

ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA EN FLUIDOS VISCOPLÁSTICO Y NEWTONIANO-VISCOPLÁSTICO

S. A. Elaskar, L. A. Godoy y A. T. Brewer
Departamento de Estructuras. FCEFYN.
Universidad Nacional de Córdoba.

RESUMEN

En este trabajo se estudian las características del proceso de convergencia al modelizar el flujo por acción de la gravedad de materiales granulares con cohesión y fricción por medio de un fluido viscoplastico, y por un fluido newtoniano-viscoplastico. Se trata de un problema altamente no lineal, en el cual la viscosidad equivalente que depende del segundo invariante del tensor velocidad de deformación y de la presión. Cuando consideramos al material representado por un fluido viscoplastico, encontramos que existen problemas de convergencia y en el cumplimiento de la ecuación constitutiva. Esos inconvenientes fueron solucionados en una gran parte al considerar un límite máximo en la viscosidad equivalente (fluido newtoniano-viscoplastico).

ABSTRACT

Convergence characteristics of a model for gravity flow of granular materials with cohesion and friction are studied. The model represents a viscoplastic fluid, and a Newtonian-viscoplastic fluid. This problems is highly non linear, in which the equivalent viscosity is a function of the second invariant of the strain rate tensor, and of the pressure. For the viscoplastic fluid there are convergence problems, and the constitutive equation is not satisfied. Such problems are partially overcome by the introduction of an upper limit to the equivalent viscosity, thus leading to a Newtonian-viscoplastic fluid.

INTRODUCCIÓN

Se presentan y analizan las condiciones de convergencia de dos modelos constitutivos para simular el flujo de materiales granulares con cohesión y fricción. El primer modelo está dado por un fluido viscoplastico, y el segundo por un fluido que bajo ciertas condiciones se comporta como newtoniano y en otras como viscoplastico. En ambos casos se tiene un problema con una elevada no linealidad. La viscosidad equivalente depende de parámetros físicos tales como fluidez, cohesión, fricción y el exponente de la función de discontinuidad, y de factores dinámicos tales como el segundo invariante del tensor velocidad de deformación y la presión.

Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno son las de continuidad, cantidad de movimiento y constitutiva del material. Las viscosidades son elevadas tanto para el caso lineal como en el no lineal, por ello despreciamos los términos convectivos en velocidades. Las paredes que contienen el flujo son rígidas.

Se resuelve el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales por medio de elementos finitos, usando funciones de penalización, en casos planos y con simetría axial. La técnica iterativa utilizada es la de iteración directa.

ECUACIÓN CONSTITUTIVA

La primera formulación general considerando flujo por gravedad de un material granular, en función de su fluidez, cohesión y fricción interna, fue presentada por Diez y Godoy como fluido viscoplastico [2], [3]. En este trabajo proponemos una expresión más general, y exploramos la validez y limitaciones de estos modelos mediante experimentación numérica.

Para un material rígido-viscoplastico, la ecuación constitutiva general presentada por Perzyna [8], puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\epsilon_{ij} = \gamma(\beta F^n) \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \gamma(A) \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

donde

$$\langle A \rangle = A \quad \text{si } A > 0 \quad (2)$$

$$\langle A \rangle = 0 \quad \text{si } A \leq 0 \quad (3)$$

siendo F la función de discontinuidad plástica, y Q el potencial plástico.

Utilizamos la función de discontinuidad de Drucker-Prager, la cual nos permite considerar a la cohesión y a la fricción interna como parámetros del modelo. Adoptando la forma dada por Zienkiewicz y Taylor [10], tenemos:

$$F = (3J_2)^{\frac{1}{2}} - k - \alpha \cdot p \quad (4)$$

donde J_2 es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, p es la presión, k y α están dadas por:

$$k = 6c \cos \phi / (3 - \sin \phi) \quad (5)$$

$$\alpha' = 6 \sin \phi / (3 - \sin \phi) \quad (6)$$

siendo c la cohesión y ϕ el ángulo de fricción interno.

Para la consideración del potencial plástico, usamos una regla no asociada, en función del criterio de von Mises:

$$Q = (3J_2)^{\frac{1}{2}} - k \quad (7)$$

entonces el potencial plástico resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{(3)^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{S_{ij}}{(J_2)} \quad (8)$$

substituyendo las ecuaciones (4) y (8) en (1) tenemos que:

$$\epsilon_{ij} = \gamma(\beta(\sqrt{3J_2} - (k + \alpha \cdot p))^n) \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad (9)$$

La ecuación constitutiva de un fluido viscoso e incompresible puede ser expresada por una relación entre tensiones y velocidades:

$$S_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} \quad (10)$$

Donde $\mu \geq 0$, es una viscosidad aparente de un fluido isótropo. Comparando la ecuación (9) con la (10) tenemos:

$$\frac{1}{\mu} = \gamma(\beta(\sqrt{3J_2} - (k + \alpha p))^n) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{J_2}} \quad (11)$$

Siendo

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{3}\mu\Sigma \quad (12)$$

donde Σ es el segundo invariante del tensor velocidad de deformación. Reemplazando en ecuación (11) y trabajando llegamos a la expresión de la viscosidad equivalente

$$\mu = \left[\left(\frac{\Sigma}{\beta\gamma} \right)^{\frac{1}{n}} + k + \alpha p \right] \frac{1}{3\Sigma} \quad (13)$$

Cuando $\beta = 1$ y $n = 1$

$$\mu = \frac{1}{3\gamma} + \frac{k}{3\Sigma} + \frac{\alpha p}{3\Sigma} \quad (14)$$

que es la expresión deducida por Diez y Godoy [2].

Resumimos lo que hemos hecho para obtener la ecuación constitutiva:

a) Planteamos un modelo rígido-viscoplástico. b) Utilizamos la ecuación constitutiva de un fluido viscoso newtoniano. c) Eliminamos la restricción de los corchetes de Macauley. d) Trabajamos algebraicamente.

En los pasos (b) y (c) perdimos información, olvidando la condición de rígido. De la ecuación (11) observamos que

$$[\beta(\sqrt{3J_2} - (k + \alpha p))^n] \rightarrow 0 \quad (15)$$

$$\mu \rightarrow \infty \quad (16)$$

Para representar el comportamiento rígido del material, la viscosidad debería alcanzar valores sumamente grandes.

En un intento de solucionar este inconveniente, modificamos la ecuación constitutiva considerando una viscosidad límite en la forma

$$\text{si } \mu > \mu_{\text{lim}} \rightarrow \mu = \mu_{\text{lim}} \quad (17)$$

De este modo, se transforma el modelo rígido-viscoplástico en otro dado por un fluido newtoniano-viscoplástico.

SOLUCIÓN POR MEDIO DE ELEMENTOS FINITOS

Utilizamos funciones de penalización con elementos cuadriláteros Lagrangeanos de nueve nodos [2]. Consideramos integración reducida selectiva para integrar la componente volumétrica de la matriz de rigidez. Por este motivo la viscosidad la obtenemos en los puntos de Gauss (2x2). Calculamos una viscosidad por elemento promediando los cuatro valores

$$\mu^e = \mu_1^e + \mu_2^e + \mu_3^e + \mu_4^e \quad (18)$$

y el parámetro de penalización es proporcional a la viscosidad del elemento

$$\alpha^e = \mu^e cte \quad (19)$$

Otros detalles son iguales a los presentados en la Ref. [3]

PROCESO ITERATIVO

Hemos deducido en las páginas anteriores, un sistema no lineal de ecuaciones. La no linealidad se manifiesta por medio de la dependencia de la matriz \mathbf{K}^e con la viscosidad μ , y de ésta con las velocidades nodales por medio del segundo invariante del tensor velocidad de deformación ' Σ ', y de la presión ' p '.

Existe una abundante bibliografía en las cuales se desarrollan las distintas formas iterativas para tratar problemas no lineales [4]; [7]; [10]. La técnica utilizada en este trabajo ha sido la de iteración directa, por ser la más robusta para este tipo de problemas [1]

Las normas consideradas son las siguientes

$$\delta n v = \frac{\sum (a_i^n - a_i^{n-1})^2}{\sum (a_i^n)^2} < \Theta \quad (20)$$

$$\delta n p = \frac{\sum (p_j^n - p_j^{n-1})^2}{\sum (p_j^n)^2} < \Theta \quad (21)$$

siendo Θ un valor fijo (entre 0.01 y 0.001).

RESULTADOS NUMÉRICOS

Se ha estudiado el flujo estacionario por acción de la gravedad en una tolva con simetría axial de 5m de altura y con un ángulo de 30 grados (Fig. 1).

Modelo viscoplastico

Hemos analizado la respuesta del modelo para distintos valores de cohesión y del ángulo fricción interno del material, mientras se mantienen constantes la fluidez en 1E08 (1/kpa.s), el exponente de discontinuidad en 1 y la viscosidad inicial del proceso iterativo en 500 kpa.s. En la Fig. 2 se indica la zona del plano cohesión-fricción en la que se verifica la ecuación constitutiva ($p \geq p_{lim}$).

Se observa que se cumple la ecuación constitutiva sólo en una parte del plano, siempre que el ángulo de fricción interna no supere los 3 grados. Excepto para valores pequeños de cohesión, en donde la situación es más restrictiva. Destacamos, además, que solamente se encontró convergencia para

$$c = 0.0 \quad 0 \leq \phi \leq 6 \quad (22)$$

Por ello, para ningún par (c, ϕ) se satisfizo la ecuación constitutiva y convergencia en forma simultánea (sólo para el origen del plano, que es lineal).

En las Figs. 3 a 7 se estudia el comportamiento del proceso iterativo para $c = 0$, $\phi = 16$, que es un punto en el que no hay convergencia ni se verifica la ecuación constitutiva.

En la Fig. 3 se observa que las normas evolucionan en forma caótica al incrementarse las iteraciones. La presión en el nudo 77 muestra saltos en su valor, principalmente luego de la iteración número 20 (Figs. 4 y 5). Lo mismo sucede con la velocidad en la salida, en donde es más notoria la pérdida de convergencia desde la iteración 20 (Fig. 6 y 7). La falta de convergencia se debe en este caso a que las variables del problema presentan caos al incrementarse las iteraciones.

En las Figs. 8 a 12 se grafican las mismas propiedades pero para $c = 10kpa$, $\phi = 2$, un punto del plano cohesión-fricción donde se verifica la ecuación constitutiva. En este caso el proceso es convergente

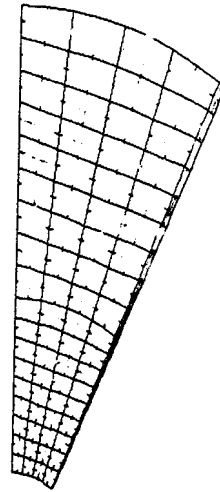


Figure 1: Malla utilizada para la tolva

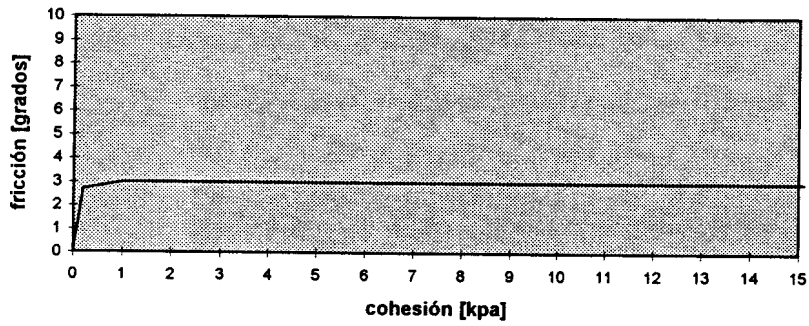


Figure 2: Fluido viscoplastico. Verificacion de la ecuacion constitutiva

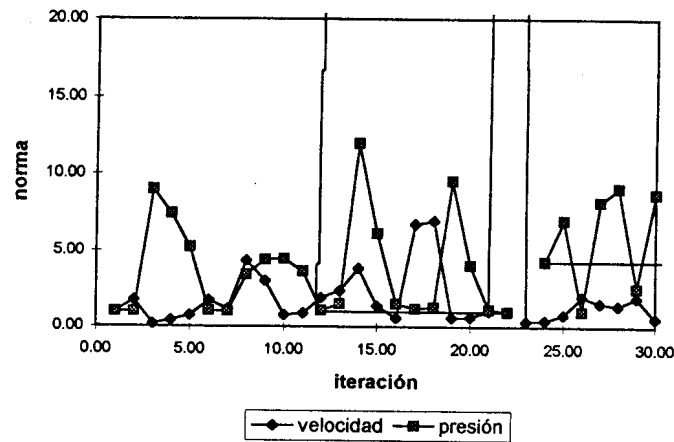


Figure 3: Norma en velocidad y en presión

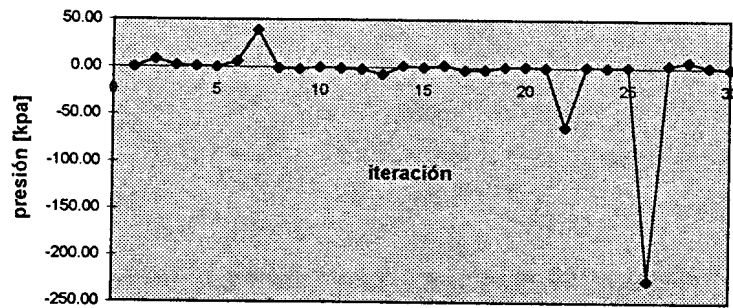


Figure 4: Presion en el nudo 77 en funcion de el numero de iteracion

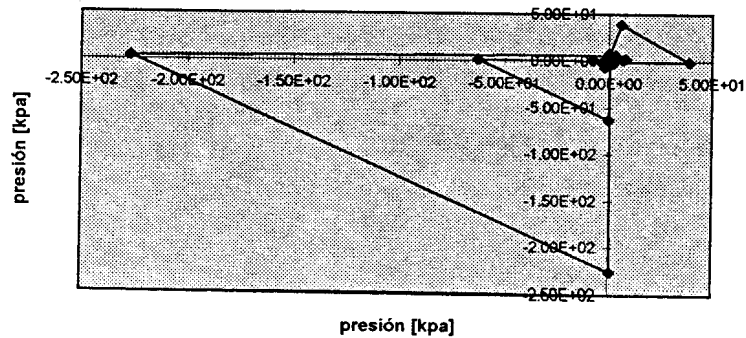


Figure 5: Nudo 77. Presion en la iteracion k+1 en funcion de la presion en la iteracion k

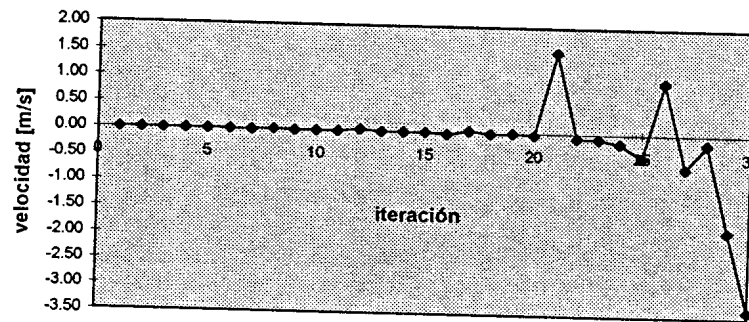


Figure 6: Velocidad en la salida en funcion del numero de iteracion

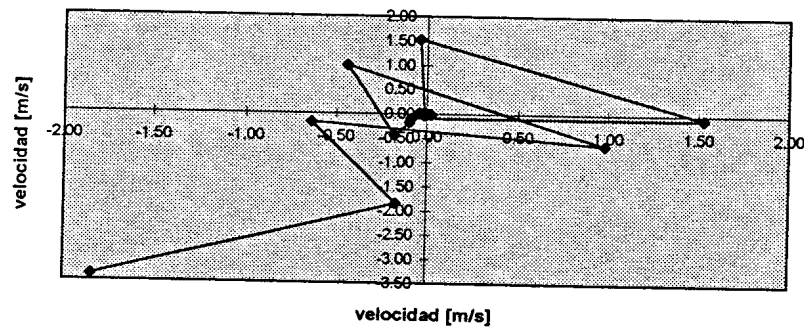


Figure 7: Velocidad en la salida. Velocidad en la iteracion k+1 en funcion de la velocidad en la iteracion k

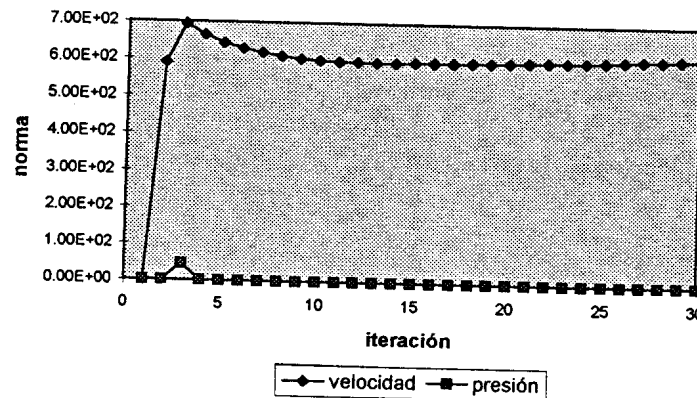


Figure 8: Norma en velocidades y presiones

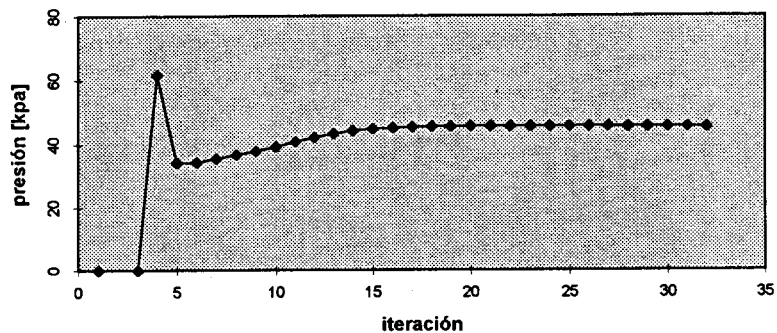


Figure 9: Nudo 77. Presion en funcion del numero de iteracion

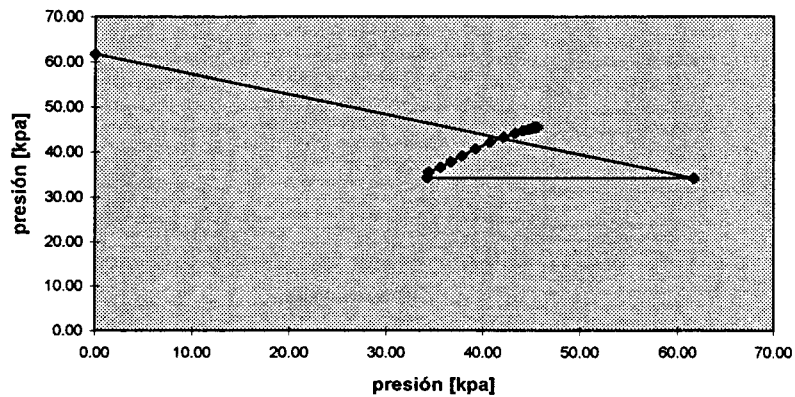


Figure 10: Nudo 77. Presion en la iteracion k+1 en funcion de la presion en la iteracion k

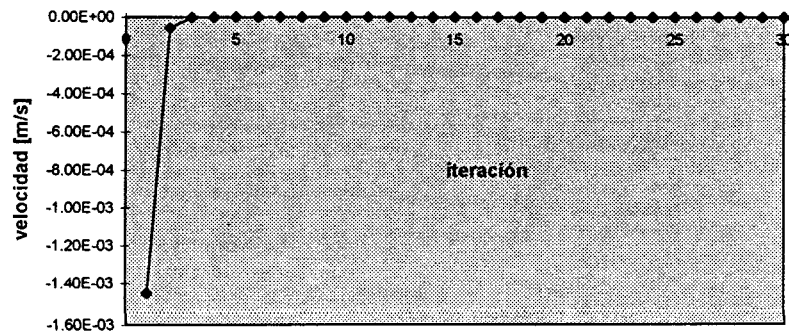


Figure 11: Velocidad en la salida en funcion del numero de iteracion

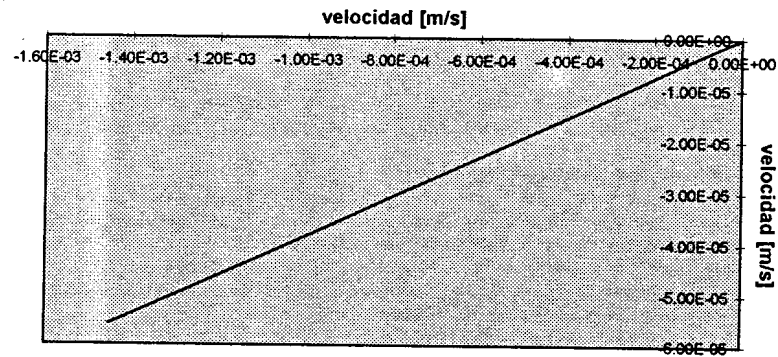


Figure 12: Velocidad en la salida en la iteracion k+1 en funcion de la velocidad en la salida en la iteracion k

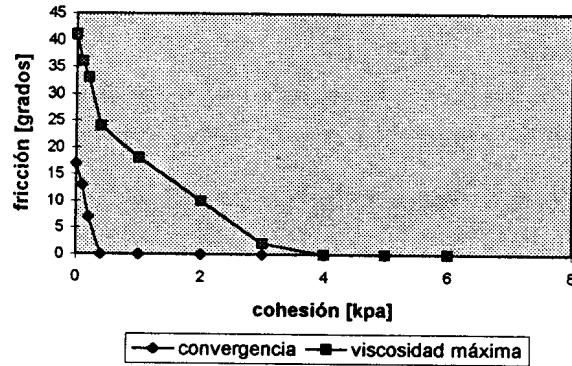


Figure 13: Zonas de convergencia en el modelo newtoniano-viscoplastico

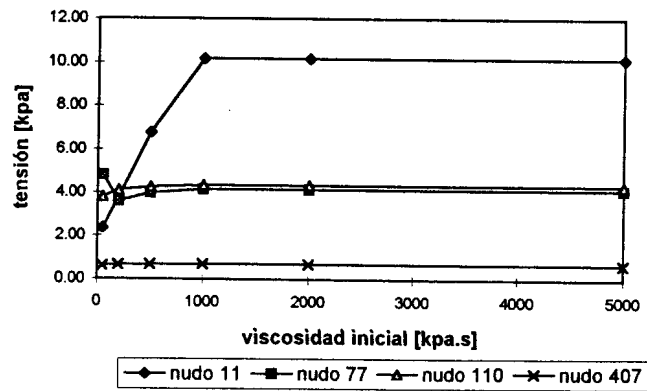


Figure 14: Presion en funcion de la viscosidad inicial

en presión, pero no en velocidad. La falta de convergencia en velocidades se debe a que la intersección con el eje $x = y$ se produce para velocidades nulas, lo que es lo mismo, cuando la viscosidad tiende a infinito (Fig. 12).

Modelo newtoniano-viscoplástico

En la Fig. 13 se presentan (en el plano cohesión-fricción) tres zonas, en la primera no tenemos convergencia, en la segunda el material se comporta como un fluido newtoniano-viscoplástico y en la tercera como un fluido newtoniano de viscosidad igual a la máxima.

En este caso la ecuación constitutiva no se verifica en todo el eje de ordenadas.

Dentro de la segunda zona hemos estudiado la sensibilidad de la respuesta a la viscosidad inicial impuesta. El caso analizado tiene $\phi = 23$, $c = 0.1 \text{ kpa}$.

Se observa que la solución no es sensible a la viscosidad inicial si esta es mayor o igual que la viscosidad máxima impuesta (en este caso de 1000 kpa.s).

CONCLUSIONES

- En este trabajo no hacemos un estudio comparativo de los resultados numéricos con los obtenidos por medio de la verificación experimental. Sólo realizamos un análisis interno del comportamiento de cada modelo.

Modelo viscoplástico

- En lo que respecta a convergencia, el comportamiento del modelo viscoplástico es malo.
- La ecuación constitutiva se verifica sólo para valores pequeños del ángulo de fricción interno del material.
- Donde cumple la ecuación constitutiva no se obtiene convergencia.

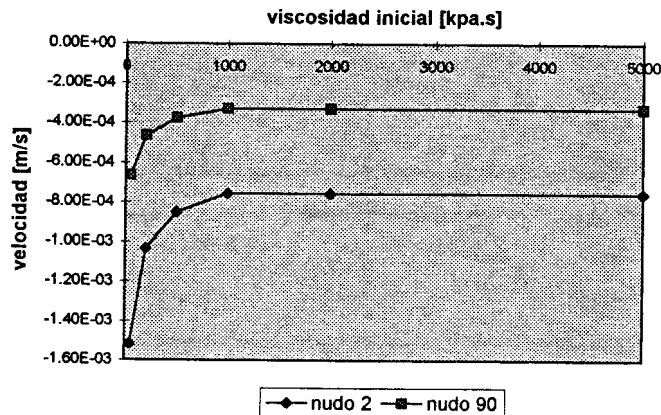


Figure 15: Velocidad en función de la viscosidad inicial

Modelo newtoniano-viscoplástico

- En el caso del fluido newtoniano-viscoplástico, se consiguió convergencia para una gran parte del plano ($c - \sigma$).
- Solamente no verifica la ecuación constitutiva cuando $c = 0$.
- En lo que respecta a la convergencia y verificación de la ecuación constitutiva, el comportamiento del modelo newtoniano-viscoplástico ha sido superior al del fluido viscoplástico.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo brindado a esta investigación por CONICET y CONICOR.

References

- [1] Antunez, H. J., Análisis por elementos finitos del conformado de metales, con orientación a la laminación de tubos sin costura". Tesis de Doctorado en Ciencia de la Ingeniería. Universidad Nacional de Córdoba. 1990.
- [2] Diez, M. A. y Godoy, L. A., *Flujo viscoplástico incompresible de materiales con fricción y cohesión. Aplicación a problemas bi-dimensionales*, Revista Internacional de Métodos Numéricos en Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol 7 (4), 1991, págs. 417-436.
- [3] Diez, M. A. y Godoy, L. A., *Viscoplastic incompressible flow of frictional cohesive solids*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol 34, 1992, págs. 395-408.
- [4] Hinton, E. NAFEMS. Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Nafems. Inglaterra, 1992
- [5] Hinton, E. y Owen, D. R. J., Finite Elements Programming. Academic Press Inc, Londres, 1977
- [6] Hughes, T. J.R., The Finite Element Method. Prentice-Hall. Englewood Cliff, New York, 1987.
- [7] Owen, D. R. J. y Hinton, E., Finite Elements in Plasticity. Theory and Practice. Pineridge Press Limited. Swansea. Inglaterra - 1980
- [8] Perzyna. P., *Fundamental problems in viscoplasticity*, En Recent Advances in Applied Mechanics. Academic Press, Vol 9, 1966, pag: 243-377.
- [9] Reddy, J. N. The Finite Element Method, Mc Graw-Hill, New York, 1993.
- [10] Zienkiewicz. O. C. y Taylor, R. L., The Finite Element Method. Vol 2, Mc. Graw Hill. New York, 1991.

