

## MODELOS ACOTADOS EN BANDA PARA EL ANÁLISIS MODAL DE ESTRUCTURAS

José Converti, Mario Scheble, Cristina N. Strizzolo  
Centro Atómico Bariloche  
8400 San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina

### RESUMEN

En el presente trabajo se describe una técnica para el análisis modal de estructuras basada en una expansión en frecuencia que permite obtener modelos acotados en banda. Una de sus virtudes más notables es que se puede aplicar fácilmente en estructuras complejas en forma semejante al análisis matricial de estructuras. Las matrices de cada elemento estructural se construyen a partir del truncamiento de la solución analítica obtenida para el elemento libre.

Se presenta en una aplicación simple que admite solución analítica permitiendo la comparación con la técnica de elementos finitos.

### ABSTRACT

In the present work, a technique for the modal analysis of structures based on an expansion in frequency that yields band limited models is presented. This approach is particularly convenient for complex systems and is applied similarly to the matrix analysis of structures. The matrices of each structural member are built from the truncated analytical solution obtained for the free member.

A simple case that allows analytical solution is presented and the results compared with the conventional technique of finite elements.

### INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de un sistema mecánico lineal no amortiguado de  $n$ -grados de libertad para pequeñas amplitudes de oscilación, tienen la forma dada en la ec. (1) [1]

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

donde:  $\{x\}$  es un vector formado por las coordenadas generalizadas del sistema

$\{f\}$  es un vector formado por las fuerzas generalizadas forzantes del sistema

$[K]$  es la matriz de rigidez de  $(n \times n)$ , real y simétrica.

$[M]$  es la matriz de inercia de  $(n \times n)$ , real y simétrica.

Para vibraciones libres este sistema de ecuaciones sólo tiene soluciones distintas de la trivial para ciertos valores de  $\omega$ , llamados frecuencias naturales de vibración, que se obtienen de la ecuación característica. A cada una de estas frecuencias naturales corresponde un autovector llamado modo natural de vibración. La solución general se obtiene como una combinación lineal de los diferentes modos de vibración como se indica en (2):

$$\{x\} = \left[ \begin{array}{c} \{ \} \\ \{ \}_1 \\ \{ \}_2 \\ \dots \\ \{ \}_n \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} c_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ c_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dots \\ c_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \end{array} \right\} \quad (2)$$

En ésta aparecen  $2n$  constantes de integración  $c_i$  y  $\varphi_i$  que se obtienen a partir de las condiciones iniciales de posición y velocidad. La matriz cuyas columnas son los modos naturales de vibración del sistema, se denomina matriz modal  $[\Phi]$  y nos permite diagonalizar las matrices  $[K]$  y  $[M]$ .

$$[K'] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (3)$$

$$[M'] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \quad (4)$$

Si efectuamos el cambio de coordenadas indicado a continuación y premultiplicamos la ec. (1) por  $[\Phi]^T$ , resulta un sistema de  $n$  ecuaciones de 2º orden desacopladas.

$$\{x\} = [\Phi] \{u\} \quad (5)$$

#### Aproximación por truncamiento en frecuencia

La idea fundamental de esta aproximación consiste en tomar un sistema de  $n$ -grados de libertad cuyas masas y rigideces modales coinciden con las primeras  $n$  masas y rigideces modales de un modelo continuo (de infinitos grados de libertad) del que conocemos la solución analítica. Esto nos permite construir las matrices diagonales de inercia y rigidez  $[M']$  y  $[K']$  correspondientes a la ecuación diagonalizada de un sistema discreto.

La segunda idea sobre la que se fundamenta este método consiste en la forma de volver a las variables geométricas.

En general sólo consideramos como variables geométricas desplazamientos y ángulos.

Si bien en el sistema continuo las variables geométricas están definidas en infinitos puntos, en la aproximación discreta, sólo podemos considerar las variables geométricas, definidas en un número finito de puntos.

En principio estas coordenadas generalizadas se pueden elegir en forma arbitraria, pero existen dos razones que restringen la elección de las mismas:

1. Por un lado, debemos incluir dentro de estas coordenadas generalizadas, a aquellas que corresponden a las condiciones de vínculo que se quieran establecer.
2. Por otro lado, desde el punto de vista numérico, algunas formas de elegir las coordenadas generalizadas son más convenientes que otras.

El tercer paso del método consiste en obtener la matriz modal de  $n \times n$  evaluando las coordenadas generalizadas seleccionadas en  $n$  puntos para cada una de las primeras  $n$  autofunciones de la solución del modelo continuo.

La matriz  $[\Phi]$  así obtenida nos permite obtener las coordenadas generalizadas mediante la ec. (5).

Reemplazando  $\{u\}$  en la ecuación diagonalizada y premultiplicando dicha ecuación por  $[\Phi^T]^{-1}$  obtenemos:

$$[\Phi^T]^{-1}[M'][\Phi]^{-1}\{\ddot{x}\} + [\Phi^T]^{-1}[K'][\Phi]^{-1}\{x\} = \{f\} \quad (6)$$

Esta tiene la forma de un modelo de un número finito de grados de libertad como el descrito por la ec.(1) donde

$$[M] = [\Phi^T]^{-1}[M'][\Phi]^{-1} \quad (7)$$

$$[K] = [\Phi^T]^{-1}[K'][\Phi]^{-1} \quad (8)$$

De esta manera hemos obtenido un sistema mecánico de  $n$  grados de libertad cuyas masas y rigideces modales coinciden con las  $n$  primeras del modelo de infinitos grados de libertad y cuyos modos coinciden con los  $n$  primeros del mismo, evaluados en las coordenadas correspondientes.

En la ec. (6), el vector  $\{f\}$  está formado por las fuerzas generalizadas correspondientes a las respectivas coordenadas generalizadas.

Hasta esta etapa el modelo aproximado no parece aportar nada nuevo al modelo continuo. Pero la conveniencia de esta aproximación surge de la posibilidad de establecer nuevas restricciones geométricas (condiciones de vínculo) al modelo aproximado y la posibilidad de tratar estructuras complejas obtenidas al vincular elementos estructurales simples.

De esta descripción surge la razón de denominar a esta aproximación como "aproximación por truncamiento en frecuencia". Dicho nombre se justifica al tomar las primeras  $n$  autofunciones del modelo continuo que corresponden a las  $n$  frecuencias más bajas, despreciando las componentes de frecuencias más elevadas [2].

La denominación de "modelos acotados en banda" también surge de esta consideración ya que este modelo no nos va a permitir obtener modos de la estructura, correspondientes a frecuencias naturales más elevadas que las que hemos retenido en el modelo luego del truncamiento.

### Ejemplo simple

Para ilustrar la aplicación de este método consideraremos el problema de hallar las frecuencias y modos de vibración longitudinales de una barra con el extremo izquierdo fijo [3].

Utilizaremos el modelo obtenido a partir del truncamiento de la solución analítica del modelo continuo de la barra libre, que nos permite obtener las matrices diagonales  $[K']$  y  $[M']$  utilizando las primeras  $N$  masas y rigideces modales, dadas en las ecuaciones siguientes [4]:

$$m_0 = \rho AL \quad m_i = \frac{\rho AL}{2} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

$$k_0 = 0 \quad k_i = EA \frac{i^2 \pi^2}{2L} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

donde:  $\rho$  es la densidad del material de la barra.

$A$  es la sección transversal.

$L$  es la longitud.

$E$  es el módulo de elasticidad.

Luego seleccionamos como coordenadas generalizadas los desplazamientos longitudinales de  $N$  puntos equiespaciados a lo largo de la barra. La separación entre dos puntos se obtiene dividiendo la longitud  $L$  de la misma por  $(N-1)$ .

Para construir la matriz modal  $[\Phi]$  debemos evaluar las primeras  $N$  autofunciones del modelo continuo, mediante la ec. (11) en los puntos dados por la ec. (12):

$$a_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11)$$

$$x = \frac{iL}{N-1} \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

La matriz  $[\Phi]$  nos permite calcular las matrices  $[K]$  y  $[M]$  del sistema mediante las ecs. (7) y (8).

En el vector desplazamiento  $\{x\}$  el primer término correspondiente al extremo izquierdo de la barra es cero, debido a la condición de vínculo impuesta. Esto equivale a eliminar la primer columna de las matrices  $[K]$  y  $[M]$  y a reducir la dimensión de  $\{x\}$ , de  $N$  a  $(N-1)$ .

Para hallar los modos y frecuencias naturales del sistema debemos considerar que en el vector fuerza generalizada  $\{f\}$  deben ser cero todos los términos excepto el primero que corresponde a la *reacción de vínculo* establecida.

Las matrices que se obtienen a partir de la supresión de la primer columna y la primer fila de las matrices  $[K]$  y  $[M]$  y del primer término del vector desplazamiento  $\{x\}$ , resultan en un sistema de  $(N-1)$  ecuaciones cuya diagonalización nos proporciona las frecuencias y modos naturales de la barra con el extremo izquierdo fijo.

$$[M^*]\{\ddot{x}^*\} + [K^*]\{x^*\} = 0 \quad (13)$$

Una vez obtenido  $\{x^*\}$ , utilizando la primera fila de dichas matrices podemos obtener la reacción de vínculo  $f_1$ .

En la ecuación anterior:  $[M^*]$  se obtiene suprimiendo la 1º fila y la 1º columna de la matriz  $[M]$ .

$[K^*]$  ídem de la matriz  $[K]$ .

$\{x^*\}$  es el vector que se obtiene de suprimir el 1º término del vector  $\{x\}$ .

La obtención del vector  $\{x^*\}$  a partir del vector  $\{x\}$  se puede expresar formalmente como:

$$\{x^*\} = [\Delta]\{x\} \quad (14)$$

donde  $[\Delta]$  es una matriz Booleana (cuyos elementos son 1 ó 0), y que se obtiene suprimiendo la primera fila de la matriz unitaria.

$$\{x\} = [\Delta]^T\{x^*\} \quad (15)$$

donde  $[\Delta]^T$  es la traspuesta de  $[\Delta]$  y se obtiene suprimiendo la primer columna de la matriz unitaria.

Sustituyendo (15) en la ec. (1) y premultiplicando por  $[\Delta]$  obtenemos:

$$[\Delta][M][\Delta]^T\{\ddot{x}^*\} + [\Delta][K][\Delta]^T\{x^*\} = [\Delta]\{f\} = \{f^*\} \quad (16)$$

Por lo tanto, haciendo:

$$[M^*] = [\Delta][M][\Delta]^T \quad (17)$$

$$[K^*] = [\Delta][K][\Delta]^T \quad (18)$$

podemos construir la ec.(13), imponiendo  $\{f^*\} = 0$  en (16).

Por otro lado si definimos una matriz  $[\delta]$  con las filas suprimidas de la matriz unitaria obtenemos

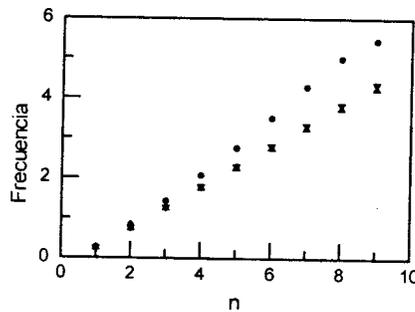
$$[\delta]\{f\} = [\delta][M][\Delta]^T\{\ddot{x}^*\} + [\delta][K][\Delta]^T\{x^*\} \quad (19)$$

ecuación que nos permite obtener las reacciones de vínculo.

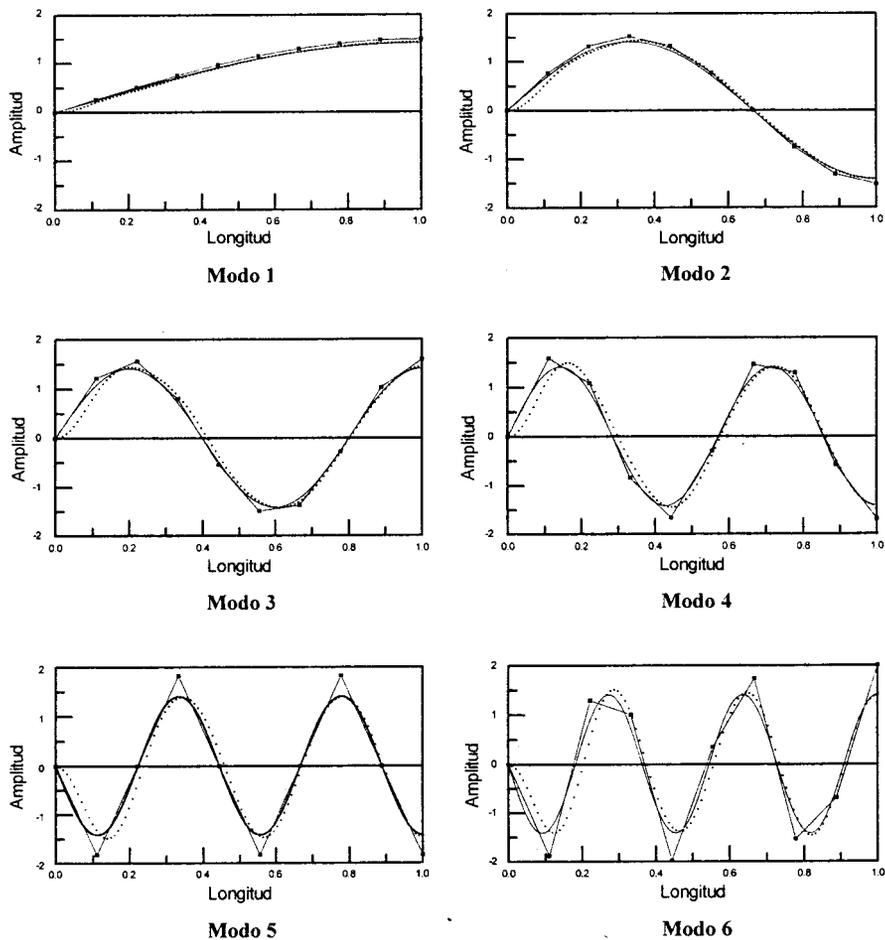
Este formalismo se puede aplicar cuando se establecen vínculos adicionales. En este caso, definimos  $[\Delta]$  suprimiendo de la matriz unitaria todas las filas correspondientes a las coordenadas generalizadas que se igualan a cero. De la misma forma la matriz  $[\delta]$  está formado por las filas suprimidas correspondientes.

En las figuras 1 y 2 se comparan las frecuencias y modos naturales de vibración longitudinal de una barra fija en el extremo izquierdo, calculadas:

- mediante el método aquí desarrollado utilizando un modelo de orden 10;
- en forma analítica [4];
- a través del método clásico de elementos finitos, con funciones interpolantes lineales para desplazamiento y velocidad con una malla de 10 elementos [5].



**Figura 1.** Frecuencias naturales de vibración longitudinal de una barra. Comparación de los valores obtenidos: a.- por modelo acotado en banda (▼); b.- en forma analítica (▲) y c.- por elementos finitos (\*).



**Figura 2.** Modos de vibración longitudinal de una barra. Comparación de las soluciones obtenidas: a.-por elementos finitos (—); b.- por modelo acotado en banda (.....) y c.-en forma analítica (—).

#### Expansión en funciones ortogonales

A pesar de trabajar con una aproximación discreta en un número finito de puntos del continuo, podemos obtener una solución continua para todo valor de  $x$  utilizando una expansión en los primeros  $N$  modos normales del modelo continuo.

$$u(x) = c_0 a_0(x) + c_1 a_1(x) + \dots + c_{N-1} a_{N-1}(x) \quad (20)$$

Para el ejemplo de la barra empotrada en el extremo izquierdo, de diagonalizar la ec. (13), obtenemos  $(N-1)$  modos y  $(N-1)$  frecuencias naturales.

$$\{x^*\}_i \quad \text{y} \quad \omega_i \quad i=0,1,2,\dots,N-2 \quad (21)$$

Para obtener descripciones continuas de los modos de la forma indicada en la ec. (20) necesitamos obtener los coeficientes  $c$  tales que  $u(x)$  evaluado en los puntos de la ec. (12) coincida con los modos de la ec. (21) tal como se indica en la siguiente ecuación:

$$[\Delta]^T \{x^*\}_i = [\Phi] \{c\}_i \quad (22)$$

Aquí  $\{c\}_i$  es el vector formado por los coeficientes tales que mediante la ec. (20) permiten obtener modos del sistema:

$$u_i(x) = \{a_i(x)\}^T \{c\}_i \quad (23)$$

donde:

$$\{c\}_i = [\Phi]^{-1} [\Delta]^T \{x^*\}_i \quad (24)$$

### Generalización del método a estructuras

Los modelos aproximados obtenidos por truncamiento en frecuencia de componentes estructurales, se pueden extender a estructuras formadas por combinaciones de estos elementos estructurales vinculados entre sí. El vínculo entre elementos estructurales se establece de manera tal que una o más de las coordenadas generalizadas pasan a ser comunes a dos o más elementos estructurales. Las reacciones de vínculo correspondientes a los elementos vinculados deben consecuentemente sumar cero para que se cumpla la tercera ley de Newton (acción y reacción).

Para analizar estructuras compuestas debemos definir una matriz Booleana que determine la correspondencia de las coordenadas generalizadas locales de cada elemento estructural con las coordenadas generalizadas globales de la estructura completa. Esta relación se expresa como:

$$\{x^{(i)}\} = [\Delta^{(i)}] \{x\} \quad (25)$$

donde:  $\{x^{(i)}\}$  es el vector formado por las coordenadas generalizadas locales de cada elemento estructural.

$\{x\}$  es el vector formado por las coordenadas generalizadas globales de toda la estructura.

$[\Delta^{(i)}]$  matriz de ensamblaje.

Para cada elemento estructural va a ser válida la siguiente ecuación:

$$[M^{(i)}] \{\ddot{x}^{(i)}\} + [K^{(i)}] \{x^{(i)}\} = \{f^{(i)}\} \quad (26)$$

Reemplazando la ec. (25) en (26) y premultiplicando por  $[\Delta^{(i)}]^T$ :

$$[\Delta^{(i)}]^T [M^{(i)}] [\Delta^{(i)}] \{\ddot{x}\} + [\Delta^{(i)}]^T [K^{(i)}] [\Delta^{(i)}] \{x\} = [\Delta^{(i)}]^T \{f^{(i)}\} \quad (27)$$

Si sumamos en todos los elementos estructurales considerando que la suma de las reacciones de vínculo internas suman cero para satisfacer la 3ª ley de Newton, entonces:

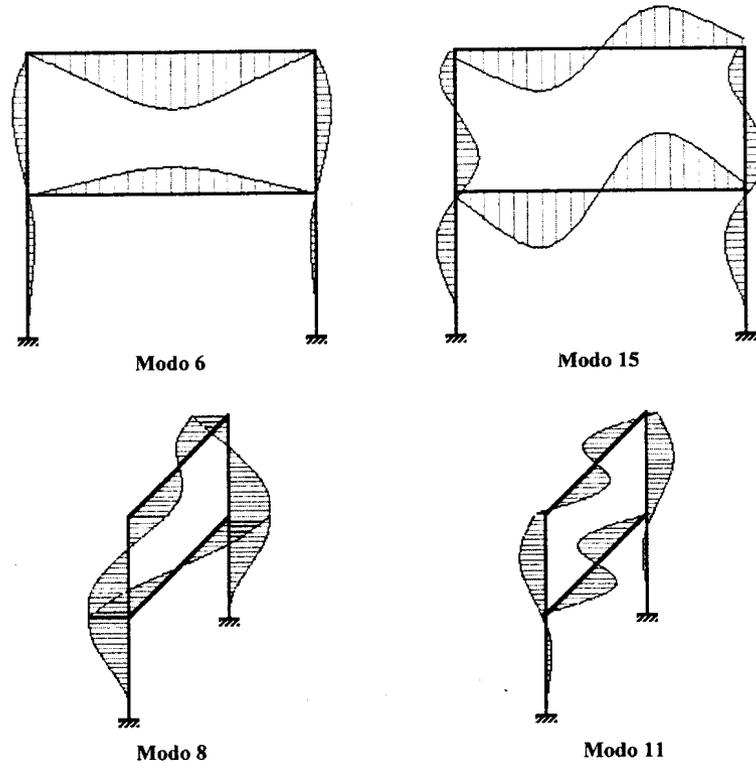
$$\sum_i [\Delta^{(i)}]^T \{f^{(i)}\} = 0 \quad (28)$$

obteniendo la ecuación para toda la estructura

$$\sum_i [\Delta^{(i)}]^T [M^{(i)}] [\Delta^{(i)}] \{\ddot{x}\} + \sum_i [\Delta^{(i)}]^T [K^{(i)}] [\Delta^{(i)}] \{x\} = 0 \quad (29)$$

La diagonalización de esta ecuación nos proporciona las frecuencias y modos naturales de toda la estructura. La ec. (25) nos permite hallar los desplazamientos de los modos de la estructura en cada elemento estructural individual.

Como ejemplo de la generalización del método a estructuras más complejas, la figura 3 muestra algunos modos obtenidos en una estructura de Vierendeel sometida a flexión, torsión y vibraciones longitudinales.



**Figura 3.** Algunos modos de una estructura de Vierendeel calculados utilizando modelos de orden 6 para la flexión y de orden 4 para la torsión y la vibración longitudinal.

#### Conclusiones.

El análisis modal basado en modelos acotados en banda, ha probado ser una técnica muy conveniente desde el punto de vista de su simplicidad y su fácil utilización en sistemas complejos.

Se ha comparado muy favorablemente con el método de elementos finitos, obteniéndose soluciones mucho más exactas con sistemas de ecuaciones de complejidad numérica comparable

Su conformación modular permite analizar estructuras complejas formadas por elementos que cuentan con una solución analítica o soluciones obtenidas por otras técnicas, e inclusive, modelos obtenidos experimentalmente.

Se ha desarrollado un programa que permite el análisis de estructuras tridimensionales formadas por vigas y columnas y que se puede extender fácilmente a placas y a otros elementos estructurales.

#### REFERENCIAS

[1] CRANDALL S. H. and McCALLEY, Jr. R. B., *Shock and Vibration Handbook*. Cyril M. Harris, McGraw Hill, NY, USA, 1988, pp 28-1 - 29-30.

[2] MARGOLIS D. L. 'A Survey of Bond Graph Modeling for Interacting Lumped and Distributed Systems', *Journal of The Franklin Institute, Special Issue on Physical Structure in Modelling*, Vol. 319, No. 1/2, 1985, pp 125-135.

[3] CRANDALL S. H., KARNOPP D. C., KURTZ, Jr. E. F. and PRIDMORE-BROWN D. C., *Dynamics of Mechanical and ElectroMechanical Systems*. McGraw Hill, NY, USA, 1968, Chap. 7.

[4] TIMOSHENKO S., YOUNG D. H. and WEAVER, JR. W., *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley, NY, USA, 1974, Chap. 5.

[5] TONG P. and ROSSETTOS J. N., *Finite-Element Method. Basic Technique and Implementation*. The MIT Press. Massachusetts, USA, 1977, Chap. 7.

