS NUMÉRICOS EN PROBLEMAS DE VIBRACIONES

V. Topalián, D.R. Ávalos, H.A. Larrondo

Departamento de Física, Universidad Nacional de Mar del Plata  
Juan B. Justo 4302 - 7600 Mar del Plata, Argentina

H.C. Sanzi

Facultad Regional Haedo  
Universidad Tecnológica Nacional

P.A.A. Laura

Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur e  
Instituto de Mecánica Aplicada  
8000 Bahía Blanca, Argentina

### RESUMEN

Este trabajo estudia la efectividad de distintas estrategias computacionales que permiten la determinación aproximada de los modos normales axisimétricos de vibración transversal de placas circulares y anulares cuyo espesor varía en forma discontinua, y con diferentes condiciones de contorno. Se analiza el método de Rayleigh-Ritz con diferentes funciones de prueba. Se concluye que en el caso de las placas anulares la convergencia se acelera notablemente incorporando un término de tipo logarítmico a la función de prueba. La comparación con los autovalores obtenidos mediante un código muy eficiente de elementos finitos muestra, en todos los casos estudiados, excelente acuerdo desde un punto de vista ingenieril.

### ABSTRACT

This paper studies the effectiveness of different computational strategies which allow the determination of the axisymmetric normal modes of transversal vibration of circular and annular plates, with stepped thickness and with different boundary conditions. The Rayleigh-Ritz method with several trial functions is analyzed. It's concluded that in the case of annular plates the convergence is greatly improved by including a logarithmic term into the trial function. The comparison with the eigenvalues obtained by means of a very efficient finite element code shows excellent agreement from an engineering point of view in all cases studied.

### INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento dinámico de placas circulares o anulares, con sobreespesor, y diversas condiciones de contorno, es de particular interés para los especialistas tanto en mecánica como en acústica, dado el uso extensivo de estos elementos estructurales en esas ramas de la ingeniería. En particular, resulta de interés conocer con la máxima exactitud las frecuencias naturales de vibración.

En este trabajo se investiga la aplicación de distintas estrategias numéricas para resolver este tipo de problemas; en particular los métodos de elementos finitos y de Raleigh-Ritz optimizado.

Los sistemas bajo estudio son dos: (a) una placa circular empotrada, con sobreespesor (Figura 1); (b) una placa anular con sobreespesor, con diversas condiciones de contorno en ambos bordes, el interno y el externo (Figura 2). En ambos casos se investigan los modos axisimétricos de vibración para diferentes valores de los parámetros de forma.

Para el caso de la placa circular se analizan los resultados obtenidos mediante el método de Railegh-Ritz optimizado en el que se efectúa una aproximación polinómica de la amplitud de desplazamiento dinámico transversal  $W(r)$ , con un exponente de optimización  $\gamma$ . Los resultados se comparan con el método de elementos finitos y se estudia la convergencia al incrementar el número de términos.

Para el caso de la placa anular se utilizan tres tipos de funciones de prueba: (i) una función polinómica con y sin exponente de optimización  $\gamma$ ; (ii) una función polinómica con el agregado de un término de la forma  $1/r$ ; (iii) una función polinómica con un término de la forma  $\ln r$ . Los términos  $1/r$  y  $\ln r$  no son aceptables para el caso de la placa circular dado que se trata de funciones singulares en el origen, pero sí lo son en el caso de las placas anulares, ya que en éstas el origen queda excluido. En todos los casos se estudia la convergencia al aumentar el número de términos de la aproximación.

### MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Para el cálculo de los modos normales de vibración de los sistemas vibrantes mostrados en las figuras 1 y 2 se toma:

$$w(R,t) = W(R) e^{i\omega t} \quad (1)$$

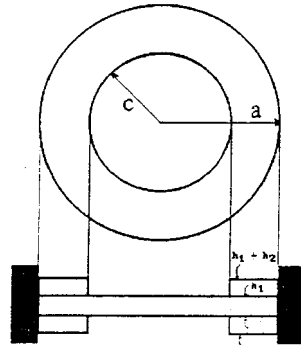


Figura 1: placa circular empotrada con espesor escalonado

para el desplazamiento transversal de la placa, donde  $R$  es el radio adimensional  $r/a$  con  $a$  radio externo de la placa. La función de forma  $W(R)$  se aproxima mediante una función de prueba  $W_a[1]$

$$W_a(R) = \sum_{j=0}^J A_j \xi_j(R) \quad (2)$$

A cada una de las funciones coordenadas  $\xi_j(R)$  se le exige el cumplimiento de las condiciones de contorno. Una elección conveniente de la función de prueba  $W_a$  es, como se expresa en las conclusiones, muy importante para lograr una rápida convergencia de los resultados. De acuerdo con el método de Ritz se construye el funcional

$$F(W_a) = U_{\max} - T_{\max} \quad (3)$$

donde  $U_{\max}$  es la energía potencial máxima y  $T_{\max}$  es la energía cinética máxima, y se exige que ese funcional satisfaga la condición de extremo:

$$\frac{\partial F[W_a]}{\partial A_j} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (4)$$

sistema de  $J$  ecuaciones con las  $A_j$  como incógnitas. De la condición de no trivialidad se obtienen las frecuencias  $\Omega_j$  correspondientes a los distintos modos normales.

Si la función de prueba contiene un parámetro de optimización entonces las frecuencias naturales serán funciones de dicho parámetro:

$$\Omega_j = \Omega_j(\gamma) \quad (5)$$

Dado que las raíces del determinante son siempre límites superiores de las verdaderas frecuencias normales del sistema, los valores óptimos satisfacen:

$$\frac{\partial \Omega_j}{\partial \gamma} = 0 \quad (6)$$

Las expresiones correspondientes a cada uno de los dos sistemas estudiados en particular en este trabajo se dan a continuación.

(a) **Placa circular** (Figura 1):

Para este sistema la función de prueba utilizada es:

$$W_a(R) = \sum_{j=0}^J A_j \xi_j(R) = \sum_{j=0}^J A_j \sum_{i=0}^2 C_{ij} R^{\gamma_i+2j} \quad (7)$$

donde

$$\gamma_1 = 0, C_{1j} = 1, \gamma_2 = 2, C_{2j} = \beta_{jk}, \gamma_3 = \gamma, C_{3j} = \alpha_{jk}$$

Dado que la placa está empotrada las condiciones de contorno a satisfacer son:

$$\xi \Big|_{R=1} = 0 \quad \frac{d\xi}{dR} \Big|_{R=1} = 0 \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (8)$$

con las que se determinan los valores de los coeficientes  $C_{2j}$  y  $C_{3j}$ . La expresión del funcional para este sistema resulta ser:

$$F = U_{p1} + U_{p2} - T_{\text{máx}} \quad (9)$$

donde  $U_{p1}$  y  $U_{p2}$  son la energía potencial de deformación de la placa y del sobreespesor respectivamente, y están dadas por:

$$U_{p1} = \pi D_1 \int_0^1 R \left\{ \left( \frac{d^2 W}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{d^2 W}{dR^2} \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right\} dR \quad (10)$$

$$U_{p2} = \pi D_2 \int_0^1 R \left\{ \left( \frac{d^2 W}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{d^2 W}{dR^2} \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right\} dR \quad (11)$$

en tanto que la energía cinética está dada por:

$$T_{\text{máx}} = \pi D_1 \Omega^2 \left[ \int_0^1 RW^2 dR + \frac{h_2}{h_1} \int_{\eta}^1 RW^2 dR \right] \quad (12)$$

con:

$$R = \frac{r}{a}; \quad \eta = \frac{c}{a}; \quad D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\mu_1^2)}; \quad D_2 = E \frac{(h_1+h_2)^3 - h_1^3}{12(1-\mu^2)} \quad (13)$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho h_1 a^4 \omega^2}{D_1} \quad (14)$$

(b) Placa anular (Figura 2)

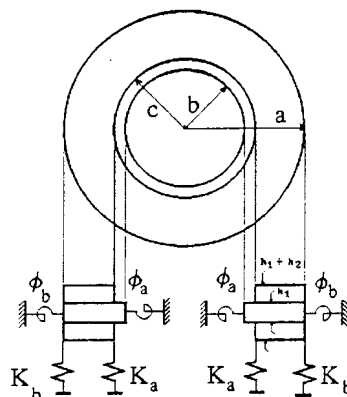


Figura 2: placa anular con espesor escalonado con condiciones de contorno elásticas

Para este sistema se investigan tres funciones de prueba son:

$$W_{\log}(R) = A_0 \left[ 1 + \alpha_{10} \ln R + \alpha_{20} R + \alpha_{30} R^2 + \alpha_{40} R^3 \right] + \sum_{j=1}^J A_j \left[ 1 + \alpha_{1j} R + \alpha_{2j} R^2 + \alpha_{3j} R^3 + \alpha_{4j} R^4 \right] R^j \quad (15)$$

$$W_{\text{pol}}(R) = \sum_{j=0}^J A_j \left[ 1 + \alpha_{1j} R + \alpha_{2j} R^2 + \alpha_{3j} R^3 + \alpha_{4j} R^4 \right] R^j \quad (16)$$

$$W_{1/R}(R) = A_0 \left[ 1 + \alpha_{10} \frac{1}{R} + \alpha_{20} R + \alpha_{30} R^2 + \alpha_{40} R^3 \right] \quad (17)$$

$$+ \sum_{j=1}^J A_j \left[ 1 + \alpha_{1j} R + \alpha_{2j} R^2 + \alpha_{3j} R^3 + \alpha_{4j} R^4 \right] R^j \quad (18)$$

Las condiciones de contorno a satisfacer son ahora más complejas:

$$\Phi_a \left. \frac{dW}{dR} \right|_{R=1} = - \left[ \frac{d^2W}{dR^2} + \mu \left( \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right) - \frac{D_2}{D_1} \left( \frac{d^2W}{dR^2} + \mu \left( \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right) \right) \right]_{R=a} \quad (19)$$

$$\Phi_b \left. \frac{dW}{dR} \right|_{R=\eta_1} = \left[ \frac{d^2W}{dR^2} + \mu \left( \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right) - \frac{D_2}{D_1} \left( \frac{d^2W}{dR^2} + \mu \left( \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right) \right) \right]_{R=\eta_1} \quad (20)$$

$$K_a W \Big|_{R=1} = \left( 1 + D_2/D_1 \right) \frac{d}{dR} \left[ \nabla^2 W \right]_{R=1} \quad (21)$$

$$- K_b W \Big|_{R=\eta_1} = \left( 1 + D_2/D_1 \right) \frac{d}{dR} \left[ \nabla^2 W \right]_{R=\eta_1} \quad (22)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador de Laplace que resulta para este caso:

$$\nabla^2 W = \frac{d^2W}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \quad (23)$$

$\Phi_a$  y  $\Phi_b$  son los coeficientes de flexibilidad adimensionales de los resortes rotacionales de los bordes externo e interno respectivamente y  $K_a$  y  $K_b$  son las constantes adimensionales de los resortes traslacionales de ambos bordes

$$\Phi_a = \frac{a}{\phi_a D_1}; \quad \Phi_b = \frac{a}{\phi_b D_1}; \quad K_a = \frac{k_a a^3}{D_1}; \quad K_b = \frac{k_b a^3}{D_1} \quad (24)$$

y  $\eta_1 = b/a$  y  $\eta_2 = c/a$ .

El funcional adecuado puede expresarse en la forma:

$$F(W) = U_{p1} + U_{p2} + U_b - T_p \quad (25)$$

donde ahora se ha incorporado la energía potencial almacenada por los resortes de los contornos. Los términos del funcional están dados por:

$$U_{p1} = \pi D_1 \int_{\eta_1}^1 R \left\{ \left[ \frac{d^2W}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right]^2 - 2(1-\mu) \frac{d^2W}{dR^2} \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right\} dR \quad (26)$$

$$U_{p2} = \pi D_2 \int_{r_2}^1 R \left\{ \left[ \frac{d^2W}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right]^2 - 2(1-\mu) \frac{d^2W}{dR^2} \frac{1}{R} \frac{dW}{dR} \right\} dR \quad (27)$$

$$U_b = \left[ \Phi_a (dW/dR)^2 + K_a (W^2) \right]_{R=1} + \eta_1 \left[ \Phi_b (dW/dR)^2 + K_b (W^2) \right]_{R=\eta_1} \quad (28)$$

$$T_{\text{máx}} = \pi D_1 \Omega^2 \left[ \int_{\eta_1}^1 RW^2 dR + \frac{h_2}{h_1} \int_{\eta_2}^1 RW^2 dR \right] \quad (29)$$

### MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El programa utilizado en este trabajo es *Finite Element Program NISA versión 94.0 - EMRC*. Por simetría se modeló 1/4 de la placa restringiendo las condiciones de borde correspondientes. En el caso de la placa circular empotrada se empleó una red de 138 elementos triangulares en cada cuarto de placa. En el caso de la placa anular se utilizó un modelo de 100 elementos rectangulares isoparamétricos de 8 nodos para cada cuarto de placa. Los resortes fueron modelados con elementos "spring" del tipo torsional y de traslación.

### Resultados

#### (a) Placa circular

La Tabla I muestra los dos primeros coeficientes de frecuencia para  $c/a = 0.5$  y  $H = (h_1+h_2)/h_1 = 1, 1.5, 1.8, 2, 2.5$  y  $3$ . Se ha empleado el método de Rayleigh Ritz optimizado. En el caso de la placa uniforme ( $H=1$ ) los autovalores calculados coinciden con los valores exactos [2]. Para los valores de sobreespesor elegidos en la tabla la frecuencia fundamental se mantiene cercana a 10 mientras que el siguiente modo es considerablemente menor al correspondiente a una placa plana. Se observa una convergencia uniforme al incrementarse de 2 a 10 el número de términos. Una comparación con el caso sin optimizar muestra que la optimización es importante cuando se emplean pocos términos en tanto que tiene un efecto despreciable si se utiliza un número superior a 10 términos.

Tabla I: Análisis de convergencia del método de Rayleigh-Ritz. Determinación de los primeros dos coeficientes de frecuencia axisimétricos para el sistema de la figura 1 con  $c/a = 0.5$

H	Valores de frecuencia									
	Numero de terminos									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	10-2159	10-2158	10-2158	10-2158	10-2158	10-2158	10-2158	10-2158	10-2158	10-2158
	40-4023	39-788	39-7713	39-7711	39-7711	39-7711	39-7711	39-7711	39-7711	39-7711
1.5	10-0608	10-0449	10-0929	10-0295	10-0291	10-0258	10-0241	10-0241	10-0235	
	37-8448	35-1889	34-2015	33-7216	33-5443	33-5421	33-3115	33-2446	33-2278	
1.8	10-2356	10-2100	10-1813	10-1647	10-1623	10-1587	10-1479	10-1451	10-1446	
	37-8809	34-4127	32-3401	31-0523	30-5795	30-5402	30-2438	29-9911	29-9823	
2.0	10-3906	10-3583	10-3150	10-2830	10-2726	10-2714	10-2521	10-2417	10-2416	
	38-1085	34-2801	31-5726	29-5758	28-8689	28-7502	28-5143	28-1060	28-0714	
2.5	10-8601	10-7882	10-6865	10-5909	10-5328	10-5250	10-4992	10-4381	10-4244	
	38-9633	34-5968	30-7146	26-9425	25-4470	25-0621	25-0403	24-3668	24-0688	
3.0	11-3498	11-2539	11-0839	10-8710	10-7192	10-6683	10-6608	10-5255	10-4140	
	39-9620	35-3249	30-7040	25-5078	23-0206	22-3814	22-3451	21-8293	21-1134	

Tabla II: Coeficiente de Frecuencia fundamental para diferentes valores de  $H = (h_1 + h_2)/h_1$  y  $c/a$

H	Rayleigh-Ritz optimizado		Elementos finitos		
	$c/a$	$\Omega_{00}$	$\Omega_{00}$	$\Omega_{10}$	
1	—	10-21582	10-260	21-383	
	0-40	9-965	—	—	
	1-50	0-50	10-020	10-040	18-793
		0-60	9-956	9-961	18-546
1-80	0-80	8-823	8-789	17-679	
	0-40	10-040	—	—	
	0-50	10-140	10-138	18-028	
	0-60	9-915	9-849	17-817	
	0-80	7-996	7-884	15-951	
	0-40	10-124	—	—	
2-00	0-50	10-240	10-200	17-729	
	0-60	9-849	9-708	17-491	
	0-80	7-480	7-321	14-888	
	0-40	10-361	—	—	
2-50	0-50	10-420	10-232	17-358	
	0-60	9-485	9-113	16-791	
	0-80	6-343	6-126	12-581	
	0-40	10-600	—	—	
3-00	0-50	10-410	10-019	17-179	
	0-60	8-934	8-322	15-922	
	0-80	5-395	5-217	10-771	

La Tabla II muestra una comparación entre los valores de la frecuencia fundamental calculados por los métodos de Rayleigh-Ritz optimizado y de elementos finitos. Se observa que los resultados obtenidos mediante la aproximación analítica están en razonable acuerdo con las predicciones de elementos finitos. Para algunos casos la aproximación obtenida por el método analítico es incluso superior a la de elementos finitos.

#### (b) Placa anular

Las Tabla III muestra el modo fundamental calculado para la función de prueba con término logarítmico. Se estudian los casos  $J = 1$  y  $J = 6$ , para varias condiciones de borde y distintas configuraciones geométricas. La columna rotulada "diferencia" contiene el error relativo de la aproximación por un término de la raíz obtenida. En todos los casos se empleó  $\mu = 1/3$ .

Para las mismas configuraciones se muestra en la Tabla IV los resultados utilizando una aproximación polinómica. La convergencia al valor final es muy rápida ya que con apenas 6 términos se obtienen excelentes resultados. Sin embargo el error relativo para una aproximación de un término es un orden de magnitud superior al caso anterior.

En la Tabla V se muestran los resultados para la aproximación 1/R. El error relativo para una aproximación de un término es también muy superior al de la aproximación logarítmica.

Tabla III: Coeficiente de frecuencia fundamental para la placa anular de la Figura 2 con la función de prueba (15)  $\eta_1 = 0.1$ ;  $\eta_2 = 0.5$ ;  $H = (h_1 + h_2)/h_1$

Ka	Kb	$\Phi_a$	$\Phi_b$	Con termino Logaritmico		diferencia	H
				1 termino	6 terminos		
10	10	10	10	3.9630466	3.9558943	0.002	1.5
			inf	4.0336893	4.0217049	0.003	
		inf	10	3.9620027	3.9559014	0.002	
			inf	4.0324260	4.0218336	0.003	
	inf	10	10	11.1621400	10.9873520	0.016	
			inf	16.0952000	15.7990700	0.019	
		inf	10	11.3046930	11.1098650	0.018	
			inf	16.3652290	16.0547020	0.019	
inf	10	10	10	6.9046971	6.8316368	0.011	1.5
			inf	7.1558332	7.0717389	0.012	
		inf	10	7.4395293	7.3753448	0.009	
			inf	7.8252518	7.7429986	0.011	
	inf	10	10	23.1252850	22.3605250	0.034	
			inf	31.1381850	30.2255180	0.030	
		inf	10	25.6858840	24.8003640	0.036	
			inf	34.4504880	33.3265100	0.034	
10	10	10	10	3.5578316	3.5547903	0.001	2.0
			inf	3.6022146	3.5996532	0.001	
		inf	10	3.5578301	3.5548467	0.001	
			inf	3.6025097	3.6000844	0.001	
	inf	10	10	12.6802300	12.1084090	0.047	
			inf	22.5591070	21.3063270	0.059	
		inf	10	12.8470630	12.2201720	0.051	
			inf	22.9284180	21.6828840	0.057	
inf	10	10	10	6.5645460	6.3855637	0.028	2.0
			inf	7.2685025	6.8292508	0.064	
		inf	10	7.1537136	6.9639252	0.027	
			inf	8.1582884	7.6439000	0.067	
	inf	10	10	25.5855000	22.7224760	0.126	
			inf	38.9686160	36.1640570	0.078	
		inf	10	28.7286750	25.2534700	0.138	
			inf	43.0120410	39.3666010	0.093	



Tabla IV: Coeficiente de frecuencia fundamental para la placa anular de la Figura 2 con la función de prueba (16)  $\eta_1 = 0.1$ ;  $\eta_2 = 0.5$ ;  $H = (h_1 + h_2)/h_1$

Ka	Kb	$\Phi_a$	$\Phi_b$	Funcion Polinomio		diferencia	H	
				1 termino	6 terminos			
10	10	10	10	4.1243704	3.9559989	0.043	1.5	
		inf	inf	4.1276659	4.0217399	0.026		
		inf	10	3.9824311	3.9559950	0.007		
		inf	inf	4.0832023	4.0218864	0.015		
	inf	10	10	10	12.8149010	10.9881510		0.166
			inf	inf	18.4089390	15.7952470		0.165
		inf	10	10	14.9678310	11.1083910		0.347
			inf	inf	23.2796250	16.0490830		0.451
inf	10	10	10	7.2879215	6.8338288	0.066	1.5	
		inf	inf	7.6969004	7.0751334	0.088		
		inf	10	8.0769222	7.3799523	0.094		
		inf	inf	8.7004783	7.7501010	0.123		
	inf	10	10	10	27.0885690	22.3880470		0.210
			inf	inf	36.5694950	30.2522750		0.209
		inf	10	10	30.9229050	24.8520570		0.244
			inf	inf	41.6229770	33.3828740		0.247
10	10	10	10	3.8004324	3.5548405	0.069	2	
		inf	inf	3.7600133	3.5596726	0.056		
		inf	10	3.6397315	3.5549301	0.024		
		inf	inf	3.7694214	3.6001490	0.047		
	inf	10	10	10	15.1742950	12.1064830		0.253
			inf	inf	26.2873940	21.3064120		0.234
		inf	10	10	17.6445150	12.2153510		0.444
			inf	inf	33.0474550	21.6986900		0.523
inf	10	10	10	7.3918598	6.38605	0.158	2	
		inf	inf	8.6008703	6.8324917	0.259		
		inf	10	8.3138496	6.9685576	0.193		
		inf	inf	10.0047000	7.6529133	0.307		
	inf	10	10	10	32.8439960	22.7413640		0.444
			inf	inf	49.2675620	36.1516070		0.363
		inf	10	10	37.8058830	25.2915930		0.495
			inf	inf	55.9833590	39.3806450		0.422

Tabla V: Coeficiente de frecuencia fundamental para la placa anular de la Figura 2 con la función de prueba (17):  $\eta_1 = 0.1$ ;  $\eta_2 = 0.5$ ;  $H = (h_1+h_2)/h_1$

Ka	Kb	$\Phi_a$	$\Phi_b$	Con Terminos 1/R		diferencia	H
				1 termino	6 terminos		
10	10	10	10	3.9677743	3.9558931	0.012	1.5
			inf	4.0394132	4.0217042	0.018	
		inf	10	3.9627144	3.9558998	0.007	
			inf	4.0340924	4.0218325	0.012	
	inf	10	10	11.1327350	10.9873030	0.145	
			inf	16.0473620	15.7992880	0.248	
		inf	10	11.3487390	11.1099140	0.248	
			inf	16.4354270	16.0550400	0.239	
inf	10	10	10	6.9807191	6.8316084	0.380	1.5
			inf	7.2216920	7.0717089	0.150	
		inf	10	7.6328350	7.3743927	0.258	
			inf	7.9971949	7.7412656	0.256	
	inf	10	10	23.2272330	22.3173650	0.910	
			inf	31.2434110	29.5780070	1.665	
		inf	10	25.6789240	24.9836920	0.695	
			inf	33.9951100	33.4481800	0.547	

A manera de resumen, en la Tabla VI se muestra, para algunos casos, una comparación entre los resultados obtenidos con las tres funciones de prueba mencionadas y con una aproximación polinómica con parámetro de optimización exponencial  $\gamma$ . Por último en la Tabla VII se muestra la comparación con los resultados obtenidos empleando el método de elementos finitos. La concordancia de valores obtenida es excelente.

Tabla VI: Coeficiente de frecuencia fundamental para la placa anular de la Figura 2 Comparación entre distintas funciones de prueba

Ka = Kb = $\Phi_a = \Phi_b$	a/b	c/b	h2/h1	Tipo de función utilizada (1 término)			
				Gamma = 4	Con 1/R	Optimizado	Logarítmico
10	0.1	0.55	1.5	4.1243704	3.9677743	4.0268851	3.9630466
			2.0	3.8004324	3.5578636	3.6806464	3.5578316
	0.5	0.75	1.5	5.7049624	-	5.6418909	5.5559293
			2.0	5.3648495	-	5.2466766	5.0609413
inf	0.1	0.55	1.5	41.6229770	33.9951100	38.9092270	34.4504880
			2.0	55.9833590	40.4019550	51.8939340	43.0120410
	0.5	0.75	1.5	124.8674600	-	122.0866800	115.3882500
			2.0	166.0894000	-	161.4882600	149.1436000

Tabla VII: Coeficiente de frecuencia fundamental para la placa anular de la Figura 2  
 Comparación con elementos finitos  $\eta_1 = 0.1$ ;  $\eta_2 = 0.5$ ;  $H = (h_1 + h_2)/h_1$

H=1.5						H=2.0						
Ka	Kb	$\Phi_a$	$\Phi_b$	elementos finitos	c/log. 6 terminos	Ka	Kb	Fia	Fib	elementos finitos	c/log. 6 terminos	
10	10	10	10	3.95500	3.95589	10	10	10	10	3.55590	3.55479	
		inf	inf	4.01700	4.02183			inf	inf	inf	3.59600	3.60008
	inf	10	10	10.77400	10.98735		inf	10	10	10	11.85750	12.10841
		inf	inf	15.78210	16.05470			inf	inf	20.92800	21.68288	
inf	10	10	10	6.75600	6.83164	inf	10	10	10	6.22800	6.38556	
		inf	inf	7.59980	7.74300			inf	inf	inf	7.28690	7.64390
	inf	10	10	21.42900	22.36053		inf	10	10	10	21.26700	22.72248
		inf	inf	31.67500	33.32651			inf	inf	36.78800	39.36660	

### CONCLUSIONES

Se concluye que tanto para las placas circulares como para las anulares el método de Rayleigh-Ritz resulta muy eficiente en cuanto a velocidad de cálculo y permite, además, el uso de recursos computacionales más modestos que el de elementos finitos lo que lo hace muy recomendable para el análisis de sistemas con condiciones de simetría como las expuestas. La exactitud de las aproximaciones polinómicas en la determinación de las frecuencias naturales es excelente. La aproximación mejora sustancialmente al elegir adecuadamente la función de prueba. En efecto en el caso de las placas anulares la inclusión del término  $\ln R$  permite la obtención de una excelente aproximación aún con un sólo término. Este resultado es esperable si se analiza la solución exacta para el caso de la placa anular lisa [2].

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Universidad Nacional de Mar del Plata, ING08-93.

### REFERENCIAS

- [1] Ávalos, D.R., Larrondo, H.A. y Laura, P.A.A., *Vibrating circular plates with stepped thickness over a concentric circular region: a general approximate solution*, J. Acoustical Soc. Am., Vol 147, 1988, págs. 366-370.  
 [2] Leissa, A.W., *Vibration of Plates*. NASA SP 160, 1969.

