

MODELO DE CHOQUE EN SISTEMAS MULTICUERPOS FLEXIBLES

Rubens Sampaio.

Departamento de Engenharia Mecânica. PUC-Rio.
Rua Marquês de São Vicente 225-Gávea
22453-900 Rio de Janeiro - Brasil

Gabriel Barrientos.

Departamento de Ingeniería Mecánica. U. de C.
Casilla 53-C - Concepción - Chile.

RESUMEN.

Se estudia el movimiento de un péndulo doble espacial, restringido en su movimiento por una pared rígida, tal que pueden ocurrir choques. Se estudia la influencia de la flexibilidad en la dinámica del péndulo y se integra la ecuación del movimiento usando el algoritmo Hilbert-Hughes-Taylor.

ABSTRACT.

One studies the motion of a spacial double pendulum that is constrained in his motion by a rigid wall, such that shocks can occur. The influence of the flexibility in the dynamics of the pendulum is studied. The time integration of the motion equation is done through the Hilbert-Hughes-Taylor algorithm.

INTRODUCCIÓN.

Modernamente la simulación criteriosa de la dinámica de sistemas mecánicos se torna cada vez más importante. Un ejemplo es el caso de juntas con huelgos, donde los elementos pueden chocar. El problema es modelar el choque entre las partes y entender la influencia de la elasticidad en la dinámica. La flexibilidad de los elementos del sistema ha atraído la atención de los investigadores, ya que tiene aplicación en sistemas tales como: robótica, satélites flexibles, paneles solares, aspas de helicópteros, antenas, etc.. En este trabajo se estudia el comportamiento dinámico de un péndulo doble espacial, que puede chocar con el suelo, y que está formado por barras. Se discretizan las barras como vigas y se utiliza la técnica de los elementos finitos. Se utiliza el modulo MECANO [1] y, se simula el choque con un elemento finito que permite el estudio dinámico de levas [2]. Se estudian los efectos de la flexibilidad en la respuesta del sistema. La ecuación del movimiento del péndulo se integra implícitamente usando el algoritmo HHT [3].

DINÁMICA DE MULTICUERPOS FLEXIBLES.

Parametrización de las rotaciones. Existen muchas formas de representar las rotaciones finitas. Entre ellas se destacan: ángulos de Euler, parámetros de Euler, parámetros de Rodriguez (también llamados rotaciones semi-tangenciales o vector seudo rotacional), vector rotación conformal y vector rotacional. Los principales criterios en la selección de la forma de representación está dada por: la cantidad de parámetros independientes, significado físico, propiedades algebraicas y puntos de singularidad. El vector rotacional usa tres parámetros independientes y tiene una interpretación física simple. Sólo presenta singularidad en 2π , muy fácil de corregir computacionalmente. El vector rotacional está representado por: $\Phi = n\phi$, donde n es el vector unitario en la dirección del eje de rotación y $\|\Phi\| = \phi$. El operador rotación R es de la forma:

$$R = I + \frac{\sin \phi}{\phi} \tilde{\Phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}} \right)^2 \tilde{\Phi}^2 \quad (1)$$

$$\tilde{\Phi}_{ij} = -\epsilon_{ijk} \Phi_k \quad ; \quad \Phi_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \tilde{\Phi}_{jk} \quad (2)$$

expandiendo en serie (1) se puede obtener (3) que es conocida como el mapeo exponencial de las rotaciones.

$$R = I + \tilde{\Phi} + \frac{1}{2!} \tilde{\Phi}^2 + \frac{1}{3!} \tilde{\Phi}^3 + \dots + \frac{1}{n!} \tilde{\Phi}^n + \dots = \exp(\tilde{\Phi}) \quad (3)$$

Incrementos en las rotaciones. En el estudio de la dinámica de multicuerpos es fundamental la descripción del movimiento incremental e infinitesimal. Se formulan las ecuaciones de la dinámica en función de las velocidades y aceleraciones, y se obtienen expresiones para el trabajo virtual y para las restricciones al movimiento en función de los desplazamientos y las rotaciones virtuales. Haciendo uso de la geometría diferencial, se puede obtener la relación entre los vectores incremento de la rotación Θ en dos instantes cercanos A y B según $\Theta_{(B)} = T(\Phi) \Theta_{(A)}$ donde la transformación $T(\Phi)$ es definida por:

$$T(\Phi) = \frac{\sin \|\Phi\|}{\|\Phi\|} \cdot I + \left(1 - \frac{\sin \|\Phi\|}{\|\Phi\|}\right) n \otimes n - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\|\Phi\|}{2}}{\frac{\|\Phi\|}{2}} \right)^2 \tilde{\Phi} \quad (4)$$

así se puede expresar $\delta\Theta = T(\Phi) \delta\Phi$ y $\Omega = T(\Phi)\dot{\Phi}$, donde $\delta\Theta$ es la variación angular material, Ω es la velocidad angular material, $\delta\Phi$ es la variación del vector rotacional y $\dot{\Phi}$ su derivada en el tiempo. La aceleración angular material $A = T(\Phi)\ddot{\Phi} + \dot{T}(\Phi)\dot{\Phi}$, se obtiene diferenciando Ω .

Medida de las deformaciones en vigas elásticas. Las hipótesis de la teoría son: (a) La viga es inicialmente recta, (b) Las secciones transversales permanecen planas después de la deformación, (c) existe cizalle, (d) se considera la energía cinética rotacional de las secciones

transversales. La posición de un punto P en una sección de la viga, después de la deformación, está dada por la hipótesis cinemática:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + X_2 t_2 + X_3 t_3 \quad (5)$$

donde, s es un parámetro que cuantifica la posición de una sección de la viga a lo largo del eje axial; $\mathbf{x}_0(s)$: posición del eje axial de la viga; X_i con $i=2,3$ son las coordenadas materiales de P en la sección. Derivando (5) y sabiendo que $\mathbf{t}=\mathbf{R}\mathbf{E}$, $\Rightarrow \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}\mathbf{R}^T\mathbf{t}$, donde \mathbf{t} representa el triedro material y \mathbf{E} el triedro espacial que definen la orientación de una sección, se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}_0}{ds} + \frac{d\mathbf{R}}{ds}\mathbf{R}^T(X_2 t_2 + X_3 t_3) \stackrel{(5)}{=} \frac{d\mathbf{x}_0}{ds} + \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (6)$$

donde $\tilde{\mathbf{k}} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}\mathbf{R}^T$ y $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds}$, definen la matriz anti-simétrica de curvatura espacial y material. $\tilde{\mathbf{k}}$ y $\tilde{\mathbf{K}}$ están relacionados a los vectores \mathbf{k} y \mathbf{K} según (2). Las componentes de \mathbf{K} se pueden interpretar como la deformación por torsión y por flexión. La deformación material \mathbf{E} , está dada por:

$$\mathbf{E}(s, \mathbf{X}) \stackrel{(6)}{=} \mathbf{R}^T \left(\frac{d\mathbf{x}_0}{ds} - \mathbf{t}_1 \right) + \tilde{\mathbf{K}}(X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3) \quad (7)$$

donde $\Gamma = \mathbf{R}^T(d\mathbf{x}_0/ds - \mathbf{t}_1)$ define el vector deformación de la línea centroidal y, sus componentes se pueden interpretar como las deformaciones longitudinal y por cizallamiento.

Formulación débil. Para obtener la formulación variacional de la viga expresamos la ecuación de la energía. De (6) y (7) se obtienen las variaciones $\delta\Gamma$ y $\delta\mathbf{K}$. El trabajo virtual de las fuerzas internas $\delta\pi_{\text{int}}$. Es:

$$\delta\pi_{\text{int}} = \int_{[0,L]} (\mathbf{N}^T \delta\Gamma + \mathbf{M}^T \delta\mathbf{K}) ds \quad (8)$$

donde $\mathbf{N}=\mathbf{R}^T\mathbf{n}$ es la fuerza axial interna y $\mathbf{M}=\mathbf{R}^T\mathbf{m}$ es el momento de las fuerzas internas y $\mathbf{n}(s,t) = \int_{\Omega} \mathbf{P}\mathbf{E}_1 = \int_{\Omega} \mathbf{T}_1 ds$; $\mathbf{m}(s,t) = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{T}_1 ds$. $\mathbf{P}(x)$ es el tensor de esfuerzos Piola-Lagrange, y \mathbf{T} el vector esfuerzos. El trabajo de las fuerzas externas $\delta\pi_{\text{ext}}$. es:

$$\delta\pi_{\text{ext}} = \int_{[0,L]} (\delta\mathbf{x}_0 \cdot \bar{\mathbf{n}} + \delta\Theta \cdot \bar{\mathbf{M}}) ds \quad (9)$$

con $\bar{\mathbf{n}}(s,t) = \int_{\Omega} \mathbf{b} ds + \int_{\delta\Omega} \bar{\mathbf{T}}_0 dx$; $\bar{\mathbf{m}}(s,t) = \int_{\Omega} \mathbf{X} \times \mathbf{b} dS + \int_{\delta\Omega} \mathbf{X} \times \bar{\mathbf{T}}_0$; y $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{m}}$ el momento externo aplicado, expresado en componentes materiales, \mathbf{b} es el vector de cargas aplicadas por unidad de superficie y $\bar{\mathbf{T}}_0$ es la carga aplicada por unidad de longitud. Para obtener la representación de las fuerzas de inercia se aplica el principio de Hamilton. La energía cinética está dada por:

$T = 1/2(m\dot{\mathbf{x}}_o \cdot \dot{\mathbf{x}}_o + \Omega \cdot \mathbf{J}\Omega)$, con $\mathbf{J} = \text{diag.}(I_1, I_2, I_3)$ el tensor de inercia. El principio de Hamilton está dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = - \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{\mathbf{x}}_o \cdot \ddot{\mathbf{x}}_o m + \delta \Theta \cdot (\mathbf{J}\mathbf{A} + \Omega \times \mathbf{J}\Omega)) dt \quad (10)$$

\Rightarrow fuerzas de inercia material $\mathbf{G}_{\text{iner}}^T = [m\dot{\mathbf{x}}_o \quad \mathbf{J}\mathbf{A} + \Omega \times \mathbf{J}\Omega]$; y el trabajo de las fuerzas de inercia es:

$$-\delta \pi_{\text{iner}}(s) = \delta \mathbf{x}_o \cdot m\ddot{\mathbf{x}}_o + \delta \Theta \cdot (\mathbf{J}\mathbf{A} + \Omega \times \mathbf{J}\Omega) \quad (11)$$

Formulación por elementos finitos. Los elementos rígidos son caracterizados por deformación nula y los flexibles son derivados de expresiones de trabajo virtual y de las leyes constitutivas del material. Consideramos los elementos de la discretización basados en interpolaciones lineales para los desplazamientos y las rotaciones, dadas por:

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o(s) \\ \Phi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i(s)\mathbf{x}_{oi} \\ \mathbf{N}_i(s)\Phi_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde \mathbf{x}_{oi} y Φ_i son los valores en los nodos para la posición y las rotaciones. $\mathbf{N}_i(s)$ son las funciones de interpolación lineal, correspondientes al nodo i . La matriz de los gradientes de la deformación, que aparece en la ecuación del movimiento será:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{N}}{ds} \mathbf{R}^T & \{\mathbf{N}(\mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{x}_{oi}}{ds})\mathbf{T}(\Phi)\}^* \\ 0 & \frac{d\mathbf{N}}{ds} \mathbf{T}(\Phi) + \mathbf{N}[\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{T}(\Phi) + \frac{d}{ds} \mathbf{T}(\Phi)] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$\{ \}^*$ es la parte anti simétrica de $\{ \}$ (2). $\delta \mathbf{E} = \mathbf{B}\delta \mathbf{q}$. $\mathbf{E}^T = [\Gamma^T \quad \mathbf{K}^T]$ es la matriz de deformaciones: \mathbf{B} se obtiene de las variaciones $\delta \Gamma$ y $\delta \mathbf{K}$. Las restricciones cinemáticas son consideradas de la forma $\varphi(\mathbf{q}_e, \dot{\mathbf{q}}_e, t) = \mathbf{0}$, e introducidas en el ecuacionamiento a través de la definición de un conjunto de multiplicadores de Lagrange λ . Cada elemento de la discretización posee energía cinética y de deformación, tal que la energía interna total del sistema y su energía cinética se obtienen por la suma de los elementos individuales: $\pi_{\text{int.}} = \sum_e \pi_e(\mathbf{q}_e)$ y $T = \sum_e T_e(\mathbf{q}_e, \dot{\mathbf{q}}_e, t)$. Para mejorar la aproximación numérica del sistema de ecuaciones obtenido, es posible usar el método Lagrangiano aumentado, que incluye términos de penalidad en las restricciones, que refuerzan el carácter positivo definido del funcional. Así:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \pi - k\lambda^T \varphi - p\varphi^T \varphi) dt = 0 \quad (14)$$

con $\delta \pi_{\text{ext.}} = -\mathbf{g}_{\text{ext.}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\delta \mathbf{q}$; $\delta \pi = \delta \pi_{\text{int.}} - \delta \pi_{\text{ext.}}$; k es un factor de escalamiento sobre las restricciones y p un término de penalidad. Así, las ecuaciones del movimiento quedan de la forma:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T(k\lambda + p\varphi) = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (15)$$

donde $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ es la suma de las fuerzas internas, externas y de inercia complementarias.

SIMULACION DEL CHOQUE.

En este trabajo se simula el choque por medio del contacto entre las partes de una leva y su seguidor. El modulo MECANO dispone del elemento CAME, que permite simular el contacto entre cuerpos, y de acuerdo a una adecuada elección de parámetros, permite modelar el choque. Las hipótesis en la descripción cinemática del elementos CAME en el modelo de elementos finitos son: (a) La leva y el seguidor tienen movimiento plano. El contacto se produce en un punto o en una línea; (b) Las superficies de contacto son cilíndricas y definidas por "splines" cúbicas; (c) Las superficies de contacto tienen movimiento relativo y pueden seguir en contacto intermitente; (d) Fuerzas de roce pueden existir en el contacto. La leva es modelada como un cuerpo rígido con una superficie externa sobre la cual desliza el seguidor o segunda leva. Las curvas de las superficies de contacto son parametrizadas usando interpolaciones cúbicas "spline".

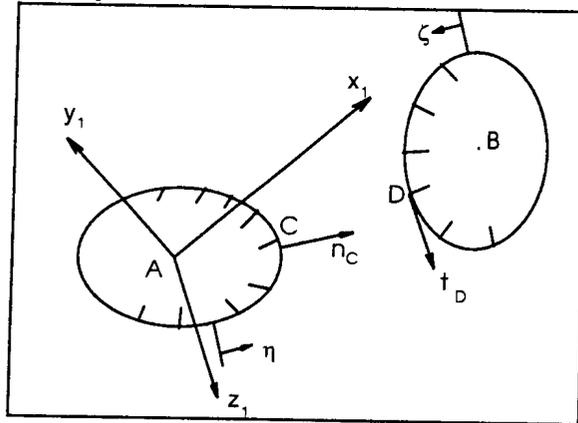


Figura 1. Descripción del elemento CAME.

A y B son puntos materiales con sistemas de coordenadas locales $\{A, x_1, y_1\}$ y $\{B, x_1, y_1\}$. C y D son puntos en la superficie. La cinemática del sistema es descrita en función del vector generalizado de grados de libertad $\mathbf{q}^T = [\mathbf{x}_A^T \quad \Phi_A^T \quad \mathbf{x}_C^T \quad \mathbf{x}_B^T \quad \Phi_B^T \quad \mathbf{x}_D^T \quad \eta \quad \zeta]$, con η y ζ las coordenadas curvilíneas en la definición de las superficies de contacto. La leva y seguidor son conectados al sistema de multicuerpos en los nodos A y B. Las restricciones al movimiento de este elemento son:

$$[\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3] = [e_1^T \quad e_2^T \quad e_3^T] [(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) - \mathbf{R}_A(\Phi)r(\eta)]$$

$$[\varphi_4 \quad \varphi_5 \quad \varphi_6] = [e_1^T \quad e_2^T \quad e_3^T] [(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_B) - \mathbf{R}_B(\Phi)s(\zeta)]$$

$$\varphi_7 = \mathbf{n}_C \cdot \mathbf{t}_D = 0$$

$$\varphi_8 = \mathbf{t}_C \cdot (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C) = 0$$

(16)

donde $\varphi_1 \dots \varphi_6$, representan la relación de las coordenadas de los puntos C y D sobre la superficie de la leva, con las coordenadas de los puntos materiales A y B. φ_7 permite satisfacer la condición de que la normal de una superficie es perpendicular a la tangente de la otra. φ_8 nos dice que el nodo D siempre está sobre la normal de C. La condición de no penetración entre leva y seguidor es impuesta a través de la definición del potencial pseudo elástico $\psi = 1/2k_{np}(\mathbf{q}_{rel,n})\mathbf{q}_{rel,n}^2$; con $k_{np}(\mathbf{q}_{rel,n}) = k_{cont.}$ para $\mathbf{q}_{rel,n} < 0$ y nulo para $\mathbf{q}_{rel,n} \geq 0$. $\mathbf{q}_{rel,n} = \mathbf{n}_C \cdot (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C)$ es el desplazamiento relativo normal. Se incluye amortiguamiento, considerando la función de disipación de Rayleigh $\Delta = 1/2c_{np}(\mathbf{q}_{rel,n})\dot{\mathbf{q}}_{rel,n}^2$, con $c_{np}(\mathbf{q}_{rel,n}) = c_{cont.}$ para $\mathbf{q}_{rel,n} < 0$ y nulo para $\mathbf{q}_{rel,n} \geq 0$. Así, la fuerza de contacto \mathbf{F}_C es:

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_{el.as.} + \mathbf{F}_{dis.} = k_{np}\mathbf{q}_{rel,n} + c_{np}\dot{\mathbf{q}}_{rel,n} \quad (17)$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

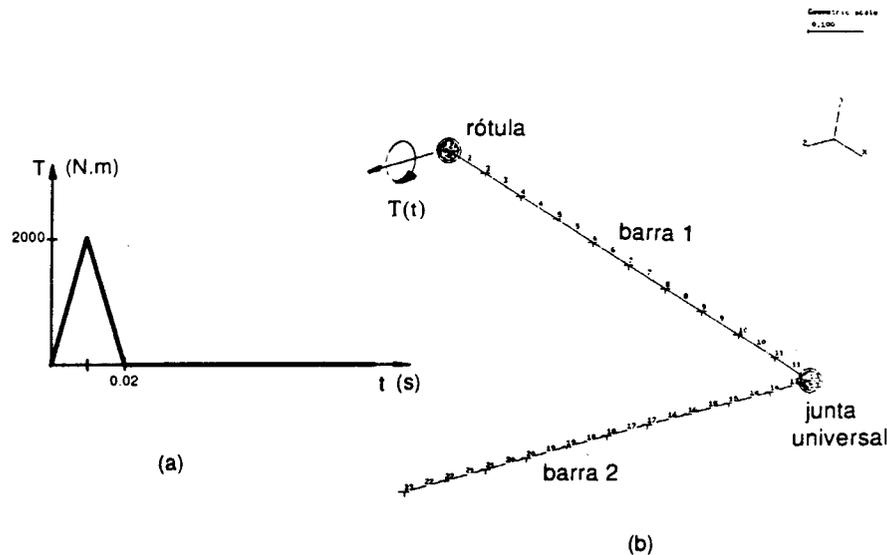


Figura 2.(a) Momento aplicado a la barra 1. (b) Discretización para péndulo doble espacial con choque con el suelo.

Se simula un péndulo doble espacial que puede chocar con el suelo. La figura 2, muestra el sistema en su configuración inicial, con los diferentes parámetros usados. Cada barra es discretizada en 10 elementos de igual longitud: la barra 1 está compuesta por los nodos 2 al 12 y por los elementos de viga 2 al 11; la barra 2 está compuesta por los nodos 13 al 23 y por los elementos 13 al 22. Los elementos 1 y 12 son especiales y corresponden a la rótula (que restringe al primer elemento de la barra 1 a moverse en el plano XY) y a la junta universal respectivamente. La simulación del choque se consigue con el elemento CAME, ubicando una

leva en el nodo 23 y la otra fija a 1.8 m. y que simula el suelo rígido. Los datos generales del sistema son: $m_1 = m_2 = 1$ kg.; $L_1 = L_2 = 1$ m.; $H = 1.8$ m. (altura del suelo); densidad de 7800 kg/m³; sección transversal de la viga $s=9e-4$ m²; momentos de inercia de la sección: $I_x=I_y=8.3e-8$ m⁴; $I_z=4.15e-8$ m⁴; módulo de Poisson $\nu = 0.3$.

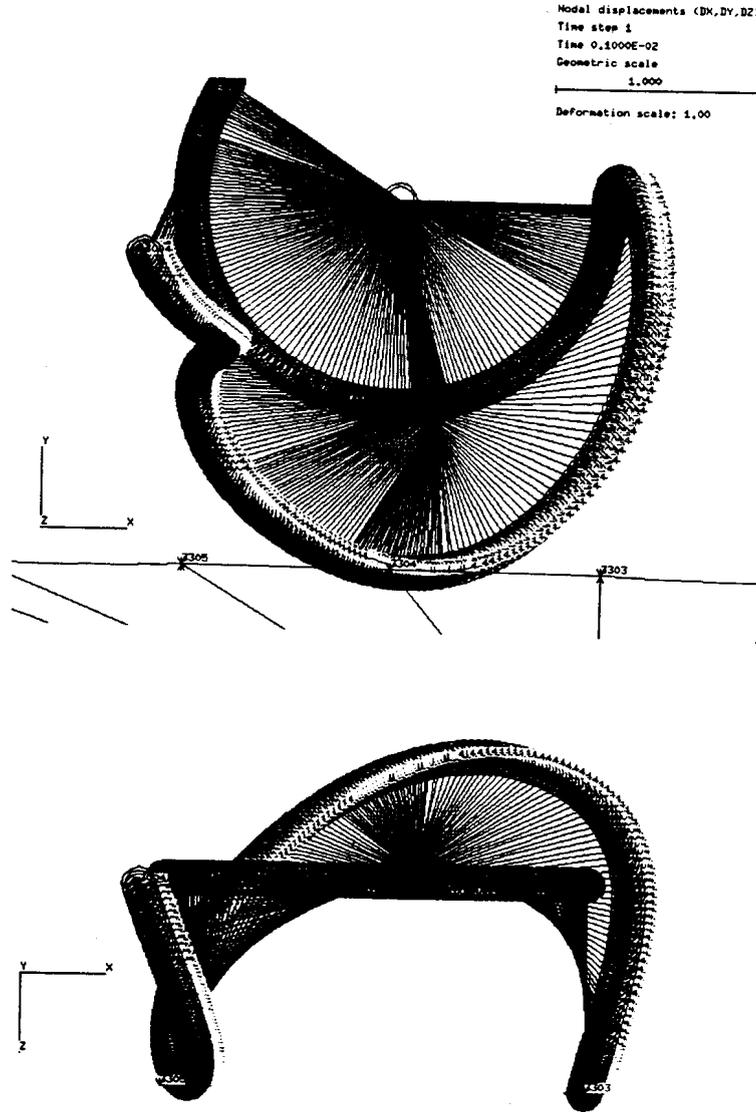


Figura 3. Animación para péndulo doble espacial con barras rígida/rígida.

El efecto de la flexibilidad es considerada variando el módulo de elasticidad del material. Se estudian 3 casos: (a) Para barra **rigida** se usa un módulo de elasticidad $E=2.1e15$ N/m² (nuestra rigidez es considerando 10000 veces mayor que la elasticidad del acero). (b) El caso **flexible1** considera $E=2.1e11$ (acero) y, (c) El caso **flexible2**, para un material con $E=2.1e10$ (la décima parte que el acero). En todos los casos se aplica el torque dinámico (tipo función delta) mostrado en la Figura 2 [4]. Se espera que las condiciones de choque sean análogas en todos los casos, ya que se mantuvieron constantes los parámetros “c” y “k” que cuantifican la fuerza de contacto (17). Nos referiremos a ambas barras del péndulo de la forma: barra1/barra2. La Figura 3 muestra una animación en planta y elevación, para el caso rigida/rigida. La figura 4 muestra la trayectoria de los extremos de la barra 1 y 2 (nodos 12 y 23 respectivamente), para el caso rigida/rigida, desde tres planos ortogonales. Los gráficos superiores representan al nodo 12 y los inferiores al nodo 23. Las figuras 5 y 6 muestran los mismos resultados para los casos flexible1/flexible1, y flexible2/flexible2. Como podemos ver el comportamiento dinámico es bien distinto en los tres casos. Existe realmente una gran influencia de la flexibilidad. Comparando el desplazamiento máximo del nodo 12 respecto al plano X-Y, con la longitud de la barra, encontramos para los tres casos estudiados, los siguientes valores:

rigida/rigida	= 0.0000009 m.
flexible1/flexible1	= 0.025 m.
flexible2/flexible2	= 0.08 m.

En el tercer caso, que corresponde a un material que tiene una elasticidad 10 veces menor que la del acero, el efecto de la flexibilidad ya es significativo. La figura 7, muestra la componente X del vector rotación, la velocidad vertical y la aceleración vertical del nodo 23 para los casos rigida/rigida (gráficos superiores) y flexible2/flexible2 (gráficos inferiores). La diferencia entre ambos casos es notoria, ya que a mayor flexibilidad de los elementos los niveles vibratorios serán mayores después del choque.

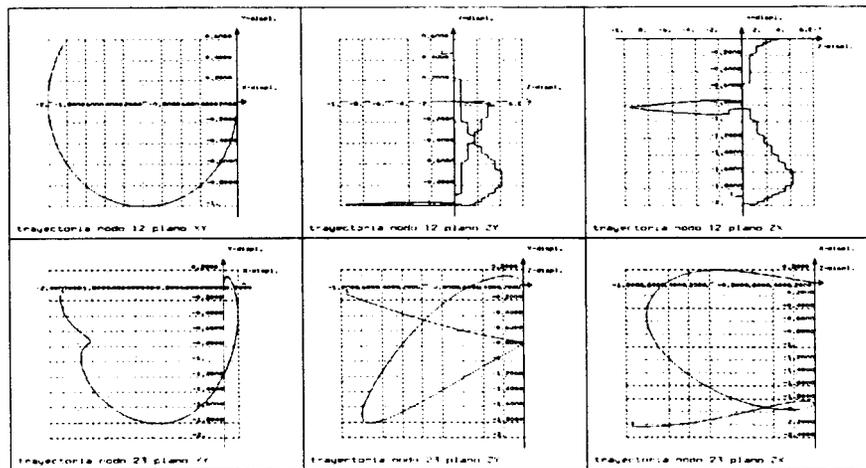


Figura 4. Trayectoria de los nodos 12 y 23 para el caso rigida/rigida.

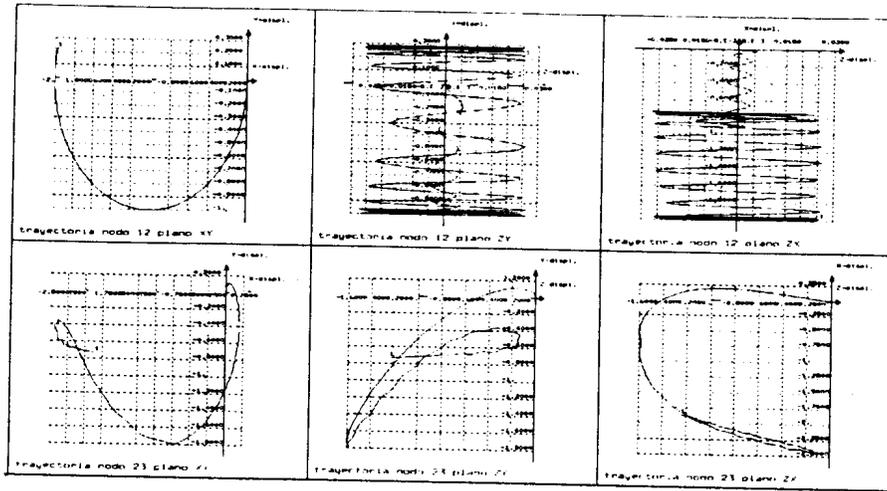


Figura 5. Trayectoria de los nodos 12 y 23 para el caso flexible1/flexible1.

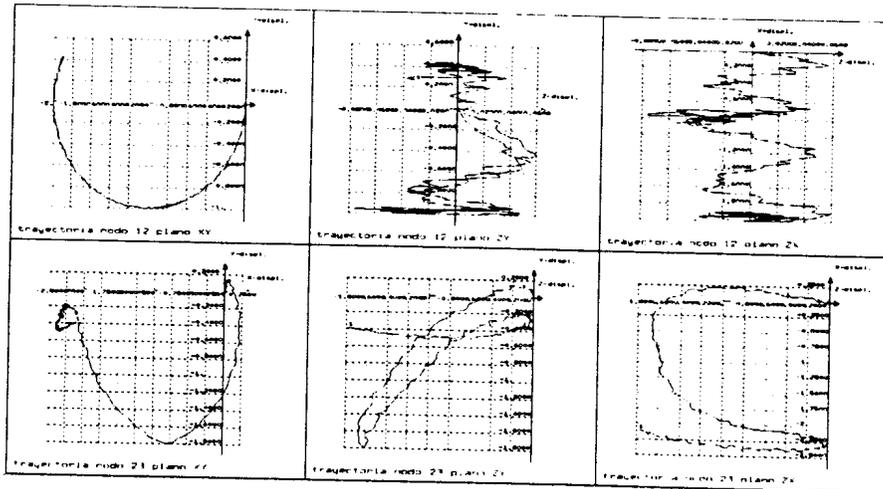


Figura 6 Trayectoria de los nodos 12 y 23 para el caso flexible2/flexible2.

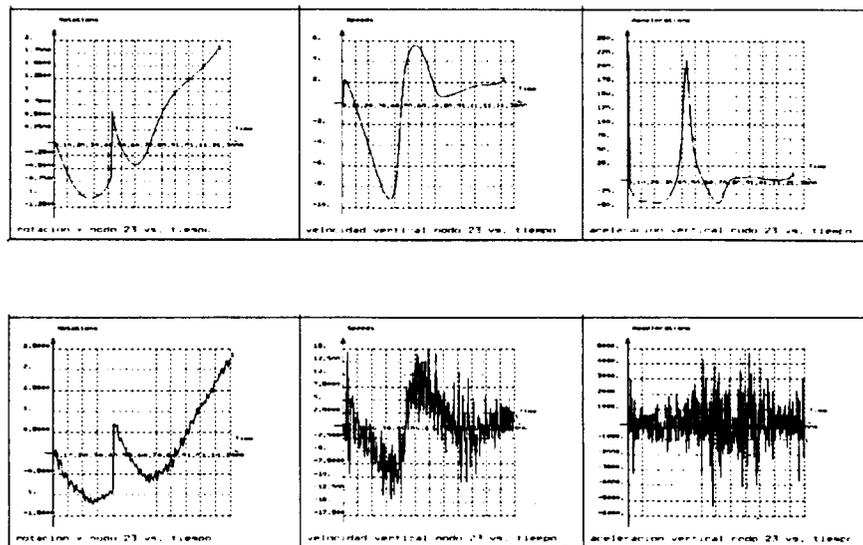


Figura 7. Componente X del vector rotacional, velocidad vertical y aceleración vertical, para el caso rígida/rígida (gráficos superiores) y flexible2/flexible2 (gráficos inferiores), del nodo 23.

REFERENCIAS.

- [1] Geradin M., Remouchamps A., Masy G., *Mecano: A finite element software for flexible multibody dynamics*, Report Ltas University of Liège, Belgium, 1989.
- [2] Cardona A., Geradin M., *Kinematic and dynamic analysis of mechanism with cams*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 103, pp. 115-134, 1993.
- [3] Hilbert H.M., Hughes T.J.R., Taylor R.L., *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*, Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol. 5, pp. 283-292, 1977.
- [4] Sampaio R., Barrientos G., *Dinámica de un sistema multicuerpos: Influencia de la flexibilidad*, XVI CILAMCE, Paraná, Brasil, 1995.