

UNA FORMULACION PARA FLUJO INCOMPRESIBLE APLICADA
A PROBLEMAS DE CONTORNOS MOVILES

Marcela A. Cruchaga y Eugenio Oñate

*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Catalunya
Gran Capitán s/n, Módulo C1, 08034 Barcelona, España*

Antonio Huerta

*Departamento de Matemática Aplicada III
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Catalunya
Gran Capitán s/n, Módulo C2, 08034 Barcelona, España*

RESUMEN

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible se resuelven en el contexto del MEF utilizando la formulación presentada en [1, 2], que es una adaptación de la técnica desarrollada por Hughes *et al.*[3] para flujo compresible conocida como "operador generalizado de líneas de corriente". Esta nueva metodología permite el uso de polinomios interpolantes de igual orden para la descripción de las variables del problema: velocidad y presión. Además, esta formulación no necesita de parámetros adicionales elegidos por el usuario. Se incorpora también el tratamiento de superficies de separación de medios de acuerdo a la metodología presentada en [4]. Finalmente se presentan resultados numéricos que muestran un comportamiento satisfactorio de las metodologías desarrolladas.

ABSTRACT

In the context of the Finite Element Method, the Navier-Stokes equations for incompressible flow are solved using a methodology presented in [1, 2]. This technique is the adapted form of the generalized streamline operator (GSO) presented by Hughes *et al.* [3] for compressible flows. This new methodology allows the use of equal order interpolation for the unknowns of the problem: velocity and pressure. In this context, the definition of the "upwinding tensor" does not require parameters defined outside this model. Further, the interface motion problem is taken into account by means of the methodology presented in [4]. Finally, this formulation has been checked in several tests with satisfactory results.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible en el marco del método de los elementos finitos utilizando una extensión presentada en [1, 2] de la técnica conocida como "operador generalizado de líneas de corriente" (GSO) desarrollada por Hughes *et al.* [3] para flujo compresible. El problema se resuelve en sus variables primitivas, es decir, la velocidad y presión son las incógnitas del mismo. En este contexto, la novedad radica en cómo queda expresada la función de perturbación en la función de peso [1,2,3]. Esta función perturbación se define como la ecuación de flujo a resolver valorada por un "tensor de ponderación" [1,2].

La metodología del GSO aplicada al caso incompresible como se desarrolla en [1, 2] permite el uso de polinomios de interpolación de igual orden para discretizar las variables del problema

ya que involucra términos del tipo de los usados en formulaciones conocidas como "Galerkin-cuadrados mínimos" (GLS) ^{5,6,7,8]}. Gracias a este tipo de términos, además, no se necesitan técnicas de penalización en presiones para ajustar la condición de incompresibilidad. Este contexto permite también que no sea necesario el uso de factores exteriores al modelo e ingresados por el usuario desde fuera del código y a conveniencia.

En la Sección 2 se describen brevemente las ecuaciones fundamentales del problema y su forma débil, mientras que en la Sección 3 se presenta la forma en que se obtiene el "tensor de ponderación". En la Sección 4 se resumen la formulación en elementos finitos y la estrategia de resolución adoptada.

El seguimiento del frente material móvil se hace teniendo en cuenta su velocidad en cada instante de cálculo de acuerdo a un simple pero eficaz algoritmo presentado en [4]. La superficie móvil interfaz se identifica con una malla (ASM) de elementos lineales en el caso 2D y bidimensionales en el caso 3D completamente independiente de la malla de elementos finitos utilizada en el cálculo del flujo. La normal a esta superficie identifica hacia uno y otro lado los dos medios materiales presentes en el dominio. Se calcula la velocidad en los nodos que definen esta malla arbitraria de superficie (ASM) con una simple interpolación de dicho campo en el elemento finito al que previamente se identificó pertenece el nodo.

En la Sección 5 se hace una sucinta descripción de esta forma de seguimiento del frente.

Por último, en la Sección 6, se analizan problemas complejos con superficie de separación de medios con el fin de probar la capacidad de la metodología desarrollada. Los resultados correspondientes a la presente formulación se comparan con otros obtenidos por diversos autores, mostrando un muy buen ajuste cuantitativo y cualitativo con los mismos.

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES Y SU FORMA DÉBIL

Las ecuaciones fundamentales son las muy bien conocidas ecuaciones de cantidad de movimiento y de conservación de la masa en las que se considera un fluido Newtoniano y condiciones de incompresibilidad. Estas ecuaciones pueden ser escritas como un sistema de convección- difusión generalizado ^[1,2,3,10] de la forma:

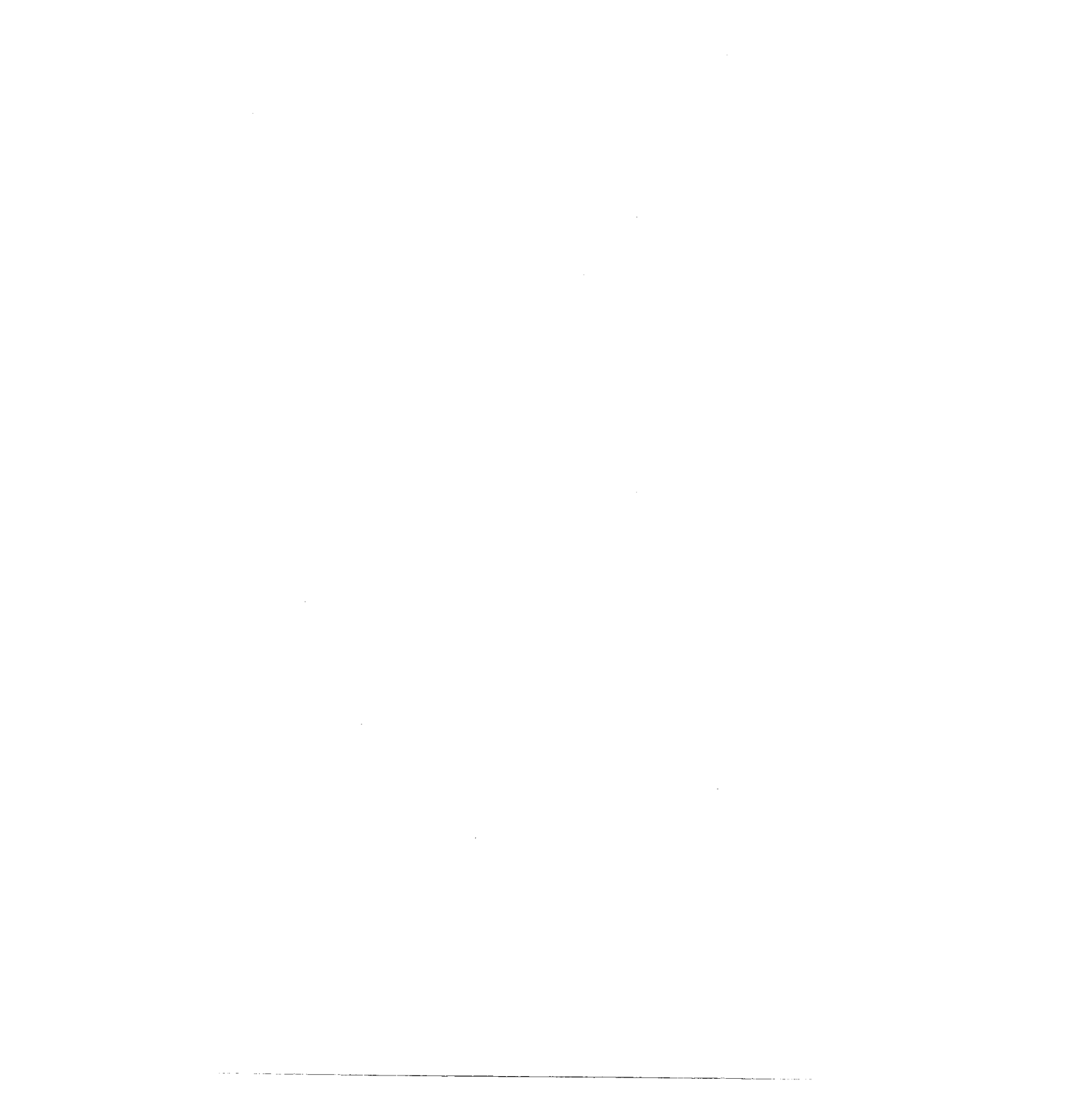
$$M \cdot \dot{U} + A : L - \nabla \cdot (K : L) = F \quad \Omega \times [0, T] \quad (1)$$

donde Ω es un dominio arbitrario con contorno Γ y $[0, T]$ es el intervalo de análisis; U es el vector de incógnitas, $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ siendo u_1, u_2, u_3 las componentes del vector velocidad y $u_4 = p$ es la presión; L es el gradiente espacial de las incógnitas definido como: $L_{mn} = \frac{\partial u_m}{\partial x_n}$; ∇ es el operador gradiente $\nabla_j(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j}$; $A = A_{im\bar{n}}$ es el tensor generalizado de convección que para un valor fijo de $n = \bar{n}$ se lo escribe como: $A_{\bar{n}} = [A_{im\bar{n}}]$; $K = K_{jim\bar{n}}$ el tensor difusión generalizado que para un valor fijo de $n = \bar{n}$ y $j = \bar{j}$ se lo escribe como: $K_{\bar{j}\bar{n}} = [K_{jim\bar{n}}]$; M es el tensor de masa generalizado y F el vector de fuerzas específicas de masa (ver definiciones de $A_{\bar{n}}, K_{\bar{j}\bar{n}}, M$ y F en [1, 2, 3, 10]) y los índices son $i = 1, \dots, n_{var}$, $m = 1, \dots, n_{var}$, $n = 1, \dots, n_{dim}$ y $j = 1, \dots, n_{dim}$ con n_{dim} la dimensión del espacio y n_{var} el número de ecuaciones a resolver (igual al número de incógnitas) que en este caso es $n_{var} = n_{dim} + 1$.

El problema formal consiste en hallar U que satisfaga el sistema (1), tal que:

$$\mathfrak{R}(U) \equiv M \cdot \dot{U} + A : L - \nabla \cdot (K : L) - F = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (2)$$

junto a condiciones de borde apropiadas ^[1,2,6,7,8].



autovectores de la matriz p_* -norma del tensor de convección generalizado (el sistema Y). Este tensor difusión se identifica como \bar{K} y se define como sigue:

$$\bar{K} = [\bar{K}_{jn}] = \bar{K}_{jimn} = Y_{iq} \hat{K}_{jqln} Y_{im}^{-1} \quad (10)$$

con $l = 1, \dots, n_{var}$.

Luego, se calcula la matriz p_* -norma de \bar{K} como:

$$|\bar{K}|_{p_*} = \left\{ \sum_j \sum_n |\bar{K}_{jn}|^{p_*} \right\}^{\frac{1}{p_*}} \quad (11)$$

y se fuerza a que $|\bar{K}|_{p_*}$ sea diagonal en el sistema Y usando una técnica convencional de diagonalización [9]. A los valores de esta diagonal se los llama λ_{k_i} .

Por último calculamos los coeficientes de "ponderación" en cada dirección de Y como:

$$\bullet \quad \tau_i = 0 \quad \text{si } \lambda_{c_i} = 0 \quad (12)$$

$$\bullet \quad \tau_i = \frac{\zeta(\alpha_i)}{\lambda_{c_i}} \quad \text{si } \lambda_{c_i} \neq 0 \text{ y } \lambda_{k_i} \neq 0 \quad (13)$$

siendo ζ la función óptima de difusividad numérica definida por [9]: $\zeta(\alpha_i) = \coth(\alpha_i) - \alpha_i^{-1}$ y α_i es el número de Péclet elemental: $\alpha_i = \frac{\lambda_{c_i}}{\lambda_{k_i}}$.

$$\bullet \quad \tau_i = \frac{1}{\lambda_{c_i}} \quad \text{si } \lambda_{c_i} \neq 0 \text{ y } \lambda_{k_i} = 0 \quad (14)$$

El "tensor de ponderación" en el sistema Y se expresa entonces como:

$$\tau_Y = \tau_{Y_{ij}} = \delta_{ik} \tau_k \delta_{kj} \quad (15)$$

donde δ es la función delta de Kronecker y el "tensor de ponderación" que se usa en ec.(3) se obtiene transformando esta última expresión al sistema original:

$$\tau = Y \cdot \tau_Y \cdot Y^{-1} \quad (16)$$

Esta metodología satisface las condiciones de diseño formuladas por Hughes *et al.* [3]. En el presente trabajo se utilizó $p_* = 1$ para el cálculo de las p_* -normas que se necesitan.

4. FORMULACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

En el contexto del método de elementos finitos [9], el dominio espacial se discretiza mediante una colección de elementos disjuntos y el campo continuo de las incógnitas U es localmente aproximado por funciones polinómicas en la manera convencional:

$$U \simeq U_h = \Phi_h \hat{U} \quad (17)$$

donde U_h es la aproximación del vector continuo de incógnitas U , \hat{U} es el vector de incógnitas nodales y Φ_h son las funciones de forma tradicionales en elementos finitos [9].

La forma variacional ec.(4) se escribe en forma semidiscreta de la forma:

$$R \equiv \int_{\Omega} \Phi_h \cdot \mathfrak{R}(U_h) d\Omega + \sum_e \int_{\Omega_e} P(\Phi_h) \cdot \mathfrak{R}(U_h) d\Omega_e + \int_{\Gamma_H} \Phi_h \cdot [(K : L(U_h)) \cdot n - H] d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \Phi_h \cdot (U_h - U^*) d\Gamma = 0 \quad (18)$$

donde Φ_h es adoptada como la forma discreta de las funciones de prueba Ψ de ec.(4) y R es el vector residuo [9].

La discretización temporal de la ec.(18) se realiza por medio de un esquema implícito de Euler [9].

Para resolver el sistema algebraico no lineal que resulta de ec.(18) se utiliza el conocido método de Newton [9] en forma incremental-iterativa. El criterio de convergencia del algoritmo se basa en la norma vectorial en L_2 del vector residuo.

5. TRATAMIENTO DE LAS SUPERFICIES MÓVILES

La superficie que separa dos medios se identifica con una malla de superficie arbitraria (ASM) [4]. Esta malla es independiente de la malla de elementos finitos fija en la que se resuelve el problema de flujo. Los dos medios a uno y otro lado de esta malla de superficie se identifican según la normal unitaria a la misma y se asignan las propiedades correspondientes a cada punto de integración según en qué lado de dicha superficie se encuentre el punto. Para obtener la nueva posición de los nodos de la ASM se utiliza un esquema de actualización Lagrangiano típico [4]:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + u_{ASM_i}^{n+1} \Delta t \quad (19)$$

en el cual Δt es el paso de tiempo, x_i^n es la posición del nodo i de la ASM en el tiempo t_n y u_{ASM_i} es la velocidad que le corresponde.

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

6.1. Movimiento de la superficie de separación de dos líquidos por efecto de la gravedad

Este problema es analizado por Tezduyar *et al.* [11]. Dos líquidos con la misma viscosidad dinámica $\mu = 0.001$ y densidades distintas iguales a 1.0 y 2.0, ocupan un tanque cerrado de 0.8×0.6 (en unidades consistentes). La posición inicial de la superficie entre ambos medios tiene una inclinación de 0.25 y una altura media de 0.3 como puede verse en la Figura 1 junto a la discretización por elementos finitos de cuatro nodos usada para resolver el problema. El medio más liviano está sobre el pesado y la gravedad es 0.294. Se realiza un análisis transitorio donde la posición inicial es la descrita y se la considera en reposo. El incremento de tiempo para el análisis es 0.5. La velocidad normal a todas las caras del tanque se prescriben nulas y las tangenciales sólo se anulan en la cara superior e inferior. La presión toma valor nulo en la esquina superior derecha. El seguimiento de la superficie libre se hace de acuerdo a la forma ya comentada [4]. En la Figura 2 se grafica la posición de la superficie de separación de medios en las caras laterales del tanque a lo largo del tiempo mostrando muy buen acuerdo con los resultados presentados por Tezduyar *et al.* [11]. Las curvas de igual presión para distintos tiempos pueden verse en la Figura 3 donde una vez más aparece la similitud con los resultados obtenidos en [11].

En la Figura 4 se muestran los resultados obtenidos con la presente metodología en comparación con los que se obtienen mediante la formulación presentada en [7, 8]. Como

puede verse, hay una mejora en el tratamiento de la condición de de incompresibilidad del sistema.

6.2. Movimiento de la superficie enter dos medios por efecto de una carga cíclica horizontal

Este problema es similar al presentado por Tezduyar *et al.*^[11] y por Huerta *et al.*^[12]. Se trata de un tanque parcialmente lleno por un fluido que está inicialmente en reposo y ocupa una sección rectangular de 2.667×1.0 de densidad $\rho_2 = 1.0$ y viscosidad $\mu_2 = 0.002$. El resto del tanque está lleno de un fluido no viscoso ($\mu_1 = 0.0$) y densidad $\rho_1 = 1.0^{-6}$ también inicialmente en reposo. Está sometido al efecto de la gravedad $G_y = -1.0$ y a una fuerza horizontal cíclica por unidad de masa $G_x = 0.01 \sin(0.978t)$. El dominio se discretiza en 2320 elementos bilineales. La geometría del problema y la malla de elementos finitos utilizada se muestran en la Figura 5. Se realiza un análisis transitorio con un paso de tiempo de 0.107 lo que significa 60 pasos por ciclo de carga. En la Figura 6 se presentan las posiciones de la superficie de separación de ambos medios en diversos tiempos durante el ciclo diez de carga. Este diagrama al igual que los presentados en [12] evidencian el "punto de encabalgadura" propio del sistema por la presencia del término convectivo y su correcta captación. En la Figura 7 se presenta la historia de la posición de los puntos de la superficie entre ambos medios en contacto con los laterales del tanque. Este resultado muestra un comportamiento muy similar a los presentados en [11] y [12].

Se realizó además un análisis espectral de la respuesta. El diagrama de densidad espectral se presenta en la Figura 8 donde se ve que la frecuencia de la salida es similar a la de la fuerza cíclica impuesta ($0.978/(2\pi)$). El diagrama no presenta otros picos por lo que no hay superposición de otras frecuencias de oscilación. Por otro lado se interpreta que la onda que puede observarse en la media del diagrama se corresponde primeramente al efecto transitorio del movimiento tendiendo luego a desaparecer lo que se corresponde a una forma estacionaria del mismo.

CONCLUSIONES

De los resultados numéricos obtenidos puede decirse que la formulación original de Hughes *et al.*^[3] adaptada para el cálculo de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles^[1,2] da resultados muy satisfactorios en las pruebas clásicas para este tipo de formulaciones. A su vez, con la inclusión de un algoritmo simple^[4] para el tratamiento de superficies de separación de medios, los ejemplos brindan resultados también favorables. Por lo tanto, la formulación propuesta puede considerarse adecuada para el tratamiento de problemas de flujo incompresible.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece a J. J. Egózcue por la ayuda prestada en el análisis espectral presentado en el segundo ejemplo.

REFERENCIAS

- [1]- Cruchaga M.A. and Oñate E. - A finite element formulation for incompressible flow problems using a generalized streamline operator. - *Enviado a Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Mayo de 1995.*
- [2]- Cruchaga M.A. and Oñate E. - A finite element formulation for incompressible flow with moving surfaces using a generalized streamline operator. - *Proceedings of Ninth International Conference on Finite elements in fluids, 1995.*

- [3]- Hughes T.J.R. and Mallet M. - A new finite element formulation for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, 305-328, 1986.
- [4]- Cruchaga M., Oñate E. and Idelsohn S. - On the pseudomaterial approach for the analysis of transient forming processes. - *Com. in Num. Meth. in Eng.*, Vol. 11, 137-148, 1995.
- [5]- Hughes T.J.R., Franca L.P. and Balestra M. - A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accomodating equal-order interpolations. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 59, 85-99, 1986.
- [6]- Hughes T.J.R., Franca L.P. and Hulbert G.M. - A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 73, 173-189, 1989.
- [7]- Cruchaga M.A. and Oñate E. - A numerical solution strategy for the incompressible Navier-Stokes equations. - *Modeling and simulation - Proceedings of the 1994 European Simulation Multiconference*, 699-703, 1994.
- [8]- Cruchaga M. A. y Oñate E. - Modelización por elementos finitos de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible mediante técnicas GLS. - *Mecánica computacional*, Vol. 14, 255-267, 1994. Ed. AMCA, Santa Fe, Argentina.
- [9]- Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. - The Finite Element Method - *Mc. Graw-Hill Book Company. Fourth edition.*
- [10]- Hughes T.J.R., Franca L.P. and Mallet M. - A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 54, 223-234, 1986.
- [11]- Tezduyar T.E., Behr M. and Liou J. - A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - The deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 94, 339-351, 1992.
- [12]- Huerta A. and Liu W. K. - Viscous flow with large free surface motion. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 69, 277-324, 1988.

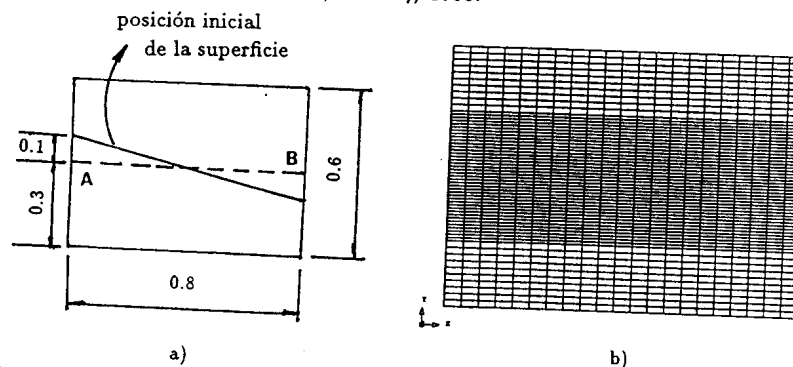


Figura 1: Movimiento de la superficie de separación de dos medios por efectos de la gravedad
- a) Geometría; b) Malla de elementos finitos.

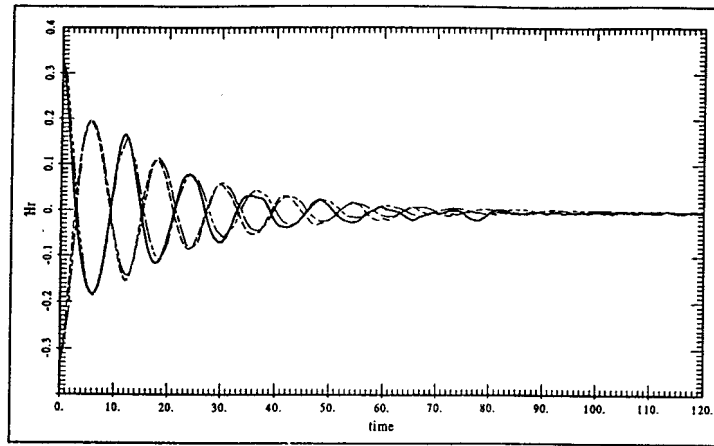


Figura 2: Movimiento de la superficie de separación de dos medios por efectos de la gravedad
 - Historia de la superficie en los lados A y B del tanque. Lado A: - - - - - Tezduyar *et al.*^[11]; — Este trabajo. Lado B: - - - - - Tezduyar *et al.*^[11]; - - - - - Este trabajo. ($H_r = (\text{altura de la ola} - 0.3)/0.3$).

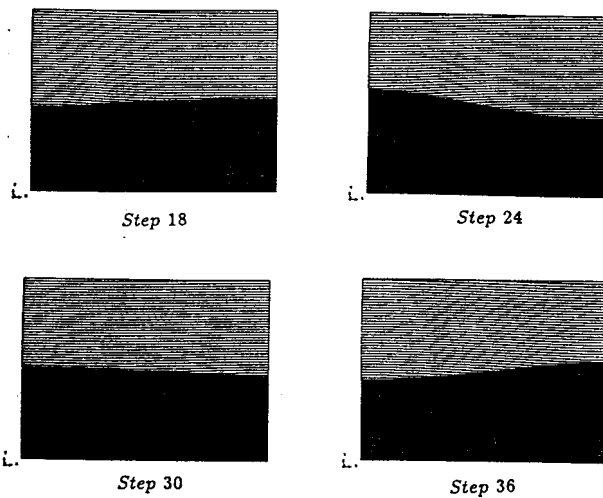


Figura 3: Movimiento de la superficie de separación de dos medios por efectos de la gravedad
 - Contorno de presiones.

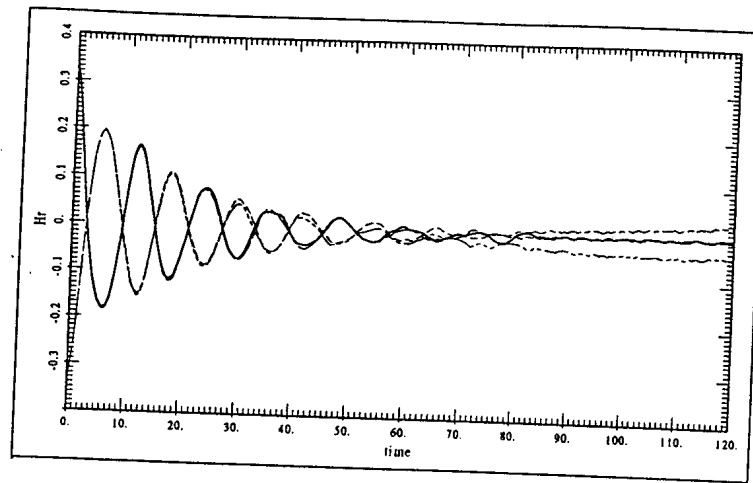


Figura 4: Movimiento de la superficie de separación de dos medios por efectos de la gravedad - Historia de la superficie en los lados A y B del tanque. Lado A: — Este trabajo; - - - Cruchaga y Oñate [7,8]. Lado B: - - - Este trabajo; - - - - Cruchaga y Oñate [7,8]. ($H_r = (\text{altura de la ola} - 0.3)/0.3$).

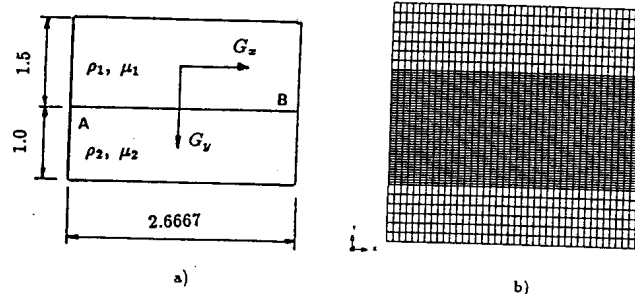


Figura 5: Movimiento de la superficie de separación de dos medios por efectos de una carga específica horizontal cíclica - a) Geometría; b) Malla de elementos finitos.

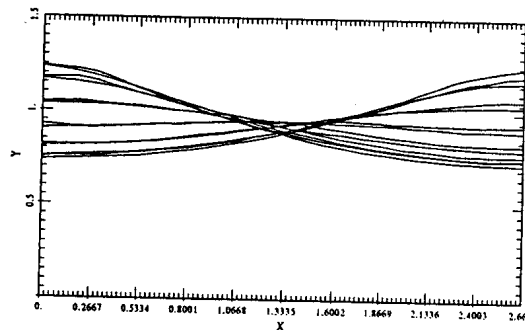


Figura 6: Movimiento de la superficie de separación de dos medios por efectos de una carga específica horizontal cíclica - Posición de la superficie en distintos tiempos del ciclo diez de carga.

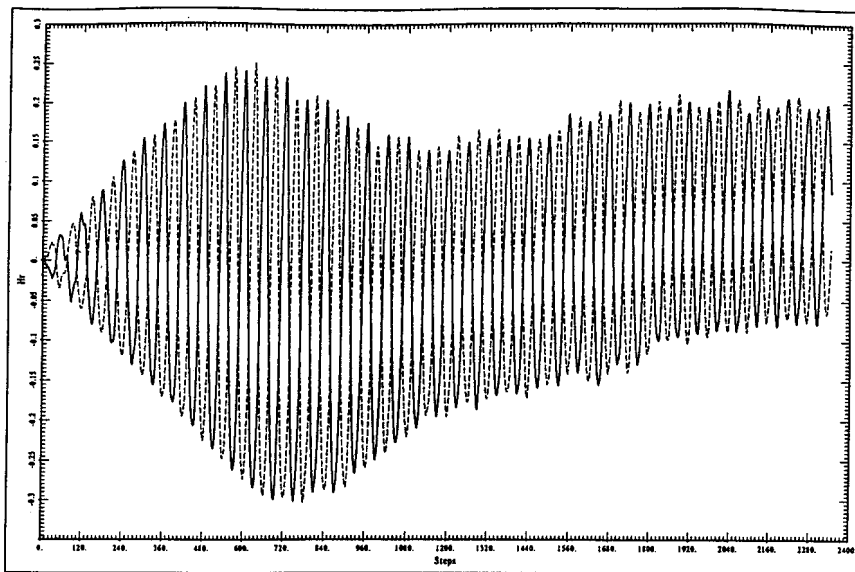


Figura 7: Movimiento de la superficie de separación de dos medios por efectos de una carga específica horizontal cíclica - Historia de la superficie en los lados A y B del tanque obtenidos en este trabajo. Lado A: — . Lado B: - - - - .
 $(H_r = (\text{altura de la ola} - 1.0)/1.0)$.

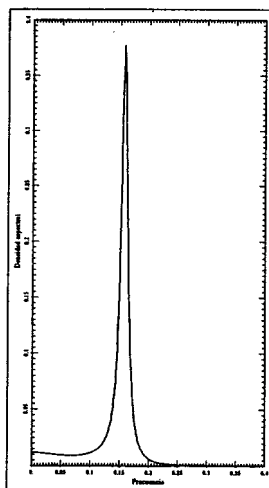


Figura 8: Movimiento de la superficie de separación de dos medios por efectos de una carga específica horizontal cíclica - Análisis espectral.