

## MODELO CUASI-3D PARA TRANSPORTE Y DEPOSICION DE SEDIMENTOS

Pablo A. Tarela , Angel N. Menéndez  
Secretaría de Recursos Naturales y Ambiente Humano  
Instituto Nacional de Ciencia y Técnica Hídricas (INCYTH)  
Casilla de Correo 21 (1802) Aeropuerto de Ezeiza - Buenos Aires - Argentina

### RESUMEN

Se presenta un modelo matemático para cuantificar la carga de sedimentos en suspensión transportada a un reservorio y determinar las tasas de erosión-deposición que modifican el lecho. El modelo incluye efectos tridimensionales a través de una formulación bidimensional integrada en la dirección transversal. Las ecuaciones se resuelven a través del método de elementos finitos.

El modelo se verifica comparando sus predicciones de sedimentación con las curvas empíricas utilizadas comúnmente. Se muestra que los efectos tridimensionales son relevantes para una correcta predicción de los procesos físicos involucrados en el sistema bajo estudio.

### ABSTRACT

A mathematical model to predict the suspended sediment load discharged into a reservoir and the erosion-deposition rates which modify its bottom, is presented. The model includes three-dimensional effects through a two-dimensional formulation laterally integrated. The equations are solved by the finite element method.

The model is verified comparing its sedimentation predictions with the empirical curves usually used. It is shown that three-dimensional effects are relevant to correctly predict the physical processes involved in the system under study.

### INTRODUCCION

La construcción de una presa de embalse sobre un curso de agua trae aparejado un corte del transporte de sedimentos. Como consecuencia de ello, en el embalse se desarrolla un proceso de sedimentación que es necesario cuantificar para determinar, en primer lugar, la factibilidad de la obra y, en segundo lugar, su vida útil.

En la práctica ingenieril, esta cuantificación está basada, generalmente, en curvas empíricas obtenidas a través de determinaciones efectuadas en una gran cantidad de embalses. En este trabajo se presenta la formulación de un modelo matemático que describe el proceso de sedimentación.

El modelo consta de tres niveles:

- Hidrodinámica
- Transporte de sedimentos
- Variación del fondo

Se considera que el flujo es turbulento y está caracterizado por una dirección principal de movimiento. Como es de interés la distribución vertical de concentración de partículas, se realiza una descripción bidimensional del flujo en un plano vertical que incluye a la dirección principal de movimiento. La dimensión transversal es tenida en cuenta a través de una integración lateral de las ecuaciones de movimiento, utilizándose la información geométrica del reservorio en esta dirección.

En las situaciones de interés, donde la escala vertical de movimiento es mucho menor que la horizontal, es posible trabajar con la aproximación de capa límite. Esto permite describir el flujo mediante un sistema parabólico de ecuaciones diferenciales que se pueden resolver a través de un proceso de avance en la dirección del flujo, obteniéndose una reducción sustancial del costo computacional en comparación con los sistemas elípticos. Para permitir esto, la superficie libre se calcula a priori mediante la integración de las ecuaciones de Saint-Venant (ecuaciones unidimensionales integradas transversalmente). La resolución del sistema que describe la hidrodinámica se lleva a cabo mediante un esquema numérico en elementos finitos.

El mismo método de resolución es aplicable al modelo de transporte de sedimentos en suspensión, ya que la ecuación de concentración se encuentra desacoplada de la hidrodinámica debido a la hipótesis de concentración relativamente baja.

El modelo se verifica comparando sus predicciones de sedimentación con las curvas empíricas disponibles. Se concluye que los efectos tridimensionales influyen fuertemente sobre la tasa de sedimentación.

### CARACTERIZACION DEL PROBLEMA TIPO

Se ha elegido como problema prototipo el que se esquematiza en la figura 1, que corresponde a una presa de embalse. Se ha considerado una pendiente de fondo uniforme y un ancho de reservorio uniformemente divergente. Adaptando las dimensiones horizontal y vertical y el ángulo de divergencia  $\beta$  (que define las márgenes) se pueden reproducir geometrías representativas de casos reales.

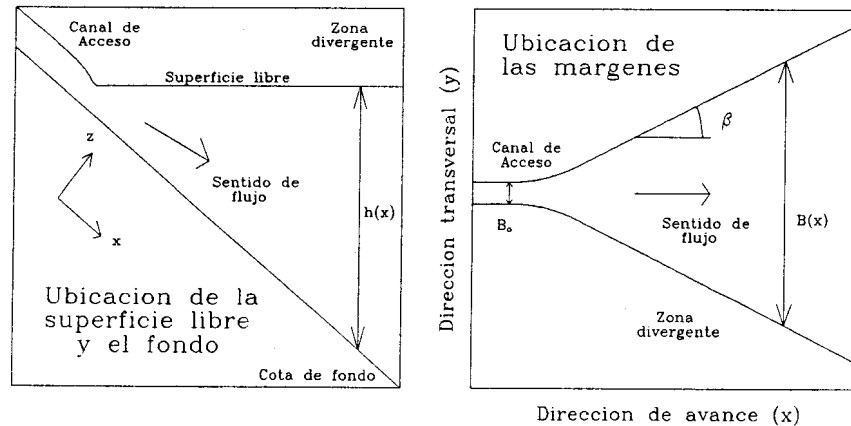


figura 1 - Esquema de la geometría prototipo empleada para la determinación de las tasas de sedimentación en embalses. Izquierda: vista lateral. Derecha: vista en planta.

El fin del canal de acceso, donde comienza la separación de las márgenes, se ha ubicado arbitrariamente en la zona donde la superficie libre presenta el menor radio de curvatura, cuando éste se calcula para la situación de ancho uniforme.

### ECUACIONES DE MOVIMIENTO

De acuerdo a lo mencionado en la introducción el flujo es descripto por una versión integrada transversalmente de las ecuaciones de Navier-Stokes. A orden cero en el desarrollo de las correlaciones de desviación espacial que aparecen en el proceso de integración, dichas ecuaciones quedan expresadas de la siguiente manera:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = Fr^{-2} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha^{-1} \text{sen} \theta \right) + \frac{1}{\rho} \alpha^{-1} Re_v^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha^{-2} Fr^{-2} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \text{cos} \theta \right) + \frac{1}{\rho} \alpha^{-2} Re_H^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_H \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{2}{\rho} \alpha^{-1} Re_v^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_v \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial B u}{\partial x} + \frac{\partial B w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

donde  $u$  y  $w$  son las componentes de velocidad horizontal y vertical, respectivamente, y  $p$  es la presión. Dichas cantidades representan valores medios turbulentos y promedios en la dirección transversal. En el sistema (1)-(3)  $x$  y  $z$  son las coordenadas cartesianas longitudinal y vertical,  $\rho$  es la densidad,  $\theta$  la pendiente de fondo,  $\alpha$  la relación de aspectos (relación entre las escalas de movimiento vertical y horizontal),  $Re_H$  y  $Re_v$  los números de Reynolds "efectivos" construídos con las viscosidades de torbellino horizontal y vertical,  $\mu_H$  y  $\mu_v$ , respectivamente,  $Fr$  es el número de Froude y  $B$  el ancho local.

Los pasos que se han seguido para obtener el sistema (1)-(3), junto a las hipótesis que permiten llegar a esta forma compacta, ya han sido presentados [1], por lo que este juego de ecuaciones es la generalización de los citados para el caso de ancho no uniforme y efectos de la dimensión integrada no despreciables [2].

En particular, la viscosidad de torbellino vertical se ha modelado de acuerdo al criterio de Kerssens [3] y su par horizontal a partir de la relación  $\mu_H = 0.23hu$ . [4] donde  $h$  es la profundidad local y  $u$ , la velocidad de corte.

Las condiciones de borde empleadas en el fondo son [1]:

$$u(z^*) = \frac{u_*}{k} \ln(z^*) \quad , \quad w(z^*) = 0 \quad (4)$$

donde  $z^* = 30$  es un borde ficticio y  $k$  es la constante de von Kármán.

Por su parte, en la superficie libre se pide:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad u \frac{\partial h}{\partial x} - w = 0, \quad p = 0 \quad (5)$$

con  $n$  la normal exterior. Como el juego de ecuaciones es parabólico, se requiere imponer condiciones "iniciales", en este caso correspondientes a las distribuciones de velocidad y presión en el borde aguas arriba.

### ECUACION DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

Al utilizar el procedimiento seguido con las ecuaciones de Navier-Stokes en la ecuación de transporte de sedimentos, se obtiene [1]:

$$(u + \alpha \Lambda \sin \theta) \frac{\partial s}{\partial x} + (w - \Lambda \cos \theta) \frac{\partial s}{\partial z} = \alpha^{-1} P e_{\nu}^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_{\nu} \frac{\partial s}{\partial z} \right) \quad (6)$$

donde  $s$  es la concentración de sedimentos,  $\Lambda$  es la velocidad adimensional de caída de las partículas,  $\nu_{\nu}$  es un coeficiente de difusividad turbulenta y  $P e_{\nu}$  es un número de Peclet para la fase particulada. Como la interacción entre partículas se ha supuesto despreciable, se asume que  $\nu_{\nu} = \mu_{\nu} / \rho$ .

Las condiciones de contorno usadas implican flujo de partículas nulo en la superficie libre,

$$\nu_{\nu} \frac{\partial s}{\partial z} + (\Lambda \alpha P s_{\nu}) s = 0 \quad (7)$$

y balance nulo de flujos de deposición y resuspensión en el fondo, para el caso de equilibrio local,

$$\nu_{\nu} \frac{\partial s}{\partial z} + (\Lambda \alpha P s_{\nu}) s^* = 0 \quad (8)$$

donde  $s^*$  es la concentración de equilibrio en el fondo ficticio, la cual se puede calcular, cuando el material es no cohesivo, según

$$s^* = \alpha_s \frac{\delta_{50}}{z^*} D^{-3/10} T^{3/2} \quad (9)$$

En la ecuación (9)  $\alpha_s \approx 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\delta_{50}$  es el diámetro característico de las partículas,  $D$  es un parámetro de partícula, asociado con el tamaño y la densidad del sedimento, y  $T$  es el parámetro de estado de transporte, el cual especifica el comienzo de la resuspensión.

Nuevamente se debe especificar como condición inicial la distribución de concentración en el borde de aguas arriba.

### METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El juego de ecuaciones diferenciales presentado, más sus condiciones de contorno, se ha resuelto mediante un esquema numérico en elementos finitos, el desarrollo del cual se presenta en detalle en

la referencia [5].

A modo de breve resumen se puede señalar que se ha empleado un elemento cuadrilátero de 6 nodos, que interpola las velocidades en forma cuadrática en la vertical y lineal en la horizontal, mientras que la presión siempre se interpola linealmente. Este esquema presenta un "upwind" implícito, por lo que no resulta necesario modificar las funciones de peso para estabilizar términos convectivos. El carácter no lineal de las ecuaciones se resuelve sin inconvenientes a través de un proceso iterativo convencional hasta disminuir la diferencia relativa entre pasos a valores inferiores a  $10^{-6}$ .

Con respecto a la malla de cálculo, se utiliza un generador propio que densifica verticalmente en las zonas aledañas al fondo, donde se presentan los gradientes de velocidad y concentración más importantes, y horizontalmente en la zona de cambio más rápido de la superficie libre. Además, la transición de los márgenes desde el canal de acceso, de ancho uniforme, al reservorio propiamente dicho, se suaviza con el objeto de eliminar quiebres bruscos que generen recirculaciones en sus inmediaciones, las cuales no están contempladas en el modelo.

### VERIFICACION DEL MODELO

La verificación del modelo sedimentológico se llevó a cabo comparando resultados numéricos con dos métodos empíricos obtenidos a partir de mediciones en reservorios.

La figura 2 presenta la comparación entre las predicciones del modelo y los resultados del método de Brune [6], el cual especifica el porcentaje de material atrapado por el reservorio en función de las características geométricas e hidrológicas del mismo. Se muestra el caso de partículas finas, para las cuales es necesario modificar la condición de borde, especificándose resuspensión nula debida a la acción de las fuerzas cohesivas.

Sin embargo, los métodos empíricos tienen en cuenta distribuciones estándar de tamaños de partículas, y no diámetros individuales. Por ello, en la figura 3 se muestran los resultados del modelo cuando son pesados de acuerdo a la distribución de tamaños. Para este caso se ha tomado una curva granulométrica medida en el río Bermejo a la altura del Puente Lavalle. La curva empírica de la figura 3 corresponde al método de Churchill [6], que especifica el porcentaje de material que logra atravesar el reservorio. Se ha encontrado en este tipo de ensayos un aceptable acuerdo con los métodos mencionados.

### ANALISIS DE RESULTADOS

Se realizaron diversos ensayos numéricos para estudiar el comportamiento sedimentológico en este tipo de reservorios. Para ello se cubrió el siguiente rango de parámetros hidrodinámicos de interés hidráulico:

$$0.2 \leq Fr_0 \leq 0.6 \quad , \quad 120 \leq Re_0 \leq 280 \quad , \quad 1^\circ \leq \beta \leq 10^\circ$$

donde los subíndices indican valores iniciales aguas arriba.

Respecto de la hidrodinámica, se ha observado que los perfiles de velocidad pierden su forma de equilibrio local cuando el flujo penetra en el reservorio. La manera en que lo hacen sigue un patrón cualitativamente común para los distintos escenarios, destacándose la aparición de una sobrecorriente en las proximidades de la superficie libre y una retracción del perfil en la zona cercana al fondo ficticio. Este comportamiento se resume en la figura 4. Se determinó que la aparición de la sobrecorriente está asociada a la geometría divergente del reservorio, aumentando su intensidad con

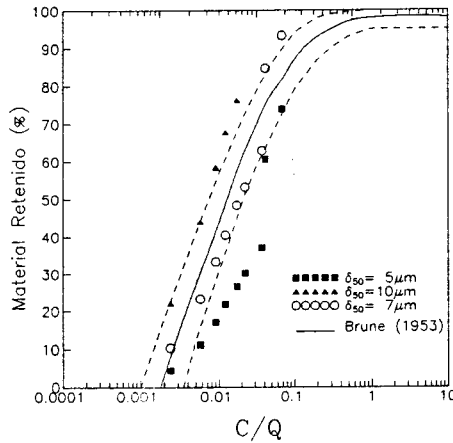


figura 2 - Comparación de resultados del modelo y el método de Brune.

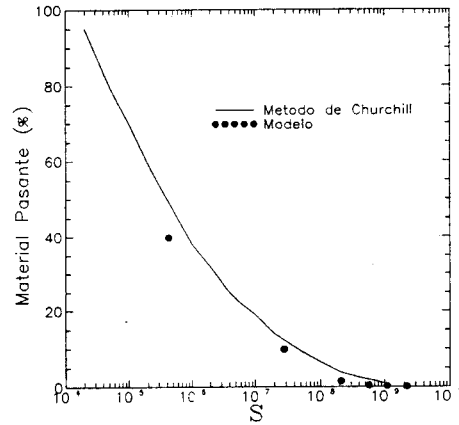


figura 3 - Resultados de los ensayos numéricos para distribuciones de tamaños comparado con los resultados de Churchill.

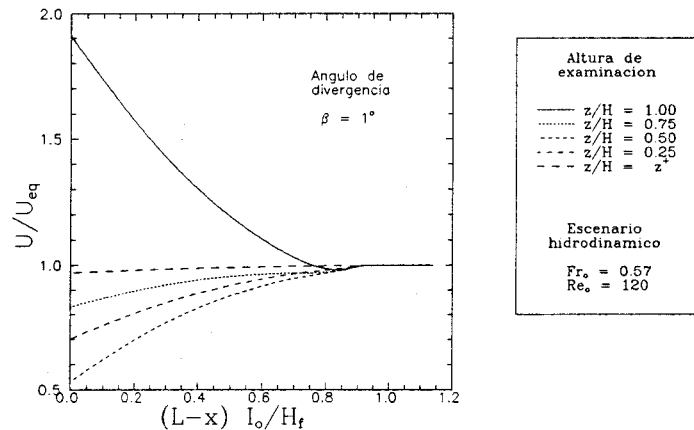


figura 4 - Evolución del perfil de velocidades horizontal a distintas profundidades.  $U_{eq}$  indica el valor de equilibrio local de la velocidad,  $L$  es la longitud del sistema,  $I_o = \theta$  y  $H_f$  es la altura final del embalse.

el ángulo de separación.

En cuanto a la presión, la curvatura experimentada por las líneas de corriente en el comienzo de la zona divergente ocasiona apartamientos del perfil hidrostático. Por una lado, la elevación del nivel de agua tiende a generar sobrepresiones (presiones localmente superiores a las hidrostáticas) mientras que el ensanchamiento del cauce tiende a relajar al sistema y pueden aparecer subpresiones.

La intensidad de estos apartamientos y su zona de influencia dependen fuertemente del escenario hidrodinámico, pero en todos los casos se recuperan los niveles hidrostáticos aguas abajo. La figura 5 muestra un caso particular, donde son relevantes tanto las sobrepresiones como las subpresiones.

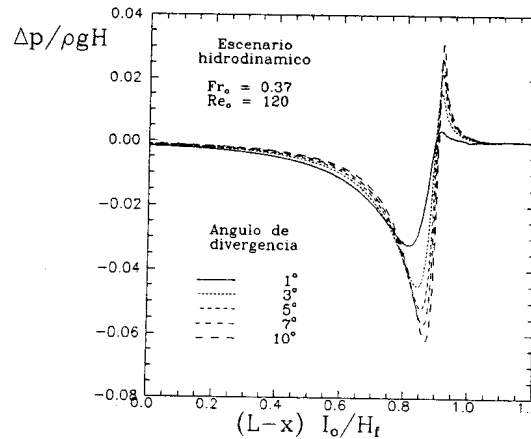


figura 5 - Patrón de variación de la presión respecto del valor hidrostático ( $\Delta p$ ) para distintos valores del ángulo de separación. H corresponde a la profundidad local.

El efecto del cambio de ancho también produce modificaciones sobre el transporte de sedimentos. En principio, un aumento repentino del ancho local se traduce en una disminución de las velocidades medias, con lo cual la capacidad de mantener las partículas en suspensión decrece debido a que la tasa de transferencia energética desde el flujo hacia el material particulado cae. Esto implica que aumenta localmente la tasa de deposición.

Sin embargo, cuando el ángulo de separación crece se produce un descenso local de la altura de fluido en la zona de acceso al reservorio. Entonces el efecto mencionado en el párrafo anterior es inverso: la velocidad media aumenta y crece la carga en suspensión por un efecto de "autodragado" en el fondo. Así, en lugar de deposición se tiene un proceso de erosión del lecho.

Las consecuencias sobre el transporte de partículas enumeradas recién se deben exclusivamente al cambio topográfico, especialmente el fenómeno de erosión que no aparece en un contexto bidimensional a ancho uniforme.

La cuantificación de estos fenómenos se realizó en el rango de diámetros característicos

$$30\mu\text{m} \leq \delta_{50} \leq 310\mu\text{m}$$

recordando que para sedimentos finos ( $\delta_{50} < 50\mu\text{m}$ ) la condición de borde en el lecho se debe modificar para dar cuenta del efecto de cohesión.

La capacidad de transporte del flujo se puede medir a través del caudal sólido volumétrico, definido como

$$Q_s(x) = \int_z^h u(x,z)s(x,z)B(x,z) dz \quad (10)$$

En la figura 6 se presenta como varía esta cantidad en función del ángulo de separación. Se observa que el comienzo de la zona divergente está caracterizado por un aumento significativo de la carga, seguida de un decremento brusco (para este escenario particular). También, se puede apreciar que el aumento del caudal sólido depende fuertemente de  $\beta$ . Esto se debe a que la propia forma de la superficie libre en la zona de acceso depende de la geometría divergente, que en algunos casos origina una disminución local de la profundidad. De este modo la energía turbulenta transferida a la fase particulada crece, a expensas del aumento de las velocidades, haciendo posible que una carga mayor permanezca en el estado de suspensión. La figura 7 muestra que la capacidad de carga cambia drásticamente con el tamaño de las partículas suspendidas. En el caso de partículas finas el aumento del caudal sólido resulta poco significativo mientras que a la zona de la presa pueden llegar corrientes con concentraciones no despreciables de sedimentos. A medida que el diámetro característico aumenta crece la carga de sólidos en la zona de acceso, pero en estos casos el aumento de la sección transversal produce una rápida caída de las partículas.

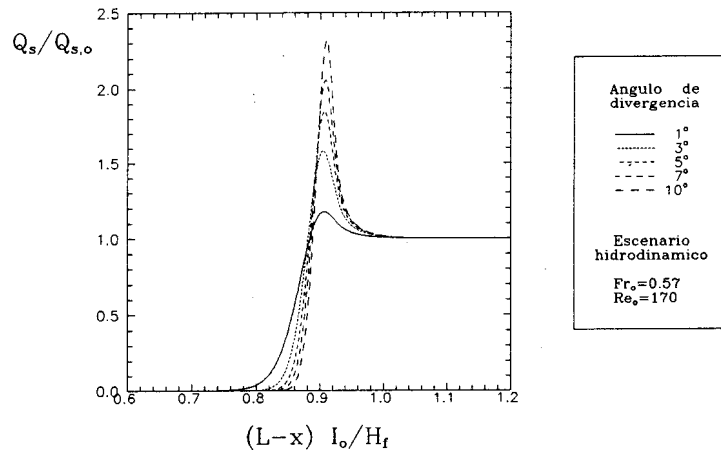


figura 6 - Evolución del caudal sólido volumétrico para diferentes ángulos de separación.  $Q_{s,0}$  es la carga inicial, aguas arriba.

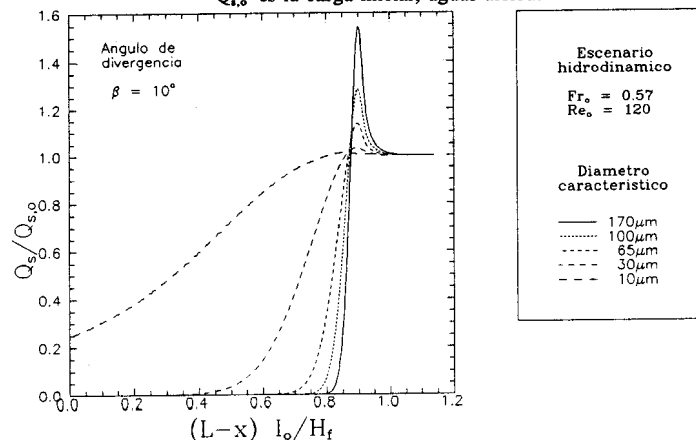


figura 7 - Comportamiento de  $Q_s$  para distintos tamaños de partícula.



Ahora, las variaciones del caudal sólido producen erosión y/o sedimentación en el fondo. Por ejemplo, los aumentos de la carga a la entrada del reservorio, referidos recién, se deben a la socavación local del lecho, mientras que las cargas resuspendidas se redepositan aguas abajo, cuando aumenta el ancho del cuerpo de agua.

Como el presente modelo es estacionario, a partir de los resultados mostrados se puede obtener una tasa de modificación del fondo, esto es, una cantidad que representa la variación local de la altura del lecho por unidad de tiempo. Esta se puede calcular a partir de

$$\Delta \xi = \frac{\Delta Q_s}{(1-\pi)B \Delta x} \quad (11)$$

donde  $\Delta Q_s$  es la variación de la carga entre dos secciones separadas por una distancia  $\Delta x$  y caracterizadas por un ancho medio  $B$ , siendo  $\pi$  la porosidad del medio depositado.

La figura 8 presenta cómo esta cantidad se modifica para distintas geometrías divergentes; se ve que cuanto más grande es el ángulo de separación, los procesos de erosión-deposición son más importantes y se desarrollan sobre longitudes menores. Esto último es poco deseable, ya que la formación de estructuras localizadas en las proximidades del acceso al reservorio produce, con el tiempo, el aumento de la altura de agua en esa zona, lo cual puede desencadenar la inundación de áreas adyacentes. Sin embargo, desde el punto de vista de la vida útil del embalse, los depósitos de este tipo son preferibles a aquellos que aparecen en la zona de la presa, ya que estos últimos producen un descenso en la capacidad del reservorio. Así, tanto la factibilidad de la obra como su vida útil están estrechamente ligadas, en muchos casos, a este tipo de fenómenos.

La figura 9 muestra que la forma y amplitud de las estructuras que modifican el lecho dependen también del tamaño de los sedimentos. En general, las partículas finas dan lugar a formaciones de poca altura pero gran extensión. Lo contrario ocurre con los sedimentos gruesos.

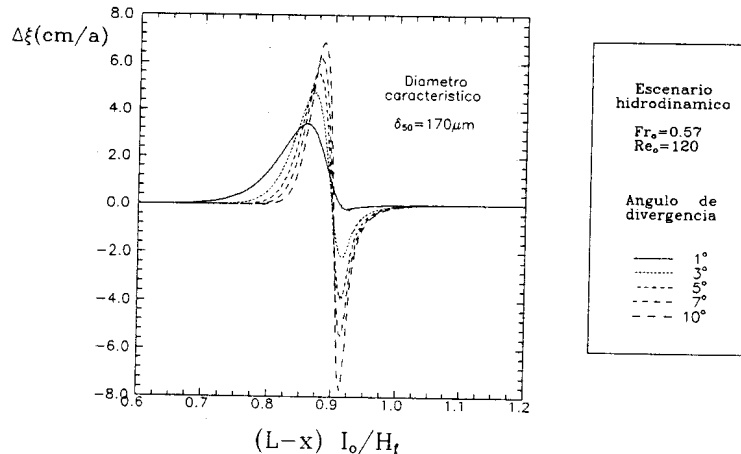


figura 8 - Tasa de modificación del fondo (en centímetros por año) para distintos ángulos de separación.

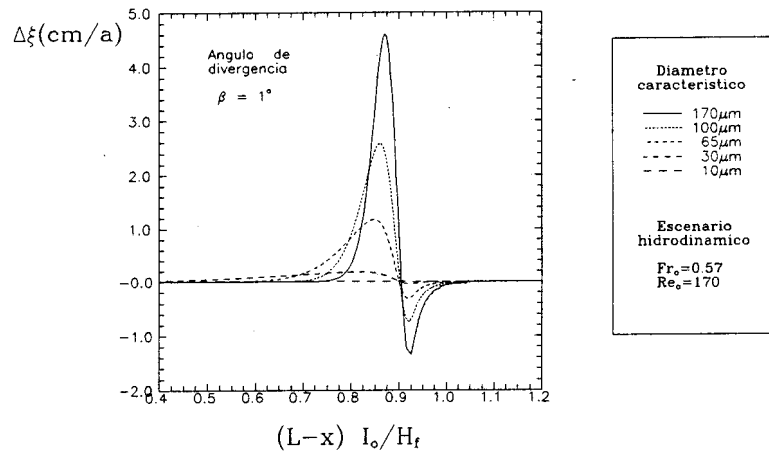


figura 9 - Modificación del fondo por unidad de tiempo para diferentes tamaños de partículas.

### CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado la generalización de un modelo 2D de transporte y deposición de sedimentos para el caso de problemas que involucran geometrías 3D. Se ha mostrado que los efectos tridimensionales que provienen de la geometría de los cuerpos de agua resultan, en muchos casos, significativos, por lo cual se los debe tener en cuenta a la hora de la modelización de este tipo de fenómenos.

El presente modelo puede ser empleado para determinar cargas transportadas, concentración de sedimentos y modificación del lecho. Con esta información se puede determinar la vida útil de un embalse, las áreas de inundación por crecimiento del fondo, la concentración y tipo de partículas que llegan a la zona de turbinas (las cuales provocan efectos corrosivos sobre los álabes), la calidad del agua en las zonas de tomas para riego y potabilización y el impacto ambiental que, desde este punto de vista, una obra puede producir en su entorno.

### REFERENCIAS

- [1] Tarela, P. A., Menéndez, A. N., "Estratificación por fases particuladas en flujos embalsados", IV Congreso Argentino de Mecánica Computacional, MECOM'94, Mar del Plata, 1994.
- [2] Tarela, P. A., "Modelación matemática de los procesos de transporte y deposición de sedimentos en embalses", Informe de Beca CONICET, 1995.
- [3] van Rijn, L. C., "Mathematical Model of Morphological Processes in the Case of Suspended Sediment Transport", Delft University of Technology, Delft. Hyd. Comm. N° 382, 1987.
- [4] Fisher, H. B., "The mechanics of dispersion in natural streams", J. Hydr. Div., ASCE, V. 93, HY6, 1967.
- [5] Tarela, P. A., Menéndez, A. N., "Un modelo hidrodinámico para flujo estratificado a superficie libre", 8° Congreso Sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF'92, Bariloche, 1992.
- [6] Shen, H.W. (editor), "River mechanics", volume II, 1971.