

ADAPTACION DE MODELOS BASADA EN LAS RESPUESTAS DINAMICAS  
UNA COMPARACION DE MÉTODOS

Ing. Rodrigo Pascual Jiménez, Dr. Mario Razeto Migliaro  
Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Concepción  
Casilla 53-C, Concepción, Chile

RESUMEN

En la aplicación de los métodos de elementos finitos para el cálculo de máquinas y estructuras se presentan a menudo problemas en la modelación de algunos sectores localizados, ejemplo: uniones, apoyos, elementos de geometría compleja. En estos casos la modelación se realiza mediante la utilización de parámetros equivalentes. Frecuentemente estas modelaciones distan bastante de la realidad y los comportamientos calculados no corresponden a los comportamientos reales de los elementos analizados. Para solucionar este problema se han desarrollado técnicas de adaptación de los modelos de elementos finitos, basadas en comparación de los resultados de los modelos de elementos finitos con los resultados provenientes de ensayos experimentales; principalmente dinámicos.

En este trabajo se presentan y evalúan tres técnicas de adaptación que utilizan como medida del error las funciones respuestas estacionarias en diferentes puntos del sistema analizado. Se estudian para un ejemplo las propiedades de convergencia, los tiempos de computación, la estabilidad de los métodos ante el ruido en las mediciones y el amortiguamiento del sistema, el número de puntos y frecuencias tomadas en cuenta y la facilidad de implementación de los métodos.

ABSTRACT

Applying Finite Elements Methods on the design of machines and structures sometimes presents problems on modelling some localized sectors, such as: joints, bears, complex geometry elements. In this cases, modelling is done through equivalent parameters. Frequently this models differ too much of reality and the calculated behavior do not agree with the real behavior of analyzed elements. To solve this problem, it has been developed model updating techniques, which are based on comparing results from FE models with results coming from experimental tests; mostly dynamic tests.

At this work it is presented and evaluated three model updating techniques that use Frequency Response Functions (FRF) at different points of the analysed system as a measure of error. It is studied for an example, convergence properties, Time and number of operations needed, stability of the methods when noise and damping appears on the measures, number of excitation frequencies and measured points and needed effort to implement each method.

NOMENCLATURA

T: traspuesta  
\*: complejo conjugado  
e: experimental  
a: analítico  
red: reducido  
[M]: matriz de masa  
[C]: matriz de amortiguamiento  
[K]: matriz de rigidez  
[E]: rigidez dinámica =  $-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]$   
[H( $\omega$ )]: matriz respuesta =  $[E(\omega)]^{-1}$

$\omega$ : frecuencia de la excitación  
{p}: vector de parámetros de diseño  
{H<sub>j</sub>}: j-ésimo vector de la matriz [H( $\omega$ )]  
N<sub>e</sub>: cantidad de elementos seleccionados a adaptar  
 $\Delta K$ ,  $\Delta M$ ,  $\Delta C$ : matrices globales de corrección  
P<sub>M</sub>, P<sub>C</sub>, P<sub>K</sub>: factores de ponderación  
{q( $\omega$ )}: vector de desplazamientos dinámicos  
[W]: matriz de ponderación  
[D]: matriz sobredeterminada a pseudoinvertir  
{b}: vector de error

## INTRODUCCION

En la actualidad, el número de aplicaciones de ingeniería donde se requiere conocer el comportamiento dinámico es cada vez mayor. Ello obliga a construir modelos que pueden provenir de ensayos experimentales (análisis modal) o a partir de modelos numéricos (elementos finitos). Ambas técnicas presentan deficiencias: el Análisis modal solo es válido para las condiciones en que se realizaron los ensayos y la información es generalmente reducida debido a que el número de puntos de medición es pequeño y estos corresponden a puntos en exteriores. En la aplicación de los métodos de elementos finitos para el cálculo de máquinas y estructuras se presentan a menudo problemas en la modelación de algunos sectores localizados, ejemplo: uniones, apoyos, elementos de geometría compleja. En estos casos la modelación se realiza mediante la utilización de parámetros equivalentes. Frecuentemente estas modelaciones distan bastante de la realidad y los comportamientos calculados no corresponden a los comportamientos reales de los elementos analizados. Para solucionar este problema se han desarrollado técnicas de adaptación de los modelos de elementos finitos, basadas en comparación de los resultados de los modelos de elementos finitos con los resultados provenientes de ensayos experimentales; principalmente dinámicos.

En ese contexto, las técnicas de Adaptación de Modelos verifican y corrigen el modelo de elementos finitos, utilizando información medida experimentalmente. El resultado es un modelo que representa la realidad aceptablemente, y que puede ser modificado para satisfacer los requerimientos de diseño impuestos. Para tal efecto, todo proceso de adaptación debe seguir el esquema de figura (1).

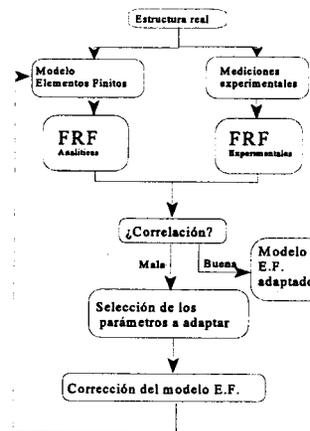
El uso de las respuestas estacionarias del sistema en el proceso de adaptación del modelo de EF es atractivo desde el punto de vista de los niveles de confianza de las mediciones directas, y el ahorro del esfuerzo en análisis modal.

Lin & Ewins <sup>[1]</sup> (1990) proponen actualizar las matrices globales [M], [C] y [K] añadiendo matrices de cambio formadas con la suma ponderada de ciertas matrices elementales seleccionadas. Para hallar los factores de peso correspondientes, explota convenientemente una identidad de la inversión de matrices. Imregun<sup>[4]</sup> (1995) señala a esta formulación como una de las 'bien establecidas' para adaptación. A diferencia de los otros métodos presentados, no emplea análisis de sensibilidad.

Larsson <sup>[2]</sup> (1991) formula un método iterativo que utiliza las sensibilidades de la matrices de rigidez dinámica respecto de ciertos parámetros físicos a nivel elemental, y las respuestas medidas experimentalmente. El uso de tales sensibilidades y no las de la matriz respuesta, garantiza mayor estabilidad numérica en el algoritmo.

Raeymaekers et al<sup>[3]</sup> (1993) proponen un método iterativo basado en las sensibilidades de las respuestas y añaden una matriz de penalización para ponderar los diversos niveles de confianza en las mediciones y los altos valores posibles en las sensibilidades.

El objetivo de este trabajo es evaluar numéricamente estos tres métodos, para establecer propiedades de convergencia, tiempos de computación, estabilidad ante mediciones con ruido, amortiguación, número de grados de libertad y frecuencias utilizadas y facilidad de implementación. A continuación se presentan las formulaciones citadas, las que fueron programadas en el entorno MATLAB.



ILUSTRACION 1.  
ESQUEMA DE ADAPTACION  
DE MODELOS BASADA EN LAS  
RESPUESTAS

METODO DE EWINS <sup>(1)</sup>

Este método construye las matrices de corrección, considerando la suma ponderada de las matrices elementales:

$$[\Delta M] = \sum_{e=1}^{N_e} p_{M_e} [M_e] \quad (1)$$

$$[\Delta K] = \sum_{e=1}^{N_e} p_{K_e} [K_e] \quad (2)$$

$$[\Delta C] = \sum_{e=1}^{N_e} p_{C_e} [C_e] \quad (3)$$

Ewins explota la siguiente propiedad de inversión de matrices:

$$([A] \cdot [B])^{-1} = [A]^{-1} \cdot ([A] \cdot [B])^{-1} [B] [A]^{-1} \quad (4)$$

Definiendo convenientemente:

$$[A] = [E(\omega)]_a \quad y \quad ([A] \cdot [B]) = [E(\omega)]_x \quad (5)$$

Entonces

$$[H(\omega)]_x = [H(\omega)]_a = [H(\omega)]_x [\Delta E(\omega)] [H(\omega)]_a \quad (6)$$

Con

$$[\Delta E(\omega)] = -\omega^2 [\Delta M] + j\omega [\Delta C] + [\Delta K] \quad (7)$$

Dado que en la práctica se mide generalmente una sola columna de  $[H(\omega)]_x$ , la ecuación (6) se reduce a:

$$\{H_a(\omega)\}_j^T \cdot \{H_x(\omega)\}_j^T \cdot \{H_a(\omega)\}_j^T [\Delta E(\omega)] [H(\omega)]_a \quad (8)$$

Reescribiendo en términos de los factores de ponderación desconocidos

$$[D(\omega)] \{ \Delta p \} = \{ b(\omega) \} \quad (9)$$

Luego las matrices globales son corregidas en un proceso iterativo hasta alcanzar algún criterio de convergencia:

$$[M]_a^{n+1} = [M]_a^n + [\Delta M]^n \quad (10)$$

$$[C]_a^{n+1} = [C]_a^n + [\Delta C]^n \quad (11)$$

$$[K]_a^{n+1} = [K]_a^n + [\Delta K]^n \quad (12)$$

Para resolver la diferencia de dimensión entre  $\{H_x\}_j$  y  $\{H_a\}_j$  se expande el primero con la información correspondiente a los grados de libertad inactivos en el segundo.

FORMULACION DE LARSSON <sup>[2]</sup>

La formulación que presenta Larsson, se basa en explotar la linealización de la matriz de rigidez dinámica respecto de los parámetros físicos del modelo que han sido seleccionados para ser adaptados:

$$[E(\omega, \{p\})]_x = [E]_x + \frac{\partial [E]_x}{\partial \{p\}} \{\Delta p\} \quad (13)$$

Postmultiplicando por la columna medida de  $[H]_x$ , y reordenando:

$$\frac{\partial [E]_x}{\partial \{p\}} \{\Delta p\} \{H_j\}_x + \{I\} = [E]_x \{H_j\}_x \quad (14)$$

Dada la diferencia de dimensión entre  $[E]_x$  y  $\{H_j\}_x$  es necesaria la condensación del modelo dinámico, por ejemplo, con condensación dinámica. Lo que reduce (14) a la forma:

$$\frac{\partial [E^{red}]_x}{\partial \{p\}} \{\Delta p\} \{H_j\}_x + \{I\} = [E^{red}]_x \{H_j\}_x \quad (15)$$

La cual es reescrita de modo que el desconocido vector  $\{\Delta p\}$  sea despejable:

$$[D] \{\Delta p\} = \{b\} \quad (16)$$

Para resolver la diferencia entre la cantidad de los grados de libertad medidos y los del modelo, se utiliza la reducción dinámica exacta.

FORMULACION DE RAEYMAEKERS ET AL <sup>[3]</sup>

El método se basa en la minimización de una función objetivo (17), que da una medida global de la discrepancia entre las respuestas estacionarias del modelo analítico y el experimental, a una misma excitación armónica. Las variables de diseño son ciertos parámetros físicos elegidos a nivel elemental. El proceso de minimización no tiene restricciones, pero ellas pueden ser impuestas sobre las variables de diseño.

$$F = \frac{1}{2} (\{q\} - \{q_{exp}\})^T [W] (\{q\} - \{q_{exp}\}) \quad (17)$$

Dada la ausencia de restricciones, el mínimo de la función objetivo es obtenido cuando:

$$\frac{\partial F}{\partial \{p\}} = \left[ \frac{\partial \{q\}}{\partial \{p\}} \right]^T [W] (\{q\} - \{q_x\}) = \{0\} \quad (18)$$

Si  $\{q\}$  es linealizado:

$$\{q\}^{i+1} = \{q\}^i + \frac{\partial \{q\}}{\partial \{p\}} \{\Delta p\} \quad (19)$$

Entonces (18) puede ser reescrita en términos de  $\{\Delta p\}$ :

$$[D] \{\Delta p\} = \{b\} \quad (20)$$

donde la matriz [D] está definida por:

$$[D] = \frac{\partial \{q\}}{\partial \{p\}} \cdot^T [W] \frac{\partial \{q\}}{\partial \{p\}} \quad (21)$$

y el lado derecho por:

$$\{b\} = \left[ \frac{\partial \{q\}}{\partial \{p\}} \right] \cdot^T [W] (\{q_x\} - \{q\}) \quad (22)$$

El sistema sobredeterminado (20) puede ser resuelto con alguna técnica de pseudo inversión tal como la de mínimos cuadrados, o por descomposición en valores singulares. Para lograr la compatibilidad dimensional se utiliza la reducción dinámica exacta.

### REDUCCIÓN DINÁMICA EXACTA

Dada la gran diferencia en la cantidad de grados de libertad y los del modelo EF, se hace necesario en los métodos de Larsson y Raeymaekers un proceso de reducción del modelo analítico, que no introduzca nuevas aproximaciones, para ello se propone el siguiente esquema de reducción dinámica:

Primero, se definen las matrices de respuesta y rigidez dinámicas reducidas:

$$[H]_{red} = \text{Part}([H]_a) \cdot \text{Part}([K]_a - \omega^2 [M]_a) \quad (23)$$

$$[E]_{red} = [H]_{red}^{-1} \quad (24)$$

Donde Part(H) es la partición de  $[H]_a$  correspondiente a los grados de libertad activos (Elementos correspondientes de  $[H]_{red}$  y  $[H]_a$  son funciones idénticas de  $\omega$ ), por tanto:

$$\frac{\partial [H]_{red}}{\partial p_i} = \text{Part} \left( \frac{\partial [H]_a}{\partial p_i} \right) \quad (25)$$

Para hallar la deseada  $\frac{\partial [E]_{red}}{\partial p_i}$  es necesario aprovechar la identidad:

$$[E] \cdot [H] = [I] \quad (26)$$

derivando respecto a los parámetros a corregir:

$$\frac{\partial [H]}{\partial p_i} = -[H] \cdot \frac{\partial [E]}{\partial p_i} \cdot [H] \quad (27)$$

$$\frac{\partial[E]}{\partial p_i} = [E] \cdot \frac{\partial[H]}{\partial p_i} \cdot [E] \quad (28)$$

Entonces:

$$\frac{\partial[E]_{red}}{\partial p_i} = [E]_{red} \cdot \text{Part} \left( [H] \cdot \left( \frac{\partial[K]_{red}}{\partial p_i} - \omega^2 \frac{\partial[M]_{red}}{\partial p_i} \right) \cdot [H] \right) \cdot [E]_{red} \quad (29)$$

### OBTENCION DE LAS SENSIBILIDADES

Del punto anterior se aprecia que para obtener la sensibilidad de la matriz de rigidez dinámica o de la matriz respuesta basta con tener la derivada de las matrices espaciales [M] y [K] con respecto a los parámetros, lo cual es fácil de conseguir. Por ejemplo para un elemento de barra;

$$[K]^* = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial[K]^*}{\partial E} = \frac{A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Para este caso los parámetros de diseño se encuentran de forma explícita en las matrices elementales, pero si esto no ocurre, las sensibilidades pueden ser estimadas linealizando:

$$\frac{\partial[Matriz]}{\partial p_i} \approx \frac{[Matriz]_{p_{i_1}} - [Matriz]_{p_{i_0}}}{p_{i_1} - p_{i_0}} \quad (32)$$

Donde [Matriz] representa una submatriz de alguna matriz espacial ([M],[K]).

### EVALUACION TEORICA

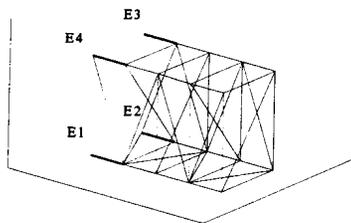
Teóricamente los tres métodos permiten la adaptación de los modelos, sin embargo, algunas observaciones respecto la precisión y utilización de los métodos pueden ser realizadas a priori.

En una aplicación práctica donde el número de grados de libertad medidos es muy inferior al número de grados de libertad del modelo de elementos finitos, la aplicación del método de Ewins puede ser empobrecida, pues se debe expandir el vector de funciones respuesta al número total de grados de libertad del modelo numérico. Esto se realiza incorporando los valores de las funciones respuesta obtenidos numéricamente al vector experimental, lo que suaviza los aportes de los datos experimentales.

Una aplicación directa del cálculo de sensibilidades de las funciones respuestas como es utilizada en el método Raeymaekers puede presentar problemas si las frecuencias consideradas están cerca de una resonancia o antirresonancia ya que en estos puntos las sensibilidades de la matriz H presentan discontinuidades<sup>[2]</sup>. La matriz de ponderación utilizada por Raeymaekers puede ser de gran interés en las aplicaciones prácticas pues una medida de la calidad de las funciones respuesta puede ser obtenida a través de la función coherencia.

Los tres métodos generan sistemas de ecuaciones sobredeterminados. Para la resolución de estos, los métodos basados en la Descomposición en Valores Singulares presentan mejor estabilidad que los métodos de mínimos cuadrados.

### EVALUACION NUMERICA



ILUSTRACION 2  
ESTRUCTURA MODELADA

Para realizar la evaluación numérica de los métodos se utiliza la estructura mostrada en la figura 2. En este ejemplo Los elementos de apoyo de la estructura (barras en negrillas) son los elementos a adaptar. La rigidez de estos elementos para el modelo pseudo-experimental es superior a la de los modelos numéricos iniciales. Se realizaron diferentes pruebas, haciendo variar el amortiguamiento, el ruido en las respuestas, número de frecuencias utilizadas y número de grados de libertad utilizados como se muestra en la tabla siguiente. El modelo esta construido en base a elementos de barra simple triimensionales.

TABLA I. Parámetros del modelo

Generales		Específicos
Distancia internodal	Propiedades físicas	Rigidez en los apoyos
en X:1 en Y:1 en Z:2	$\rho=7800$ $A=10^{-4}$ $E=2 \times 10^{11}$	$E1=5 \times 10^{12}$ $E2=6 \times 10^{12}$ $E3=7 \times 10^{12}$ $E4=8 \times 10^{12}$

TABLA II. Caso de Referencia (#1)

[C <sub>exp</sub> ]	Ruido	Excitación			Columna de H medida	E <sub>experimental</sub> ( $\times 10^{12}$ )				E <sub>inicial</sub>			
		frecuencia	GDL	dirección		E1	E2	E3	E4	E1	E2	E3	E4
no	no	1	38*	Y	38	5	6	7	8	2	2	2	2

\* grado de libertad asociado al nodo del extremo libre, inferior, dirección y.

TABLA III. Otros casos de estudio

Caso	Estudio	Características
2	amortiguamiento	caso 1 + [C]=20%[K]
3	amortiguamiento	caso 1 + [C]=20%[K]
4	ruido	caso 1 + 1%ruido en las mediciones
5	ruido	caso 1 + 10% ruido en las mediciones
6	varias frecuencias	caso 1 + frecuencias: 1, 10, 100, 200, 400, 600.
7	varias frecuencias+ruido	caso 6 + 10% de ruido.
8	pocas puntos de medicion	caso 1+ gdl medidos: 32, 35, 38, 41, 44.
9	valores iniciales lejanos de los reales	$E_{iniciales}: 2 \times 10^{10}$ , $E_{reales} = 5, 6, 7, y 8 (\times 10^{12})$

TABLA IV. Combinaciones ensayadas

Características	Caso								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[C]=1%[K]		✓							
[C]=20%[K]			✓						
1% ruido				✓					
10% ruido					✓		✓		
5 frecs.						✓	✓		
5 gdl activos								✓	
Parámetros iniciales lejanos									✓

A continuación, se presenta la convergencia para el modulo de Young obtenida para el caso 1 según los 3 métodos.

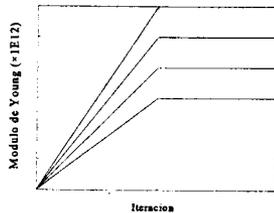


Ilustración 3.  
Convergencia con Método Ewins (Caso#1)

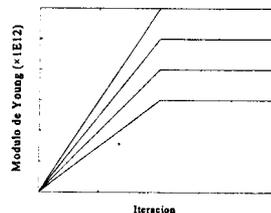


Ilustración 4.  
Convergencia con Método Larsson (Caso#1)

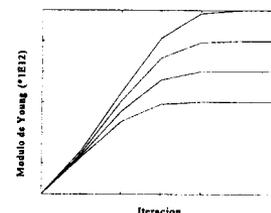


Ilustración 5.  
Convergencia con Método Raeymaekers et al. (Caso#1)

La tabla V muestra el consumo computacional requerido por cada método y en la tabla VI se muestra la velocidad de convergencia de los métodos. Cuando estos convergen lo hacen a valores exactos.

TABLA V. Consumo de cada método

METODO	Nro Iteraciones para convergencia	Flops/iteración ( $\times 10^6$ )	Tiempo/iteración	Tiempo total
Larsson	1	2,37	9,01	9,01
Ewins	1	2,39	8,95	8,95
Raeymaekers	5	2,44	9,05	45,2

Se puede apreciar que el método Raeymaekers es el de mas lenta convergencia, y que los 3 métodos consumen la misma cantidad de operaciones(flops) por iteración.

TABLA VI. Velocidad de convergencia

Casos	Ewins	Larsson	Raey-mackers
1	1	1	5
2	1	1	5
3	1	1	no converge
4	1	No converge	5
5	1	No converge	No converge
6	1	1	5
7	1	No converge	No converge
8	No converge	5	5
9	1	1	12

### CONCLUSIONES

En este trabajo solo se presentan resultados obtenidos para un ejemplo particular, con lo cual no es posible sacar conclusiones generales. Se comprobó que los tres metodos tienen un consumo similar de operaciones por iteración, pues el problema de inversión sobredeterminado es del mismo tamaño. Se verificó además la sensibilidad en la estabilidad de las soluciones ante factores tales como ruido, amortiguación, pocos puntos de medición, lejanía en los valores iniciales.

### REFERENCIAS

- [1] Lin, R.M., Ewins, D.J., *Model Updating using FRFs*, 15th Int. Sem. Modal Anal., Leuven, Belgium, 1990.
- [2] Larsson, P.; *Model updating based on forced vibrations*; Proceedings of the Chuo-K.U. Leuven-U.C. Seminar, Tokio, Japan, 1991.
- [3] Razeto, M., Raeymaekers, V., Geradin, M., *Turbomachinery rotor dynamics II, Report WP 110: Preliminary Development*, Laboratoire de Techniques Aeronautiques et Spatiales (LTAS), Nov. 1993.
- [4] Imregun, M., Three case studies in FEM updating, *Shock & Vibration*, Vol. 2, No. 2, pp 119-131 (1995).
- [5] Lammens S., Heylen W., Sas, P; *Model updating using frequency response functions: case studies*; Proc. Intl. Conf. Struct. Dyn. Modelling Test, Analysis and Correlation, Milton Keynes, U.K., 1993, pp 195-204.
- [6] Imregun, M., Visser, W.J., *A review of model updating techniques*, *Shock & Vibration Digest*, Vol. 23, No. 1, 1991.
- [7] Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory & Practice*, Research Studies Press Ltd. (1984).

