

## REFINAMENTO AUTOMÁTICO MÚLTIPLO DE MALHAS BI E TRIDIMENSIONAIS EM SISTEMAS DE ELEMENTOS FINITOS

José L. F. Aymone, Ademar G. Groehs  
CEMACOM, CPGEC

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha, 99 - 3º andar,  
CEP: 90035-190, Porto Alegre, RS, Brasil

### RESUMO

Este trabalho apresenta um estimador de erros "a-posteriori" para análises de elementos finitos em problemas elásticos-estáticos lineares, e um processo de refinamento auto-adaptativo tipo  $h$  por nó. Esse processo evita o problema da geração de nós irregulares e está sendo implementado no sistema GAELI.

### ABSTRACT

This paper presents an "a posteriori" error estimator for finite elements analysis in linear elastic-static problems, and a  $h$ -method adaptive remeshing procedure that works node by node. This procedure avoids the problem of irregular nodes generation and it has been implemented into the GAELI system.

### INTRODUÇÃO

Os processos adaptativos, além de realizarem a análise normal de elementos finitos, determinam a região do domínio onde o modelamento não é adequado e, após isso, melhoram o mesmo usando uma das estratégias (versão  $r$ ,  $p$  ou  $h$ ). Geralmente, inicia-se a análise com uma malha o mais uniforme possível e calcula-se a solução. Após isso, estima-se o erro local, enriquecendo a malha onde o erro for grande.

A versão  $r$  simplesmente realoca a posição dos nós, a versão  $p$  aumenta o grau dos polinômios das funções de interpolação e a versão  $h$ , que será utilizada neste trabalho, atua através da subdivisão dos elementos. A malha ótima será atingida quando o erro for igual em todos os elementos, ou seja, quando houver uma distribuição uniforme do erro de aproximação tendo como limite superior a percentagem de erro especificada. O presente trabalho utiliza um estimador de erros proposto por [1] e [2] baseado na projeção e suavização do campo de tensões sobre todo o domínio da estrutura. Este estimador de erros está implementado no sistema GAELI [3].

### O ESTIMADOR DE ERROS

Calculam-se as tensões aproximadas pela expressão  $\hat{\sigma} = D\hat{\epsilon} = DB\hat{U}^e$  onde  $\hat{\epsilon}$  e  $\hat{U}^e$

representam respectivamente as deformações específicas e os deslocamentos nodais aproximados e  $\underline{D}$  é a matriz constitutiva elástica. Sendo  $\underline{\sigma}$  a solução exata de tensões, o erro de tensões será dado pela expressão (1)

$$\underline{e}_\sigma = \underline{\sigma} - \underline{\hat{\sigma}} \quad (1)$$

Como a expressão (1) é uma função de ponto, de difícil aplicação prática, utiliza-se a norma de energia do erro definida sobre o volume do elemento  $\Omega$

$$\|E\|_{e_\sigma} = \sqrt{\int_\Omega \underline{e}_\sigma^T \underline{D}^{-1} \underline{e}_\sigma \, d\Omega} \quad (2)$$

Para obter uma avaliação de  $\underline{\sigma}$ , parte-se da expressão  $\underline{\sigma}^* = \underline{\Phi} \underline{\bar{\sigma}}^*$  onde uma componente de tensão  $\underline{\sigma}^*$ , em um ponto qualquer no interior de um elemento, relaciona-se com as mesmas componentes de tensão  $\underline{\bar{\sigma}}^*$  nos diversos nós do elemento através da matriz linha de funções  $\underline{\Phi}$ .

Para obter  $\underline{\bar{\sigma}}^*$  minimiza-se o funcional quadrático  $\chi = \int_\Omega (\underline{\hat{\sigma}} - \underline{\sigma}^*)^2 \, d\Omega$  para cada componente de tensão  $\underline{\hat{\sigma}}$  e  $\underline{\sigma}^*$ , o que permite obter  $\left[ \int_\Omega \underline{\Phi}^T \underline{\Phi} \, d\Omega \right] \underline{\bar{\sigma}}^* = \int_\Omega \underline{\Phi}^T \underline{\hat{\sigma}} \, d\Omega$  onde  $\underline{\bar{\sigma}}^*$  é o vetor incógnita do problema, o qual não depende de  $\Omega$ . Integrando  $\underline{M} = \int_\Omega \underline{\Phi}^T \underline{\Phi} \, d\Omega$  e  $\underline{R} = \int_\Omega \underline{\Phi}^T \underline{\hat{\sigma}} \, d\Omega$  por Gauss, pode-se obter cada conjunto de componentes  $\underline{\bar{\sigma}}^*$  para os nós do elemento. Denomina-se  $\underline{\bar{\sigma}}^*$  de tensões projetadas que dependem do elemento considerado.

Usando os nós do elemento como pontos de integração, a matriz  $\underline{M}$  dá origem à matriz diagonal  $\underline{M}^D$  [4], enquanto  $\underline{R}$  dá origem à  $\underline{R}^D$ . Essas matrizes permitem obter as matrizes globais  $\underline{M}^T = \sum_{e=1}^{QL} \underline{M}^D$  e  $\underline{R}^T = \sum_{e=1}^{QL} \underline{R}^D$  onde  $QL$  é o número de elementos constituintes da estrutura. A solução do sistema  $\underline{M}^T \underline{\bar{\sigma}}^{**} = \underline{R}^T$  fornece as tensões suavizadas globais  $\underline{\bar{\sigma}}^{**}$  nos nós do elemento. A partir de  $\underline{\bar{\sigma}}^{**}$  pode-se obter, para cada elemento, os valores das componentes de tensão  $\underline{\sigma}^{**}$  nos pontos de integração de Gauss através de funções de interpolação  $\phi$  utilizadas para calcular a matriz de rigidez do elemento. Assim, para cada componente em um certo ponto de integração,  $\underline{\sigma}^{**} = \sum_{i=1}^{NNE} \phi_i \underline{\bar{\sigma}}_i^{**}$  onde  $\phi_i$  são os valores das funções de interpolação no ponto de integração e  $NNE$  é o número de nós por elemento. Após isso, é possível fazer uma avaliação da expressão (1) nos pontos de integração ( $PI$ ) como

$$\left( \underline{\hat{e}}_\sigma \right)_{PI} = \left( \underline{\sigma}^{**} - \underline{\hat{\sigma}} \right)_{PI} \quad (3)$$

e uma avaliação da expressão (2) pode ser obtida pela expressão (4)

$$\|E\|_{e_\sigma} = \sqrt{\sum_{PI=1}^{NPI} \left( \underline{\hat{e}}_\sigma^T \right)_{PI} \underline{D}^{-1} \left( \underline{\hat{e}}_\sigma \right)_{PI} W_{PI} \det J_{PI}} \quad (4)$$

onde  $W_{PI}$  é o peso e  $\det J_{PI}$  é o determinante do Jacobiano. Seguindo o raciocínio utilizado na norma de energia do erro obtém-se, ao substituir na expressão (4) o termo  $\hat{e}_{\hat{\sigma}}$  por  $\hat{\sigma}$ , uma avaliação da norma de energia de tensão através da expressão  $\|E\|_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\sum_{PI=1}^{NPI} (\hat{\sigma}^T)_{PI} D^{-1}(\hat{\sigma})_{PI} W_{PI} \det J_{PI}}$ . Para obter uma melhor avaliação da norma de energia de tensão  $\|E\|_{\hat{\sigma}}$ , em nível de elemento, pode-se combinar  $\|E\|_{\hat{\sigma}}$  com a expressão (4) chegando à  $\|\bar{E}\|_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\|E\|_{\hat{\sigma}}^2 + \|E\|_{\hat{\epsilon}_{\sigma}}^2}$ . Com isso, o erro relativo aproximado  $\hat{\eta}(\%)$ , em nível de elemento, será

$$\hat{\eta} = \frac{\|E\|_{\hat{\epsilon}_{\sigma}}}{\|\bar{E}\|_{\hat{\sigma}}} \times 100. \quad (5)$$

### REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO TIPO h POR ELEMENTO

Existem várias estratégias de refinamento tipo h. Na estratégia utilizada neste trabalho, é estabelecido um critério de precisão cujo objetivo é atingir uma determinada porcentagem de erro relativo através da norma de energia. Para isso, utiliza-se as normas de energia globais. A norma de energia do erro, correspondente à toda a estrutura, pode ser avaliada como

$$\|E\|_{T\hat{\sigma}}^2 = \sum_{i=1}^{QL} \|E\|_{i\hat{\sigma}}^2 \quad (6)$$

onde  $\|E\|_{i\hat{\sigma}}$  é calculado, para cada elemento  $i$ , pela (4). A norma global de tensão, obtida de forma semelhante à expressão (6) será  $\|\bar{E}\|_{T\hat{\sigma}}^2 = \sum_{i=1}^{QL} \|E\|_{i\hat{\sigma}}^2$ .

Admitindo que o erro esteja igualmente distribuído entre todos os elementos, que é a condição ótima [5], tem-se  $\|E\|_{i\hat{\sigma}} = \|E\|_{j\hat{\sigma}} = \|E\|_{k\hat{\sigma}}$  tal que  $1 \leq i, j \leq QL$ , onde  $i$  e  $j$  correspondem a dois elementos distintos quaisquer e  $k$  simboliza um valor constante do erro. Devido à isso, a expressão (6) pode ser reescrita como  $\|E\|_{T\hat{\sigma}}^2 = QL \cdot \|E\|_{k\hat{\sigma}}^2$  e o erro relativo de toda a estrutura, avaliado por uma expressão análoga à (5), fica

$$\hat{\eta}_T = \left[ \frac{QL \times \|E\|_{k\hat{\sigma}}^2}{\|E\|_{T\hat{\sigma}}^2 + \|E\|_{T\hat{\epsilon}_{\sigma}}^2} \right]^{1/2} \times 100. \quad (7)$$

Estabelecendo  $\bar{\eta}_T$  como o máximo erro relativo permitido para a estrutura, em porcentagem, o critério a ser satisfeito será  $\hat{\eta}_T \leq \bar{\eta}_T$ . Adotando a igualdade, a expressão (7) permite obter

$$\|E\|_{k\hat{\sigma}} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\eta}_T}{100}\right)^2 \times \frac{\|E\|_{T\hat{\sigma}}^2 + \|E\|_{T\hat{\epsilon}_{\sigma}}^2}{QL}} \quad (8)$$

que pode ser adotado como limite superior de erro desejado em cada elemento,

correspondente ao  $\bar{\eta}_T$  especificado. Então se  $\|E\|_{i\hat{e}_e} > \|E\|_{k\hat{e}_e}$ , com  $1 \leq i \leq QL$ , o elemento  $i$  deve sofrer refinamento. Fazendo  $\rho_i = \|E\|_{i\hat{e}_e} / \|E\|_{k\hat{e}_e}$  e sendo  $p$  igual à ordem do polinômio empregado, o valor de  $\rho_i^{1/p}$  pode ser interpretado como

- $\rho_i^{1/p} \leq 1$  - não há necessidade de realizar refinamento;
- $1 < \rho_i^{1/p} \leq 2$  - há necessidade de realizar um refinamento;
- $2^{r-1} < \rho_i^{1/p} \leq 2^r$  - há necessidade de realizar  $r$  refinamentos sucessivos.

Devido à existência de elementos de dimensões variadas, é interessante utilizar na expressão (8), em lugar de  $(1/QL)$ , a relação de volumes  $(V_i/V_T)$  onde  $V_i$  representa o volume do elemento considerado e  $V_T$  o volume global. O valor limite  $\|E\|_{k\hat{e}_e}$  passará a depender do elemento  $e$ , para um elemento  $i$ , será

$$\|E\|_{ik\hat{e}_e} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\eta}_T}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{V_i}{V_T}\right) \cdot (\|E\|_{T\hat{\sigma}}^2 + \|E\|_{T\hat{e}_e}^2)}. \quad (9)$$

São válidas todas as fórmulas vistas anteriormente, substituindo  $\|E\|_{k\hat{e}_e}$  por  $\|E\|_{ik\hat{e}_e}$  onde for o caso. O refinamento por elemento normalmente apresenta problemas de implementação por criar, dependendo do tipo de subdivisão adotado, os chamados nós irregulares (ver figura 1).

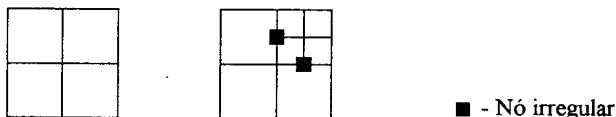


Figura 1 - Tipo de subdivisão que cria os nós irregulares.

A vantagem das subdivisões acima é que elas conduzem a elementos com um mínimo de distorção, não importando o nível de refinamento. Nota-se que os nós irregulares não existem nos elementos vizinhos ao elemento refinado. Por isso, usam-se técnicas especiais que permitem acoplá-los ao restante da malha. Essas técnicas, contudo, implicam modificações no algoritmo de solução e apresentam dificuldades adicionais para o caso de elementos quadráticos ou cúbicos e em malhas constituídas de elementos de diversas formas ou tipos.

Embora seja possível subdividir um elemento sem criar nós irregulares, refinamentos sucessivos, levados a cabo sobre elementos oriundos do primeiro refinamento, tendem a gerar elementos muito distorcidos. Esses elementos possuem ângulos internos cada vez mais próximos de  $180^\circ$ , dando origem a erros cada vez mais acentuados. Por isso, será adotada uma técnica intermediária que não cria nós irregulares e que tende a apresentar um menor índice de distorção nos elementos oriundos de refinamentos sucessivos. Esta técnica opera realizando o refinamento ao redor de um nó e não diretamente dentro de um elemento.

### REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO TIPO h POR NÓ

É a estratégia utilizada neste trabalho. Para tal, procura-se caracterizar nós ao redor dos quais será realizado o refinamento. Inicialmente calcula-se, para cada elemento, a norma de energia do erro e o valor limite de erro conforme as expressões (4) e (9) respectivamente. Em seguida realizam-se, para cada nó, as médias dos quadrados da norma de energia e do limite de erro

dos elementos concorrentes no nó  $N$ . Sendo  $NLCN$  o número de elementos concorrentes no nó  $N$ , tem-se  $\|E\|_{N\hat{e}_e}^2 = \frac{1}{NLCN} \sum_{i=1}^{NLCN} \|E\|_{i\hat{e}_e}^2$  e  $\|E\|_{Nk\hat{e}_e}^2 = \frac{1}{NLCN} \sum_{i=1}^{NLCN} \|E\|_{ik\hat{e}_e}^2$ . Comparando essas expressões, haverá refinamento nos elementos que circundam o nó  $N$  sempre que  $\|E\|_{N\hat{e}_e} > \|E\|_{Nk\hat{e}_e}$ . As figuras 2 à 5 mostram a subdivisão adotada conforme o tipo de elemento utilizado.

● - Nó ao redor do qual é realizado o refinamento

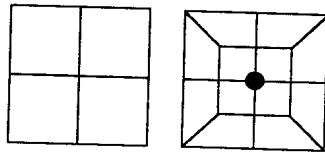


Figura 2 - Elemento quadrilátero.

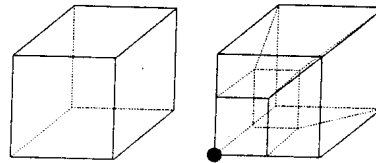


Figura 3 - Elemento hexaédrico.

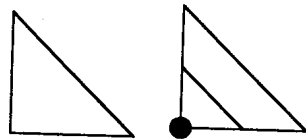


Figura 4 - Elemento triangular.

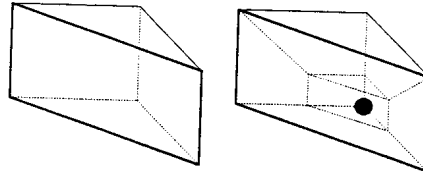


Figura 5 - Elemento pentaédrico.

As subdivisões de elementos valem para malhas mistas com qualquer dos elementos acima mostrados, tanto lineares como quadráticos, contanto que cada elemento dê origem a elementos de mesma ordem e que não haja mistura de elementos de ordem diversa.

O processo de criação de nós e elementos é controlado através do arranjo  $NCONTR$ , que tem uma posição para cada nó. Este arranjo controla o processo ao longo das diversas etapas de refinamento e utiliza a variável  $NIVEL$ . Ao iniciar o processo, a variável  $NIVEL$  é feita 1 e todos os nós da malha original recebem o valor  $NIVEL$  no arranjo  $NCONTR$ . Para um nó que tenha o valor em  $NCONTR=NIVEL$  e que necessite de refinamento  $\|E\|_{N\hat{e}_e} > \|E\|_{Nk\hat{e}_e}$ , marca-se este nó com valor -1 em  $NCONTR$  (nó não será mais refinado) e aos nós dos elementos ligados a ele é atribuído, durante a etapa, o valor 0 para impedir refinamento ao redor destes nós na etapa. Ao final da etapa, o valor de  $NCONTR$ , correspondente a estes nós, é repostado com  $NIVEL$ . Aos novos nós, atribui-se o valor  $NIVEL+1$  no arranjo  $NCONTR$ . O processo continua por tantas etapas quantas forem necessárias para produzir refinamento ao redor dos nós com  $NCONTR=NIVEL$ . Se, a partir de uma certa etapa, não existirem mais nós sem refino com  $\|E\|_{N\hat{e}_e} > \|E\|_{Nk\hat{e}_e}$ ,  $NIVEL$  é incrementado de 1 e o processo recomeça para os novos nós. Nós intermediários de elementos quadráticos não são considerados no processo acima.

## EXEMPLOS

Obs.: Nos exemplos a seguir,  $\hat{\eta}$  (%) e  $\bar{\eta}_T$  vêm das expressões (5) e (8) respectivamente.

*Exemplo 1:* Retângulo vazado (fig. 6a) do qual se discretiza apenas um quarto (região em L hachurada) devido à dupla simetria geométrica e de carregamento (ver figuras 6 e 7).

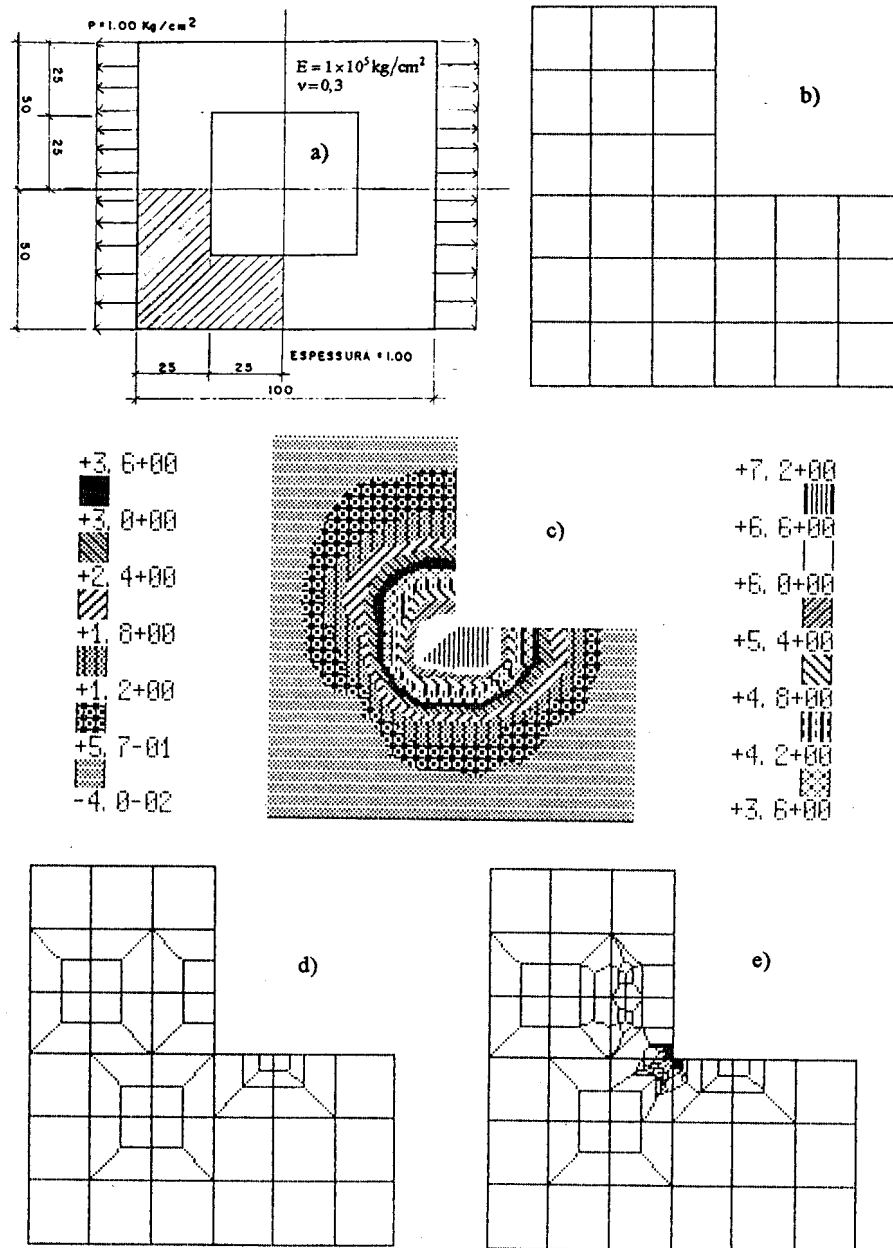


Figura 6 - Região em L. Estado plano de tensões. Elementos quadriláteros de 8 nós.  $\bar{\eta}_T = 1\%$   
a) Retângulo vazado. b) Malha inicial, 106 nós, 27 elementos. c) Malha inicial,  $\hat{\eta}$  (%). d) 1º  
refinamento, 196 nós, 55 elementos,  $\hat{\eta}_{\text{max}} = 5,6\%$ . e) 3º refinamento, 400 nós, 119 elementos.

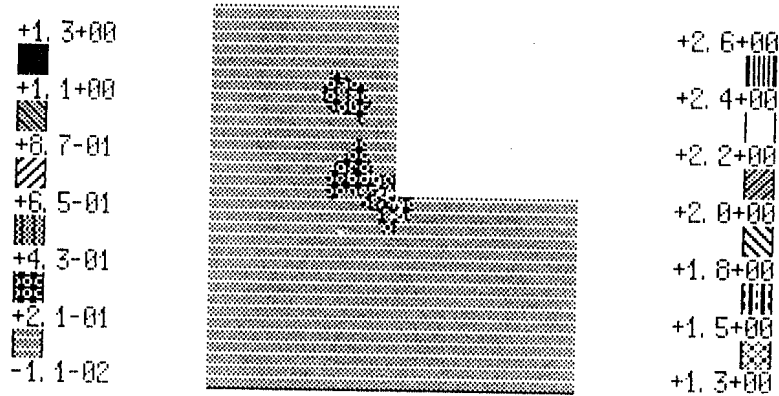


Figura 7 - Região em L. 3º refinamento,  $\hat{\eta}$ (%).

Comparando  $\hat{\eta}$  máximo da figura 7 (2,6%) com o  $\hat{\eta}$  máximo da figura 6c (7,2%), nota-se que houve um abaixamento considerável do erro relativo dos elementos. Ao realizar a 4ª etapa de refinamento, não se consegue abaixar o  $\hat{\eta}$  máximo. Isto mostra que a distorção de alguns elementos está afetando os resultados e impossibilitando um abaixamento maior do erro.

*Exemplo 2:* Viga simplesmente apoiada (ver figuras 8, 9, 10 e 11).

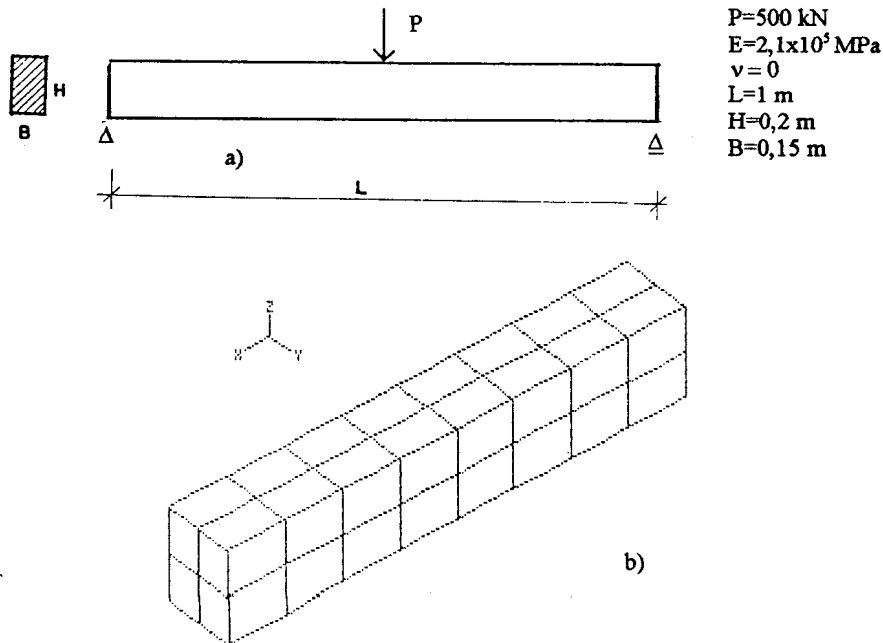


Figura 8 - Viga simplesmente apoiada. Sólido tridimensional. a) Desenho esquemático. b) Malha inicial, 262 nós, 32 elementos. Elementos hexaédricos de 20 nós.

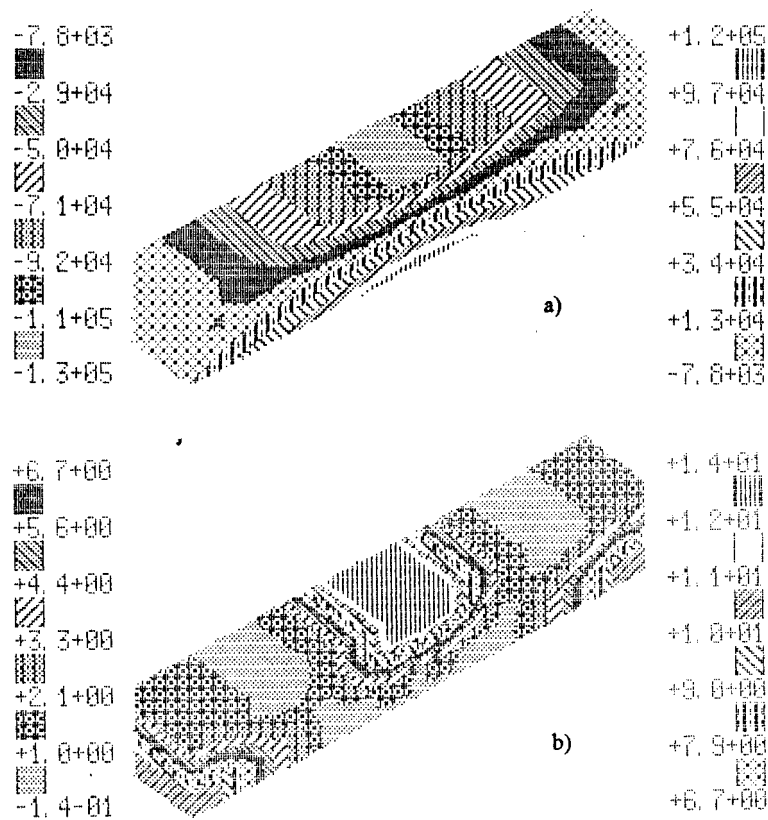


Figura 9 - Viga simplemente apoiada. a) Malha inicial, Tensão  $\sigma_x$ . b) Malha inicial,  $\hat{\eta}(\%)$ .

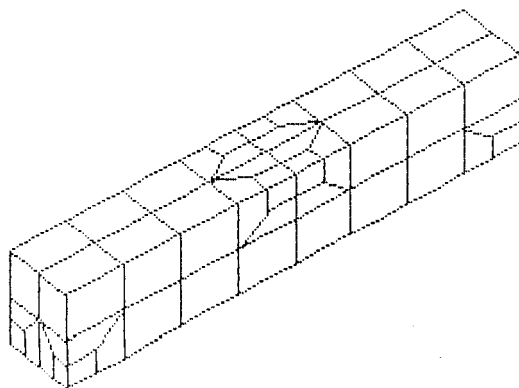


Figura 10 - Viga simplesmente apoiada. 1º refinamento, 429 nós, 56 elementos.  $\hat{\eta}_{max} = 13\%$



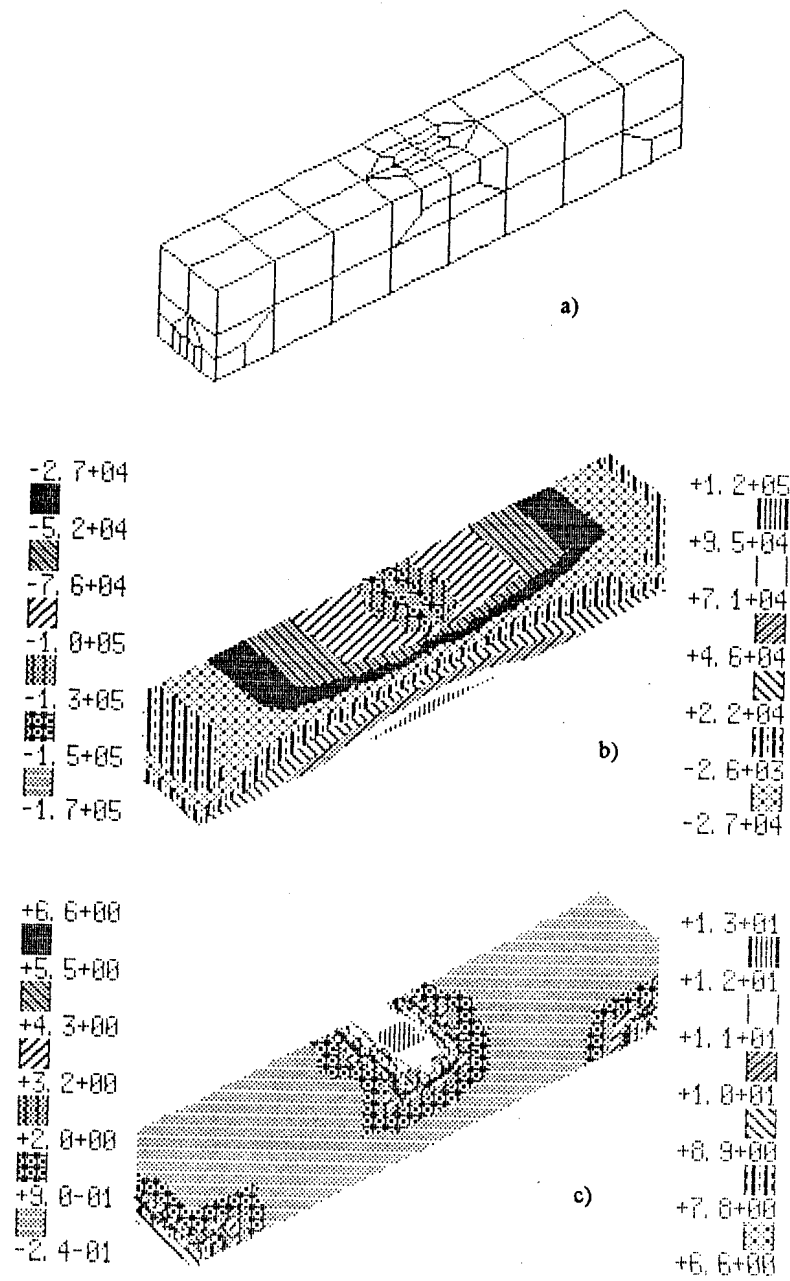


Figura 11 - Viga simplesmente apoiada. a) 2º refinamento, 567 nós, 80 elementos.  
 b) 2º refinamento, Tensão  $\sigma_x$ . c) 2º refinamento,  $\hat{\gamma}$ (%).

O exemplo 2 (figuras 8, 9, 10 e 11) conduz a um resultado que permite atingir a percentagem de erro especificada  $\bar{\eta}_T = 5\%$  em quase toda a estrutura. As únicas exceções são: o ponto de aplicação da carga concentrada e os pontos de apoio. Os valores de tensão  $\sigma_x$  estão próximos da tensão  $\sigma_x$  máxima teórica de  $1,25 \times 10^5$  kN/m<sup>2</sup>, visto que  $\sigma_{x \max} = 1,2 \times 10^5$  kN/m<sup>2</sup> em todas as etapas de refinamento.

*Obs.*: O exemplo 1 (Região em L) também foi analisado com uma malha de elementos quadriláteros de 4 nós e conseguiu-se atingir um nível de erro de 5,4%. Esse nível de erro é semelhante ao obtido pelo processo que cria os nós irregulares [4]. Para atingir esse nível de erro, a quantidade de nós e elementos utilizados no refinamento por nó é quase a metade daquela necessária no processo que cria os nós irregulares.

### CONCLUSÕES

A estratégia de refinamento por nó, por não criar nós irregulares, é de fácil implementação em sistemas convencionais de elementos finitos. Ela pode ser aplicada em elementos bi e tridimensionais lineares e quadráticos do tipo triângulo, quadrilátero, pentaedro ou hexaedro.

Ao realizar refinamentos sucessivos dentro de uma mesma etapa, consegue-se atingir baixos índices de erro mais rapidamente. Apesar da distorção dos elementos, que aumenta nas consecutivas etapas de refinamento, o processo permite que se obtenha um abaixamento do nível de erro até valores da ordem de 5%, exceto para pontos de aplicação de carga ou apoio. Para níveis de erro menores, corre-se o risco de a distorção exagerada em alguns elementos não permitir o abaixamento do erro, embora isso não seja uma regra.

De modo geral, o estimador de erros e o processo de refinamento utilizados mostraram-se bastante eficientes, uma vez que o erro diminui até níveis razoáveis do ponto de vista de engenharia. Caso se desejar erros ainda menores, pode-se iniciar o processo com uma malha mais fina.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedures for Practical Engineering Analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, págs. 337-357.
- [2] Zhu, J. Z. and Zienkiewicz, O. C., *Adaptive Techniques in the Finite Element Method*, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 4, 1988, págs. 197-204.
- [3] Groehs, A. G. e Santos, M. I. G., *GAELI - Gerador e Analisador de Estruturas Lineares*, Grupo de Análise Numérica Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 1990.
- [4] Silva, L. C. P., *Um Processo de Refinamento Auto-Adaptativo Tipo h para o Método dos Elementos Finitos*, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1991.
- [5] Lyra, P. R. M., Alves, L. D., Coutinho, A. L. G. A. and Landau, L., *Comparison of Mesh Refinement Strategies for the h Version of the Finite Element Method*, X Congresso Ibero-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Vol. 2, 1989, págs. A595-A610, Porto, Portugal.