

**FLUJO TUBULAR NO PERMANENTE
POR PRESENCIA DE TRENES DE ONDAS DE PRESION**

Ricardo A. Prado, Ariel R. Marchegiani
Departamento de Mecánica Aplicada
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional del Comahue
calle Buenos Aires No.1400 - (8300) Neuquén - Argentina

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objetivo establecer, para el caso de un flujo laminar en tuberías rígidas, el tipo de dependencia entre gradientes de presión oscilantes que guardan semejanza con los observados experimentalmente en los denominados problemas de golpe de ariete, y las resultantes distribuciones radiales de velocidades axiales, velocidades medias y tensiones de corte sobre las paredes internas de las tuberías. Para la resolución numérica del problema se propone un modelo de diferencias finitas para la ecuación de continuidad, las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de estado que representa los efectos de compresibilidad del fluido circulante sometido a intensas fluctuaciones de la presión. Se desarrolla entonces un esquema implícito, resultando un sistema de ecuaciones triagonal linealizado, el cual es resuelto para un ejemplo mediante la aplicación del algoritmo de Thomas.

ABSTRACT

The aim of the present work is to establish, for a laminar flow in rigid pipes, the kind of dependence between the oscillating pressure gradients that are similar to those observed in waterhammer problems, and the resultant axial velocity distributions, mean velocities and shear stresses at the inner wall of the pipes. The proposed numerical solution is based on a finite difference model for the continuity, Navier-Stokes and state equations in order to consider the compressibility effects on the fluid due to the intense pressure fluctuations. An implicit scheme is developed, resulting in a triagonal system of linear equations that is solved for an example applying the Thomas algorithm.

INTRODUCCION

Tal como es enunciado por Siginer [1], flujos dependientes del tiempo debido a gradientes de presiones oscilantes alrededor de una media no nula son de frecuente aparición en problemas de fluidodinámica. Particularmente, una de dichas aplicaciones se refiere a los denominados problemas de golpe de ariete en tuberías que conducen líquidos, fenómenos donde los efectos de compresibilidad se ponen de manifiesto por la acción de ondas de presión que se propagan en el seno del fluido y donde la fricción y la elasticidad imperfecta del fluido y la deformación de las paredes de la tubería causan la distorsión de dichas ondas de presión y el amortiguamiento de las oscilaciones, hasta alcanzar el completo detenimiento del flujo [2,3]. Por lo expuesto, las variaciones de la presión y de las tensiones de corte en el fluido resultan acopladas, dado que las primeras afectan la forma de los perfiles de velocidades, los cuales determinan la distribución de las tensiones de corte, cuyo efecto es, a su vez, el de amortiguar las variaciones de la presión. Debido a las complejidades en el tratamiento de problemas que introduce este acoplamiento, es común la consideración de la fricción bajo condiciones estacionarias, suponiéndose que los factores de fricción son los mismos para los flujos a régimen permanente y no permanente [3].

El presente trabajo tiene por objetivo establecer el tipo de dependencia entre gradientes de presión fluctuantes y las resultantes distribuciones de velocidades y tensiones de corte sobre las paredes de tuberías para el caso de un flujo tubular en régimen laminar de un fluido newtoniano, con el fin de poner de relieve la importancia de considerar los efectos no estacionarios de la fricción. Para alcanzar esta finalidad, se propone y desarrolla un modelo numérico para determinación de la distribución axial de velocidades para el flujo laminar no estacionario de un fluido newtoniano en tuberías circulares rígidas de radio constante. Dicha distribución de velocidades es generada por la presencia de presiones oscilantes y exponencialmente decrecientes, representados por trenes de ondas de amplitudes preestablecidas, las cuales se propagan a lo largo de una tubería recta. Estas particulares distribuciones no estacionarias de presión en el seno del fluido circulante guardan semejanza con las distribuciones observadas experimentalmente en los problemas de golpe de ariete. Una vez conocida la distribución no estacionaria de velocidades sobre la sección transversal de la tubería, se pueden determinar las variaciones temporales de la tensión cortante sobre la pared interior de la tubería mediante la aplicación de la ley de Newton de la viscosidad, así como la velocidad media, para una estación fija a lo largo de la cañería, estableciendo dichas variaciones temporales hasta la atenuación de las ondas de presión y la consecuente recuperación de la condición hidrostática.

FORMULACION ANALITICA

La resolución de este problema implica la resolución simultánea de la ecuación de continuidad, las ecuaciones de Navier-Stokes para la conservación de la cantidad de movimiento y la ecuación de estado que representa los efectos de compresibilidad del fluido circulante sometido a intensas fluctuaciones de la presión. En la Figura 1 se representa la nomenclatura de los ejes en un sistema cilíndrico de coordenadas, con la coordenada radial r y la axial z . Por simetría, el flujo resulta independiente de la coordenada angular θ , resultando por igual razón nula la componente tangencial de la velocidad del fluido.

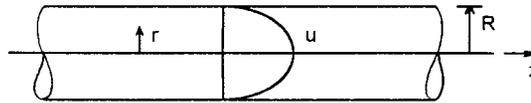


Figura 1

Como en este problema se estima que la tubería es rígida, las ondas de presión se propagan a una velocidad solamente proporcional al coeficiente de compresibilidad del fluido. Dado que en los problemas de golpe de ariete las variaciones según la dirección axial de la tubería son mucho mayores que las correspondientes en direcciones radiales [4], se considera la igualdad de la presión sobre cualquier sección transversal de la misma, despreciándose entonces toda posible variación de la presión según la coordenada radial, así como la presencia de las componentes radiales del flujo. Consecuentemente, el campo de velocidades está definido solamente por la distribución de velocidades axiales, u , como una función de la posición y del tiempo.

Se asume que la solución, u , para $t > \tau$, tiene la forma dada por la superposición de dos funciones

$$u(r, z, t) = u_1(r, z, t) + u_2(r) \quad (1)$$

donde $u_2(r)$ representa la solución de régimen permanente antes de la aparición del tren de ondas en el instante τ y $u_1(r, z, t)$ representa la desviación a partir de dicho estado estacionario. Consecuentemente, se verifican las siguientes expresiones

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z}$$

Por su parte, la solución de régimen permanente, conocida como flujo de Hagen-Poiseuille [5], verifica

$$u_2(r) = -\frac{1}{4\mu} \eta (R^2 - r^2) \quad (3)$$

donde η representa al gradiente de presiones constante del régimen permanente ($t \leq \tau$), μ la viscosidad absoluta del fluido circulante y R denota al radio interior de la tubería de sección circular. Dado que el movimiento finaliza deteniéndose al recuperarse la condición hidrostática, debe resultar

$$u(r, z, \infty) = 0 \quad (4)$$

y por ende

$$u_1(r, z, \infty) = -u_2(r) \quad (5)$$

La ecuación de continuidad, expresada en coordenadas cilíndricas, para el flujo axial y no estacionario de un fluido compresible [6], verifica

$$\rho \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

donde ρ representa la densidad del fluido, la cual puede variar temporalmente y espacialmente. Entonces, admitiendo una solución de la forma dada por (1), resulta

$$\rho \frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial z} + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] = 0 \quad (7)$$

Dado que se debe verificar asimismo la solución de régimen permanente,

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

resulta

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial z} + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] = 0 \quad (9)$$

Para un fluido compresible, se tiene [4]

$$d\rho = \frac{\rho}{K} dp \quad (10)$$

donde K representa coeficiente de compresibilidad del fluido. Entonces, introduciendo la expresión (10) en la (9), resulta

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{K} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial p}{\partial z} \right] \quad (11)$$

Derivando la ecuación (11) parcialmente respecto de z ,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = -\frac{1}{K} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + (u_1 + u_2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] \quad (12)$$

y reemplazando (11) en (12),

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = -\frac{1}{K} \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} - \frac{1}{K} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial p}{\partial z} \right] \frac{\partial p}{\partial z} + (u_1 + u_2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right\} \quad (13)$$

La conservación de la cantidad de movimiento axial, en coordenadas cilíndricas, se expresa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

para el flujo laminar de un fluido newtoniano de viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$, dentro de una tubería horizontal [6]. Mediante la introducción en la expresión (14) de la solución (1) con las condiciones (2), dicha ecuación resulta expandida a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right] \quad (15)$$

Dado que en el régimen permanente previo a la aparición del tren de ondas

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \quad (t \leq \tau) \quad (16)$$

y la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento axial bajo condiciones estacionarias se reduce a

$$0 = -\frac{1}{\rho} \eta + \nu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} \right] \quad (17)$$

la ecuación (15) resulta simplificada a la siguiente ecuación para la desviación de la velocidad

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \eta \right) + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right] \quad (18)$$

dado que también debe verificar la ecuación para régimen permanente. Así,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} - \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right] - \nu \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right] + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \eta \right) = 0 \quad (19)$$

Introduciendo en (19) las expresiones de las derivadas parciales (11) y (12), se obtiene la ecuación diferencial para la desviación de velocidad, u_1 , para cada estación axial z , como una función de la variable temporal, t , y de la coordenada radial, r , cuando se conocen las expresiones funcionales de las derivadas temporal y espaciales de la distribución de presiones,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial t} - (u_1 + u_2) \left\{ \frac{1}{K} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial p}{\partial z} \right] \right\} - \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right] + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \eta \right) + \\ & + \nu \left\{ \frac{1}{K} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} + \left\{ \frac{1}{K} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u_1 + u_2) \frac{\partial p}{\partial z} \right] \right\} \frac{\partial p}{\partial z} - (u_1 + u_2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Las condición de frontera a ser verificada por (20), es

$$u(R, z, t) = u_1(R, z, t) + u_2(R) = 0 \quad (21)$$

dado que, por condición de no deslizamiento del fluido sobre la pared interna de la tubería, el fluido debe estar detenido sobre dicho contorno. Como

$$u_2(R) = 0 \quad (22)$$

entonces

$$u_1(R, z, t) = 0 \quad (23)$$

Además, dado que hasta $t = \tau$ la solución corresponde a la de régimen permanente únicamente, la condición inicial a imponer resulta,

$$u(r, z, \tau) = u_1(r, z, \tau) + u_2(r) = u_2(r) \quad (24)$$

o sea

$$u_1(r, z, \tau) = 0 \quad (25)$$

dado que la perturbación por la presencia del tren de ondas se observa para $t > \tau$.

En presencia del tren de ondas de presión, para $t > \tau$, la distribución de presiones, asumida constante sobre la sección, es dada por la expresión (26), la cual representa una onda sinusoidal que se mueve tanto hacia la izquierda como hacia la derecha, sufriendo una atenuación de tipo exponencial si el coeficiente a es positivo. Se intenta ajustar dicha expresión a las distribuciones observadas experimentalmente, tales como las presentadas en [7].

$$p(z, t > \tau) = p_0 + \Delta p \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} [z \pm c(t - t_0)] \right\} e^{-at} \quad (26)$$

donde

- λ longitud de onda
- c velocidad de propagación de la onda de presión, $c = (K/\rho)^{1/2}$
- Δp amplitud inicial de la onda de presión
- p_0 presión para la condición hidrostática

Definiendo $w = 2\pi/\lambda$, resultan, a partir de la ecuación (26), las siguientes expresiones para las derivadas parciales de la distribuciones de presión, para una onda que se mueve hacia la izquierda,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = (\Delta p w e^{-at}) \cos \{w[z - c(t - t_0)]\} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -(\Delta p w^2 e^{-at}) \operatorname{sen} \{w[z - c(t - t_0)]\} \quad (28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\Delta p \{wc \cos \{w[z - c(t - t_0)]\} + a \operatorname{sen} \{w[z - c(t - t_0)]\}\} e^{-at} \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} = \Delta p \{w^2 c \operatorname{sen} \{w[z - c(t - t_0)]\} - a w \cos \{w[z - c(t - t_0)]\}\} e^{-at} \quad (30)$$

expresiones que deben incluirse en la ecuación diferencial (20).

FORMULACION NUMERICA

La ecuación diferencial no lineal y de segundo orden (20) es formulada mediante una expresión en diferencias finitas con el fin de ser evaluada numéricamente. En el siguiente análisis, se consideran intervalos temporales, Δt , constantes, al igual que los intervalos radiales, Δr . El supraíndice $(t+1)$ denota un incremento Δt al tiempo genérico t , mientras que los subíndices $r-1$ y $r+1$ representan las posiciones radiales anterior y posterior, respectivamente, de dos puntos separados por una distancia Δr a cada lado de una posición radial genérica r .

Considerando diferencias finitas centrales para las derivadas espaciales y adelantada para la derivada temporal, las cuales se indican con los correspondientes órdenes de magnitud de los errores de truncamiento, resultan las siguientes expresiones para las derivadas de la desviación de velocidad,

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (u_{1r}^{t+1} - u_{1r}^t) \quad \varepsilon = O\{\Delta t\} \quad (31)$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial r} \approx \frac{1}{2\Delta r} (u_{1r+1}^{t+1} - u_{1r-1}^{t+1}) \quad \varepsilon = O\{(\Delta r)^2\} \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial r^2} \approx \frac{1}{(\Delta r)^2} (u_{1r+1}^{t+1} - 2u_{1r}^{t+1} + u_{1r-1}^{t+1}) \quad \varepsilon = O\{(\Delta r)^2\} \quad (33)$$

donde las velocidades en las expresiones para las derivadas espaciales son evaluadas en $(t+1)$. Evaluando también para el tiempo $(t+1)$ los términos lineales de la desviación de la velocidad

$$u_1 \approx u_{1r}^{t+1} \quad (34)$$

y aproximando la expresión cuadrática de u_1 como el producto de las desviaciones de velocidad en los tiempos t y $(t+1)$

$$u_1^2 \approx u_{1r}^{t+1} \cdot u_{1r}^t \quad (35)$$

se arriba a un esquema implícito, resultando un sistema lineal de la forma

$$\{A\} u_{1r+1}^{t+1} + \{B\} u_{1r}^{t+1} + \{C\} u_{1r-1}^{t+1} = \{D\} \quad (36)$$

siendo

$$\begin{aligned} \{A\} &= -\frac{\nu}{\Delta r} \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{1}{2r} \right) \\ \{B\} &= \frac{1}{K} \left\{ \frac{K}{\Delta t} - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial z} (u_{1r}^t + 2u_{2r}^t) \right\} + \nu \left[\frac{2K}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] \\ \{C\} &= -\frac{\nu}{\Delta r} \left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{1}{2r} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\{D\} = \frac{u_{1r}^t}{\Delta t} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \eta \right) + \frac{\nu}{K} \left\{ \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} + u_{2r}^t \left[\frac{1}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u_{2r}^t}{\nu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] \right\}$$

donde las derivadas parciales de la presión evaluadas también en el tiempo $(t+1)$, para una determinada posición axial z . El resultante sistema tridiagonal de ecuaciones lineales (36) se resuelve mediante la aplicación del algoritmo de Thomas, el cual es descrito en [8].

Calculada la distribución de $u_1(r,z,t)$, y consecuentemente, conocida $u(r,z,t)$ para una estación z genérica, la velocidad media resulta de la siguiente integración, la cual es evaluada numéricamente

$$\bar{U}(z,t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r,z,t) r dr \quad (38)$$

La distribución de la tensión de corte verifica la ley de Newton de la viscosidad, ya que esta última se ajusta a los resultados experimentales para el caso de fluidos newtonianos. En particular, la tensión cortante sobre la pared, τ_w , resulta

$$\tau_w(z,t) = \mu \frac{\partial u}{\partial r}(R,z,t) \quad (39)$$

La derivada parcial de (39) es evaluada mediante diferencias atrasadas, y entonces, por (22) y (23)

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,z,t) \approx \frac{1}{\Delta r} (u_{R-\Delta r}^t - u_R^t) = \frac{(u_{1R-\Delta r}^t + u_{2R-\Delta r}^t)_z}{\Delta r} \quad (40)$$

desarrollo que presenta un error de truncamiento del orden de Δr .

EJEMPLO

Para el siguiente ejemplo se define una tubería recta de radio $R = 0,02$ m, por la cual circula agua a 15 C, siendo la estación de estudio determinada por $z = 0$. El estudio se ha realizado para intervalos constantes según radio, $\Delta r = 80 \mu\text{m}$, e intervalos temporales $\Delta t = 0,005$ s, también constantes.

La Figura 2 representa la variación temporal de presiones para una coordenada z fija, considerando una representación semejante a la presentada en [7] de manera de verificar los valores de máxima amplitud y decrecimiento logarítmico presentados en [4] para un problema de golpe de ariete en régimen laminar. Se ha establecido una variación de presiones de período $T = 4$ s, siendo $\Delta p = 80$ kPa, $p_0 = 4$ kPa y $a = 0,075 \text{ s}^{-1}$, para la estación $z = 0$.

Por otra parte, la Figura 3 representa la variación temporal de las tensiones de corte sobre la pared interior de la tubería, τ_w , adimensionalizada con la correspondiente tensión para régimen permanente, τ_{w0} , dada por

$$\tau_{w0} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial r}(R) = 2\mu \frac{U_0}{R} = 4\mu \frac{\bar{U}_0}{R} = -\frac{R\eta}{2} \quad (41)$$

donde

U_0 : máxima velocidad para el perfil de velocidades en régimen permanente
 \bar{U}_0 : velocidad media correspondiente al régimen permanente

siendo

$$U_0 = -\frac{R^2 \eta}{4\mu} = 2\bar{U}_0 \quad (42)$$

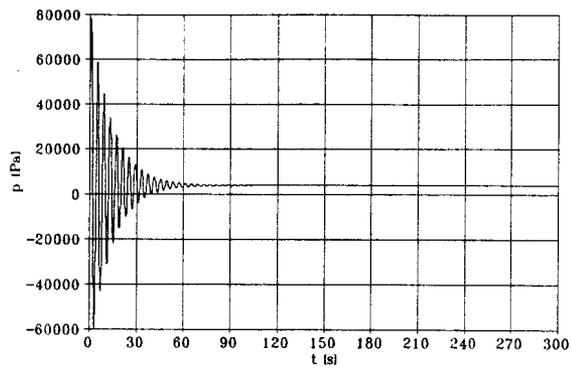


Figura 2

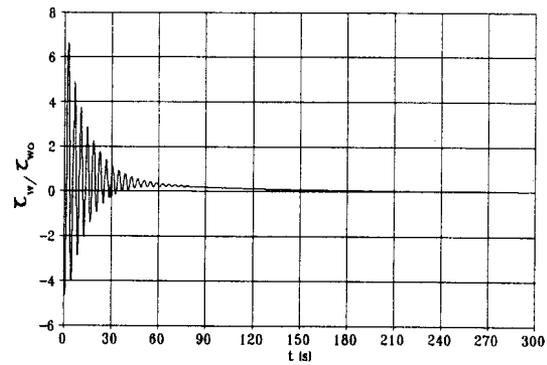


Figura 3

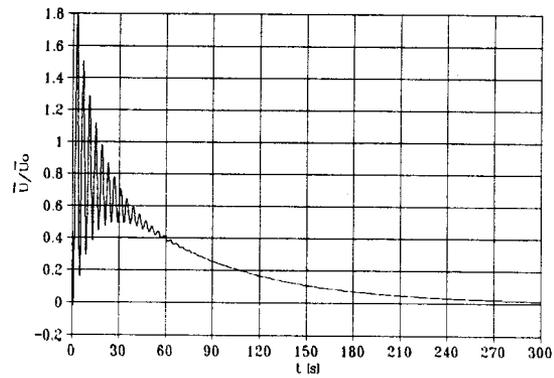


Figura 4

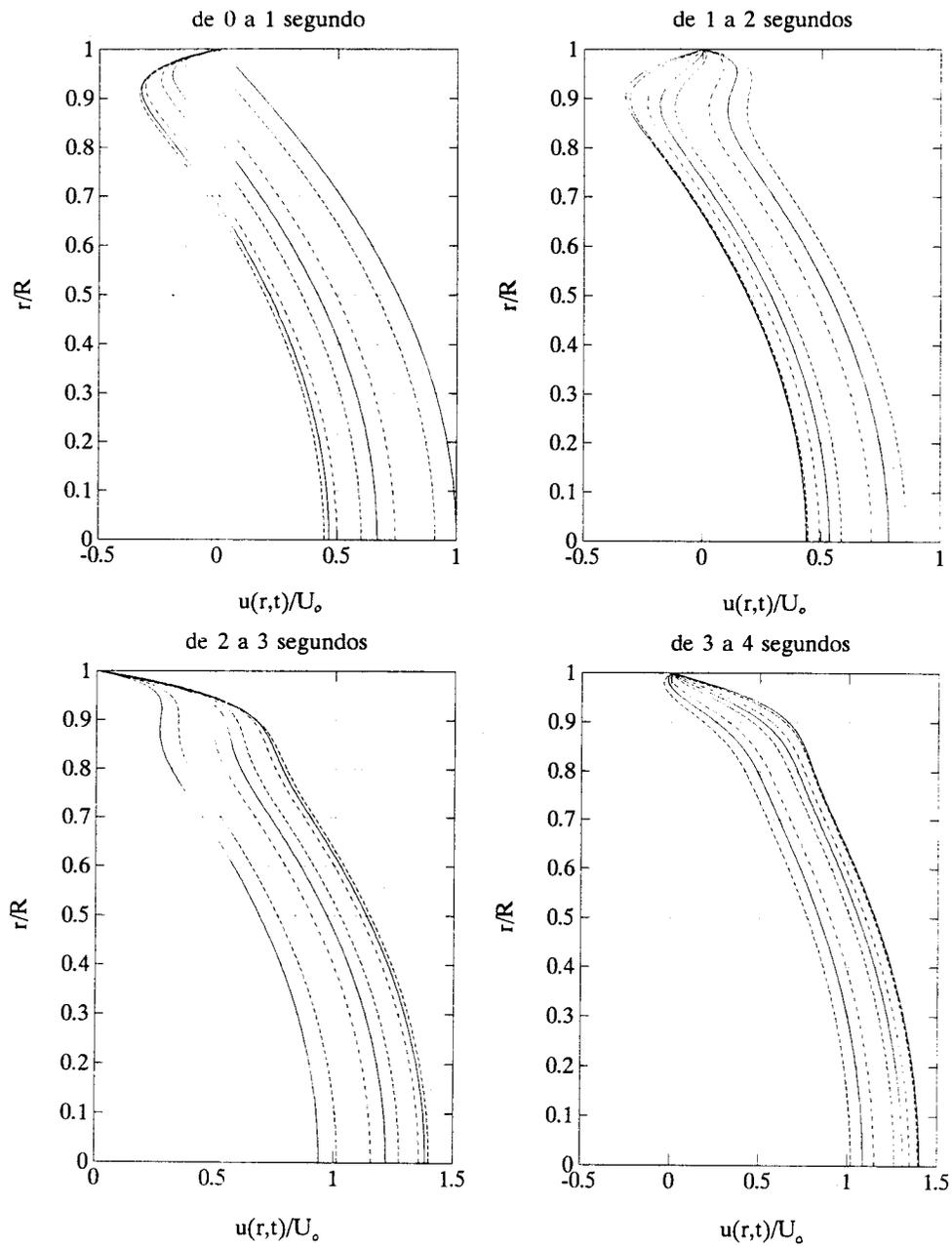


Figura 5

En las Figuras 4 y 5 se representan, respectivamente, la variación temporal de velocidades medias y las distribuciones espacio-temporales de velocidades axiales, para una sección fija de tubería. En el primer caso, las velocidades medias resultan adimensionalizadas con la velocidad media de régimen permanente, U_0 , mientras que para las distribuciones de la Figura 5, las mismas resultan adimensionalizadas con la máxima velocidad de régimen permanente, es decir con la velocidad en el centro de la tubería para el flujo de Hagen-Poiseuille, U_0 .

De las Figuras 2 a 4 se puede observar que, si bien la presión alcanza su condición hidrostática para $t = 100$ s, aproximadamente, la condición de reposo del fluido todavía no se ha alcanzado todavía a los 300 s. Además, las tensiones de corte sobre la pared no se encuentran en fase con las presiones. La sucesión de la Figura 5, muestra las distribuciones adimensionales de velocidades en la estación de estudio, para la primera oscilación completa de la presión. Se observa el denominado efecto Richardson, indicando un desfase de las capas de fluido próximas a la pared de la tubería. Con el decrecimiento de las amplitudes de las ondas de presión, las variaciones de velocidad también decrecen y el efecto Richardson se hace menos perceptible, observándose principalmente la reducción continua de velocidades hasta la condición final de reposo.

CONCLUSIONES

Debido al acoplamiento entre las distribuciones de presiones y de tensiones de corte, el presente análisis debe ser llevado a cabo simultáneamente con la resolución de las ecuaciones diferenciales para resolver los problemas de golpe de ariete [3], ya que estas últimas consideran solamente las variaciones de presiones y de velocidades *medias* del flujo en una tubería, asumiendo un determinado comportamiento de las tensiones de corte sobre la pared. Dado que la distribución de velocidades medias debe verificar la ecuación de continuidad, el modelo propuesto para la distribución de tensiones de corte termina definiendo al comportamiento de las oscilaciones de presión.

Sin embargo, como las fluctuaciones de las tensiones de corte resultan a su vez influidas por la configuración e intensidades de los trenes de ondas de presión, las ecuaciones diferenciales para la determinación de los perfiles de velocidades deben resolverse conjuntamente con las correspondientes al equilibrio de fuerzas (conservación de cantidad de movimiento axial) para un diferencial de volumen de fluido íntegramente contenido dentro de la tubería, $dV = \pi R^2 dz$, verificando en cada paso que la presión de "entrada" para el cálculo de las tensiones de corte sobre la pared y de las velocidades medias, sea la misma que pone en equilibrio al elemento de volumen antes mencionado, cuando en el mismo se incluyen ahora los valores "corregidos" de las tensiones de corte y de las velocidades medias, obtenidos a partir de la resolución de la ecuación diferencial (20).

REFERENCIAS

- [1] Siginer, A., "Oscillating flow of a simple fluid in a pipe". Int. J. Engng. Sci., Vol.29, No.12, pp.1557-1567, 1991.
- [2] Zielke, W., "Frequency-Dependent Friction in Transient Pipe Flow", J. Basic Engng., Trans. ASME, 90, pp.109-115, 1968.
- [3] Streeter, V.L. y Wylie, E.B., "Mecánica de los fluidos", 3a. edición en español, McGraw-Hill, 1994.
- [4] Vardy, A.E. & Hwang, K.L., "A characteristics model of transient friction in pipes". Journal of Hydraulic Research, Vol.29, No.5, pp.669-684, 1991.
- [5] White, F.M., "Viscous Fluid Flow". Second Edition, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [6] Bird, R.B., Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N., "Fenómenos de transporte". Editorial Reverté, S.A., 1976.
- [7] Jönsson, L., "Anomalous pressure transients in sewage lines", Unsteady Flow and Fluid Transients, Bettess & Watts (eds.), A.A.Balkema Publishers, Rotterdam, 1992.
- [8] Anderson, D.A.; Tannehill, J.C. & Pletcher, R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer". Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company, 1984.