

**PROPOSICION DE UN MODELO DE GRIETA PARA EL ESTUDIO
DEL COMPORTAMIENTO DINAMICO DE UN MOTOR**

Pedro N. Saavedra González
Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción, Casilla 53-C, Concepción, Chile

Luis San Juan Sepúlveda
Departamento Mecánico, Facultad de Ingeniería
Universidad del Bío Bío, Casilla 5-C, Concepción, Chile

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio teórico y experimental de la dinámica de un sistema rotor-descanso con una grieta transversal en su eje. Con el objeto de poder utilizar programas estándares de elementos finitos, se deduce, utilizando los principios de la fractomecánica, la matriz de rigidez de un elemento de eje agrietado. Para representar los cambios de rigidez debido al respiro de la grieta, se propone un nuevo modelo. Se determinan indicadores vibratorios que pueden ser usados para diagnosticar la presencia de la grieta en el eje.

ABSTRACT

A theoretical analysis and experimental work of the dynamics of a rotor-bearing system with a transversely cracked shaft is presented. In order to model the system for standard finite element software, the stiffness matrix of a shaft element with an opening/closing crack is derived based on fracture mechanics. A new model for the crack breathing is presented. Some vibrational indicators for diagnosing a shaft crack are determined.

INTRODUCCION

La tendencia actual hacia el diseño de máquinas rotatorias cada vez más livianas y rápidas, hace que aumente la probabilidad de que en éstas ocurra una falla catastrófica, como lo es por ejemplo, la rotura de un eje debido a una grieta transversal. A pesar del diseño cuidadoso de los ejes, y de emplearse materiales de alta calidad, existen antecedentes sobre costosas detenciones de plantas, producto del colapso de ejes agrietados en máquinas críticas [1]. Esto hace necesario el empleo de un procedimiento de inspección eficaz, como el monitoreo de sus vibraciones, tendiente a detectarla a tiempo y evitar la falla catastrófica.

Para el estudio analítico del problema es necesario evaluar la rigidez del eje agrietado por medio de algún "modelo de grieta" y de un "modelo de cierre apertura" que describa la variación de rigidez del eje cuando éste rota.

Para los modelos de grieta se han utilizado procedimientos que emplean: elementos finitos y las propiedades elásticas del material [2], [3]; elementos finitos y las propiedades elastoplásticas del material [4]; conceptos de la fractomecánica [5], [6]. Para cuantificar la variación en la rigidez del eje debido al cierre apertura de la grieta, la literatura muestra modelos que pueden ser clasificados en dos grupos: a) modelos complejos, en los cuales se intenta aproximar el verdadero valor de la rigidez del eje, para cada grado de apertura de la grieta durante el movimiento del rotor [6]; y b) modelos simples, en los cuales se determinan los valores de la rigidez para la grieta totalmente abierta y cerrada, y para la grieta parcialmente abierta se utiliza una ley de variación arbitraria entre dichos valores.

Donde existe una carencia grande de trabajos es en la parte experimental, donde sólo se puede citar los trabajos de Muszynska [1], Iman et al [3] e Inagaki [8]. El presente trabajo tiene por objetivo realizar un estudio teórico experimental que permita obtener las características vibratorias del rotor agrietado, con el propósito de ser empleadas en el diagnóstico de esta falla. Para esto, se simula numéricamente el comportamiento de un rotor agrietado utilizando el modelo de grieta basado en la mecánica de fractura [9] (seis grados de libertad). La variación de rigidez con el giro del eje, se cuantifica utilizando un nuevo modelo de cierre apertura propuesto, de mediana complejidad, pero que representa mucho mejor la situación física del cierre apertura de la grieta que los modelos simples. Los resultados numéricos son comparados satisfactoriamente con los obtenidos experimentalmente en un rotor de laboratorio, lo cual valida el modelo teórico y las conclusiones que de éste se desprenden.

MODELACION DE UN ROTOR CON EJE AGRIETADO

La presencia de una grieta transversal en un eje genera una disminución local de su flexibilidad. En el fondo de la grieta bajo carga se produce una concentración de esfuerzos que genera una mayor deformación en torno a ella y, por lo tanto, un aumento de la flexibilidad o compliancia del eje. Los coeficientes de flexibilidad que introduce la grieta, C_{ij} , razón entre el desplazamiento en la dirección i y la fuerza en la dirección j , han sido determinados utilizando principios de la fractomecánica para ejes circulares con segmentos de área agrietados y abiertos de diferentes profundidades "a" [9]. Sin embargo, en un rotor en funcionamiento, su eje está sometido a cargas estáticas y dinámicas, las cuales producen apertura y cierre de la grieta, lo que hace variar su flexibilidad. El proceso de cierre/apertura, para el caso de un eje donde la carga estática debido al peso del rotor es predominante, se ilustra en figura 1.

Debido al proceso de cierre apertura, los coeficientes de la matriz de flexibilidad adicional que introduce la grieta, C , varían entre cero, cuando la grieta se encuentra cerrada, hasta un valor máximo cuando la grieta está totalmente abierta. En el presente trabajo se propone un nuevo modelo de grieta, el cual cuantifica con más exactitud las variaciones de la flexibilidad que la variación senoidal de los modelos simples comúnmente usados en la literatura.

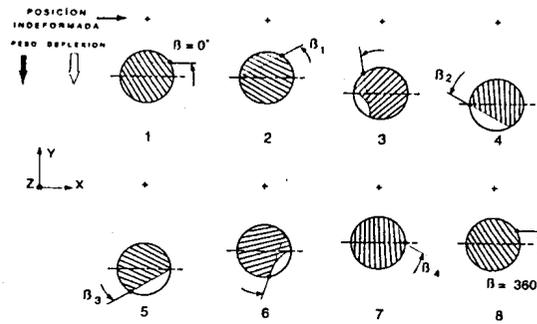


Figura 1: Deflexiones del eje y grados de apertura de la grieta para diferentes posiciones angulares de ella.

El modelo propuesto consiste en reemplazar el área real abierta de la grieta por una área en forma de segmento circular de profundidad instantánea P_i , figura 2, lo cual permite utilizar los gráficos para los coeficientes de flexibilidad que introduce la grieta que publica la literatura [9], [10]. Para determinar la profundidad instantánea, P_i , se considera que el "fondo supuesto" de la grieta es la línea recta que une los puntos extremos del "fondo real"; para más detalles ver referencia [10].

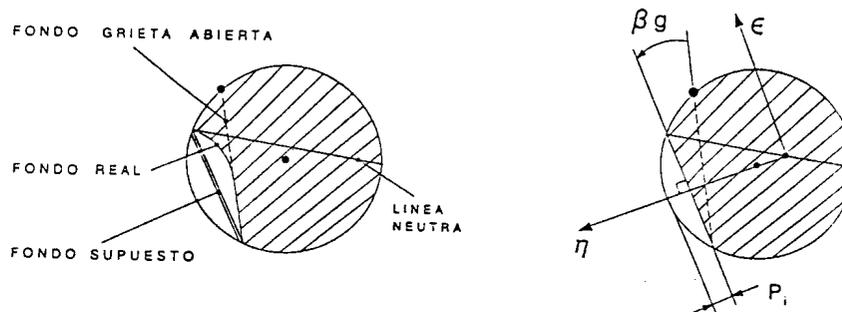


Figura 2: Sección transversal agrietada semi abierta y modelo propuesto.

Los ejes principales de rigidez ξ y η se orientan de forma que el eje η quede perpendicular al "fondo supuesto" de la grieta, y, por lo tanto, es un eje principal "real" de rigidez, a diferencia de los modelos propuestos en la literatura en que el eje η es fijo y perpendicular al fondo de grieta abierta independiente de su grado de apertura y, por lo tanto, puede desviarse bastante del eje principal "real" de rigidez [9].

Se puede observar que con este modelo de grieta, las mayores diferencias con la situación real ocurren cuando la grieta está comenzando a abrirse o terminando de cerrarse. Sin

embargo, en esta etapa los coeficientes de flexibilidad tienen un valor pequeño con lo cual dicha diferencia es de poca importancia.

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN MOTOR AGRIETADO

Para poder introducir en forma expedita el efecto de una grieta en un análisis mediante elementos finitos de un eje o estructura agrietados, es conveniente formular la matriz de rigidez de la grieta o de un elemento agrietado.

Para determinar la matriz de rigidez de la grieta, se considera ésta como una rótula existente en la sección transversal agrietada. Los movimientos de las secciones transversales son y_L e y_R , donde L y R se refiere a las secciones inmediatamente a la izquierda y a la derecha de la grieta respectivamente. El vector de desplazamientos relativos entre ambas secciones de la grieta está relacionado al vector de fuerzas aplicadas al lado derecho de la grieta, P_R , por la matriz de flexibilidad adicional que introduce la grieta, C [9]:

$$y_R - y_L = C P_R \quad (1)$$

combinándola con las ecuaciones de equilibrio

$$P_L = -P_R \quad (2)$$

se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_L \\ P_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1} & -C^{-1} \\ -C^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_L \\ y_R \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$P = K y \quad (4)$$

donde:

$$\begin{aligned} P^T &= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}\} \\ y^T &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\} \end{aligned}$$

La ventaja de expresar una matriz de rigidez K sólo para la grieta, como se indica en ecuaciones (3) y (4), es su facilidad de cálculo. Sin embargo, para pequeñas grietas los coeficientes de dicha matriz son muy grandes y pueden generar problemas de inestabilidad numérica durante su solución. Una manera de solucionar esto, es determinar una matriz de rigidez para un elemento finito agrietado. Con el objeto de disminuir el número de matrices a manejar, es conveniente ubicar la grieta en un extremo del elemento, como indica la figura 3.

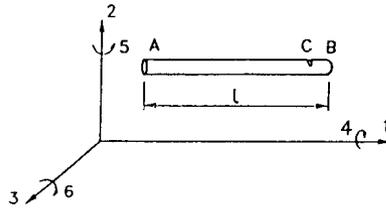


Figura 3: Elemento de eje agrietado.

De las ecuaciones de la mecánica de sólidos, considerando el elemento como una viga de Euler-Bernoulli, la relación entre los desplazamientos y_A e y_C de los puntos A y C respectivamente, es:

$$y_C = A P_C + B y_A \quad (5)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 1/EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3/3EI & 0 & 0 & 0 & l^2/2EI \\ 0 & 0 & l^3/3EI & 0 & -l^2/2EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/GI_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l^2/2EI & 0 & 1/EI & 0 \\ 0 & l/2EI & 0 & 0 & 0 & 1/EI \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde E y G son los módulos de elasticidad y corte respectivamente, I e I_p son los momentos de inercia transversal y polar respectivamente, y A es el área de la sección transversal.

Las ecuaciones de equilibrio para el elemento pueden escribirse como:

$$P_C = D P_A \quad (6)$$

que combinada con las ecuaciones (1) y (5) se obtiene:

$$\begin{aligned} y_B &= T P_A + B y_A \\ T &= \{A + C\} D \end{aligned} \quad (7)$$

que combinada con las ecuaciones de equilibrio para el elemento:

$$P_B = -P_C = -D P_A = -D T^{-1} y_B + D T^{-1} B y_A$$

se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde la matriz de rigidez del elemento agrietado es:

$$K = \begin{bmatrix} -T^{-1} B & T^{-1} \\ D T^{-1} B & -D T^{-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

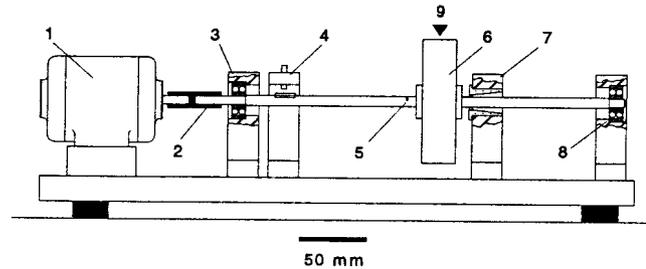


Figura 4: Rotor de laboratorio ensayado.

- ① Motor de velocidad variable, ② Acoplamiento elástico,
- ③ y ⑧ Rodamientos de rótula, ④ Pulso de referencia, ⑤
- Grieta, ⑥ Disco del rotor, ⑦ Restricción para limitar nivel
- de vibraciones en las resonancias, ⑨ Plano de medición.

Figura 4 muestra un esquema del rotor de laboratorio analizado, el cual tiene una grieta transversal en su eje. Para el estudio teórico del comportamiento dinámico del rotor se

usa un programa estándar de elementos finitos utilizando para el elemento agrietado la matriz de rigidez definida en ecuación (9).

Las ecuaciones del movimiento del sistema, si d es el vector de desplazamientos modales, M la matriz de masa del sistema, C la matriz de amortiguamiento viscoso equivalente del sistema, G la matriz giroscópica del rotor, K la matriz de rigidez del rotor, K_s la matriz de rigidez de los descansos, "me" el desbalanceamiento del disco, w la velocidad de rotación y f el vector de las fuerzas externas, son:

$$M\ddot{d} + (C + G)\dot{d} + (K + K_s)d = w^2 me + f \quad (10)$$

Debido a la apertura y cierre de la grieta, la matriz de rigidez del rotor varía con el vector desplazamiento y el tiempo. Las ecuaciones no lineales del movimiento se resuelven utilizando un método de integración numérico y un proceso iterativo.

RESULTADOS

A continuación se muestra los resultados obtenidos de la simulación numérica y los medidos experimentalmente para el rotor indicado en figura 4, para el caso en que el rotor esté perfectamente balanceado.

En figura 5(a) se comparan los resultados obtenidos para el coeficiente de rigidez $K_p(2,2)$ respecto a los ejes principales ξ, η rotatorios con el eje, utilizando el modelo 1 de variación senoidal de la rigidez (línea punteada) y el modelo 2 propuesto (línea llena), para el caso en que la razón profundidad de la grieta/diámetro del eje, $a/D = 0.35$. Los coeficientes (2,2) indican qué fuerza y desplazamiento tienen la dirección 2 de figura 3.

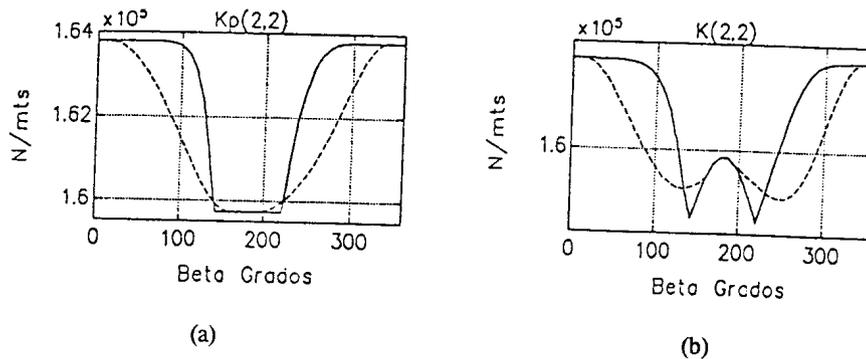


Figura 5: (a) Variaciones de $K_p(2,2)$ con la posición β de la grieta para $a/D = 0.35$.
(b) Variaciones de $K(2,2)$ para $a/D = 0.35$.

En figura 5(a) se observa, como era de esperarse, una coincidencia entre ambos modelos cuando la grieta se encuentra completamente abierta o cerrada. La variación del coeficiente de rigidez cuando la grieta está parcialmente abierta es mayor en el modelo 2 propuesto, que en el modelo 1. Cuando la grieta es más pequeña, ésta permanece menos tiempo parcialmente abierta. En este caso (no mostrado) los resultados obtenidos por ambos modelos son más concordantes y tienden a tener una forma de tipo escalón de la variación de la rigidez.

En figura 5(b) se muestra los resultados obtenidos para el coeficiente de rigidez $K(2,2)$ respecto a ejes estacionarios 1,2,3 de figura 3. La nueva forma de variación de dicho coeficiente es el resultado de la transformación lineal de coordenadas.

Los resultados de la simulación numérica obtenidos para el comportamiento dinámico del rotor utilizando uno u otro modelo serán semejantes o diferirán entre ellos dependiendo de la ubicación de la frecuencia de rotación del rotor (1x rpm) y de sus armónicos respecto a sus velocidades críticas. Como se puede inferir de figura 5, la componente espectral fundamental (de frecuencia 1x rpm) de la variación de rigidez es similar y preponderante en ambos modelos, las diferencias en los modelos se reflejan en las componentes armónicas de ella. Cuando el rotor gira a una velocidad de rotación de modo que ninguno de sus armónicos esté cercano a una velocidad crítica, la vibración será predominantemente de frecuencia 1x rpm, y por lo tanto, los resultados entregados por ambos modelos serán coincidentes. Cuando uno de los armónicos de la velocidad de rotación es cercana a una velocidad crítica, dicha componente será amplificada (resonancia) y el modelo de grieta utilizado pasa a ser de gran importancia para predecir el comportamiento dinámico del rotor con eje agrietado, como se aprecia en figura 6.

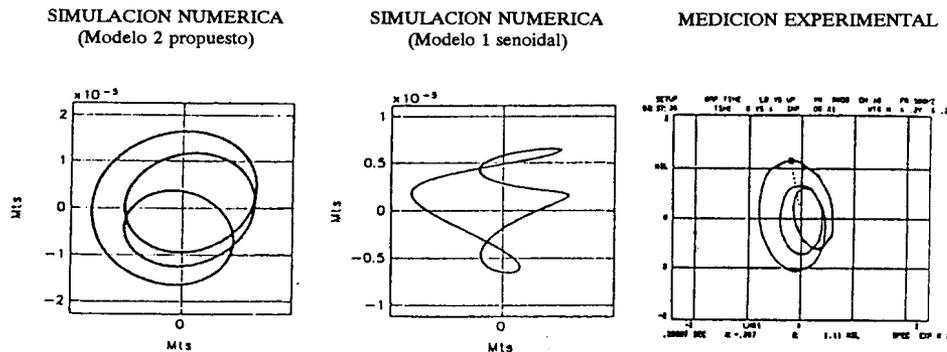


Figura 6: Orbitas del centro del rotor para $\text{rpm} \approx \omega_1/3$.

Figura 6 muestra la forma de la órbita (movimiento del centro del disco) obtenida mediante simulación numérica por ambos modelos y la medida experimentalmente, para una velocidad de rotación tal que su tercer armónico coincide aproximadamente con la

primera velocidad crítica del rotor ω_1 . La similitud entre la órbita obtenida con el modelo 2 propuesto y la experimental es evidente, lo que permite validar dicho modelo.

El espectro en frecuencias de las vibraciones de un rotor con eje agrietado se caracteriza por presentar tres componentes espectrales predominantes a frecuencias $1x$ rpm, $2x$ rpm y $3x$ rpm (ó simplemente $1x$, $2x$ y $3x$). La relación de amplitudes entre ellas es función de la razón entre la velocidad de rotación y sus velocidades críticas. Figura 7 muestra la variación de la amplitud de estas componentes con la velocidades rotación.

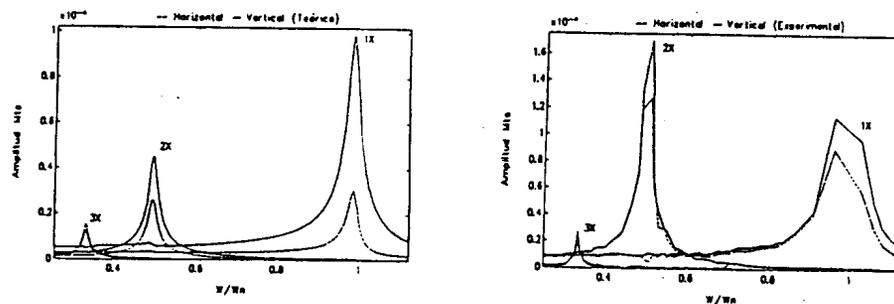


Figura 7: Resultados teóricos y experimentales de la variación de los componentes $1x$, $2x$ y $3x$ con la velocidad de rotación.

CONCLUSIONES

- El modelo de cierre-apertura presentado, junto con los resultados de la flexibilidad adicional que introduce la grieta (calculados utilizando conceptos de mecánica de fractura) permiten simular satisfactoriamente el comportamiento vibratorio de un rotor con eje agrietado. La comparación de estos valores respecto a las mediciones experimentales se considera satisfactoria.
- El comportamiento vibratorio del rotor con eje agrietado, en estado estacionario de funcionamiento, se caracteriza por tener componentes espectrales preponderantes a frecuencias $1x$, $2x$ y $3x$ rpm, siendo en general las amplitudes verticales de mayor valor que las horizontales.
- De los resultados tanto teóricos como experimentales se concluye que las características vibratorias para el rotor con eje agrietado son más acentuadas a bajas velocidades de rotación. Lo anterior justifica el uso como método para diagnosticar grietas en ejes de rotores, el análisis de su comportamiento dinámico durante la partida y/o parada de la máquina, específicamente la amplitud y fase de sus componentes $1x$, $2x$ y $3x$ rpm.

REFERENCIAS

- [1] Muszynska, A.; "Shaft Crack Detection", Sevent Machinery Dynamics Seminar, 1982, Canadá, 120-132.
- [2] Dirr, B.O.; Schmalhorst, B.; "Crack Depth Analysis of Rotating Shaft by Vibration Measurements", ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1988, Vol 10, 158-164.
- [3] Iman, I.; Azzaro, R.J.; Bankert, R.J.; Scheikel, I.; "Development of an on-line Rotor Crack Detection and Monitoring System", ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 1989, Vol 111, 241-250.
- [4] Ostrachowicz, W.M.; Krawczuk, M.; "Vibration Analysis of a Cracked Beam", 1990, Computer and Structures, Vol 36(2), 245-250.
- [5] Papadopoulos, C.A.; Dimarogonas, A.D.; "Coupled Vibration of Cracked Shafts", 1992, ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol 114, 461-467.
- [6] Jun, O.S.; Eun, H.J.; "Modelling and Vibration Analysis of a Simple Rotor with a Breathing Crack", 1992, Journal of Sound and Vibration Vol 155(2), 273-290.
- [7] Papadopoulos, C.A.; Dimarogonas, A.D.; "Stability of Cracked Rotors in the Coupled Vibration Mode", 1988, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol 110, 356-359.
- [8] Inagaki, T.; Kanki, H.; Shiraki, K.; "Traverse Vibrations of a General Cracked-Rotor Bearing System", 1982, ASME Journal of Mechanical Design, Vol 104, 345-355.
- [9] Saavedra, P.; San Juan, L.; Modelo numérico para el estudio dinámico de un rotor con eje agrietado, Revista Métodos numéricos para el diseño y cálculo en ingeniería (en prensa).
- [10] Baquedano, L.; "Estudio teórico-experimental de rotores con eje agrietado", 1994, Tesis de Magister, Universidad de Concepción.