

## ALGORITMOS NUMERICOS PARA INTEGRAR EL PROBLEMA ELASTOPLASTICO CON GRANDES DEFORMACIONES

C. García Garino

Instituto Tecnológico Universitario, Universidad Nacional de Cuyo  
Centro Universitario, Parque Gral. San Martín, 5500, Mendoza, Argentina

### RESUMEN

Este trabajo presenta los algoritmos más utilizados en la literatura para integrar ecuaciones constitutivas elastoplásticas con efectos de grandes deformaciones. En el mismo se presentan los modelos elastoplásticos basados en dos conceptos diferentes de elasticidad: *hiperelasticidad* e *hipoelasticidad*, que en la bibliografía han dado a lugar, quizá confusamente, a dos grandes grupos de modelos elastoplásticos: los clásicos, denominados hipoelásticos, y otros más modernos llamados hiperelásticos. En el trabajo se presentan las bases teóricas, y se discuten los algoritmos numéricos más utilizados en la práctica computacional.

### ABSTRACT

In this work the more widely numerical schemes used in order to integrate the large strain elastoplastic problems are presented. In the paper two type of models based are described. These ones are based on two different ideas of elasticity: *hyperelasticity* and *hypoelasticity*, and from these concepts in the literature two kind of models are usually discussed: The classical ones, named hypoelastic models, and the more recent ones called hyperelastic. In the paper the theoretical basis as well as the corresponding numerical algorithms are discussed.

### INTRODUCCION

Este trabajo presenta un panorama acerca de los algoritmos utilizados habitualmente en la solución de los problemas elastoplásticos con grandes deformaciones.

En la práctica computacional pueden distinguirse dos tipos de modelos elastoplásticos con grandes deformaciones: Los clásicos que calculan la respuesta elástica basados en la idea de *hipoelasticidad* [1], y otros más modernos para los cuales las tensiones se obtienen a partir de un potencial *hiperelástico* [2-4]. En lo que sigue del resumen se los denomina simplemente modelos *hipoelásticos* e *hiperelásticos* respectivamente, aunque debe tenerse en cuenta que se esta hablando de ecuaciones constitutivas capaces de tratar problemas de plasticidad con grandes deformaciones.

Los modelos hipoelásticos, ampliamente utilizados en la práctica computacional, calculan las tensiones en la configuración deformada mediante la integración de una ecuación constitutiva que relaciona una derivada objetiva del tensor de tensiones de Cauchy con el tensor velocidad de deformación. Como es posible utilizar distintas derivadas objetivas, en la práctica se han propuesto diferentes variantes que a su vez conducen a esquemas numéricos distintos.

La mayor dificultad asociada a esta clase de algoritmos es la necesidad de integrar la ecuación constitutiva en presencia de cambios en la geometría, y por ello se deben satisfacer el Principio de Objetividad así como su contraparte numérica denominada Objetividad Incremental.

Por su parte los modelos basados en la idea de hiperelasticidad son muy sencillos en lo que se refiere a la respuesta elástica ya que las tensiones totales se calculan a partir de deformaciones totales mediante la evaluación de una expresión analítica. La dificultad en este caso surge de la necesidad de acoplar un modelo elástico secante con una ley constitutiva plástica que se basa en tasas o derivadas objetivas de los tensores de deformación.

En los últimos años se han realizado avances teóricos y numéricos considerables, y hoy puede establecerse un contexto de trabajo que engloba a los dos tipos de modelos mencionados. Este trabajo resume y compara los algoritmos más representativos, y sugiere ventajas de unos y otros con vista a su empleo en códigos explícitos e implícitos.

Puede adelantarse que, en general, la respuesta obtenida mediante los dos caminos es prácticamente la misma, y la discusión se resume a las ventajas computacionales: tiempo de máquina, almacenamiento necesario, etc, así como a los aspectos teóricos: verificación de la noción clásica, en el sentido de la termodinámica, de la elasticidad, cumplimiento de la objetividad y de la objetividad incremental, etc.

### MODELOS HIPOELASTICOS

Este tipo de modelo, que a continuación se denominarán *Hipoelásticos*, se basan las siguientes hipótesis:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{d}^e \quad (1)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (2)$$

$$\mathbf{d}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3)$$

donde  $\dot{\sigma}$  es una derivada objetiva del tensor de tensiones de Cauchy,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}^e$  and  $\mathbf{d}^p$  denotan el tensor velocidad de deformación y sus componentes elástica y plástica respectivamente. El tensor Constitutivo de cuarto orden  $\mathbf{C}$  se adopta, en este contexto, constante e igual al de la elasticidad infinitesimal:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4)$$

En la configuración deformada la derivada material del tensor de tensiones de Cauchy  $\dot{\sigma}$ , no se transforma como un tensor en presencia de movimientos de sólido rígido. Luego debe utilizarse una derivada *objetiva* del tensor de tensiones de Cauchy en la ecuación constitutiva. Este tipo de derivadas, conocidos como *stress rates*, se escriben en función de un tensor de transformación genérico  $\boldsymbol{\pi}$  según:

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \dot{\sigma} - \boldsymbol{\pi} \sigma + \sigma \boldsymbol{\pi} \quad (5)$$

donde el término  $\dot{\tilde{\sigma}}$  tiene en cuenta la derivada material y los términos de transporte  $\boldsymbol{\pi} \sigma + \sigma \boldsymbol{\pi}$ , deben incluirse con el fin de satisfacer el Principio de Objetividad [5].

El Principio de Objetividad se satisface clásicamente imponiendo invariancia frente a rotaciones y de este hecho proviene el nombre de *derivadas corrotacionales*. Luego parece natural emplear el tensor velocidad de rotación  $\boldsymbol{w}$  [5] o el tensor rotación  $\mathbf{R}$  para modelar los términos de transporte. El tensor rotación  $\mathbf{R}$  se calcula a partir de la descomposición polar del tensor gradiente de la deformación  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$  [5], donde  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$  indican los tensores de estiramiento derecho e izquierdo respectivamente.

Otra parte, los términos de transporte también pueden escribirse en función del tensor gradiente de la velocidad  $\mathbf{l} = \nabla_x v$ . En este caso se satisface Objetividad en un sentido mucho más fuerte, conocido como *invariancia espacial* [6].

Las derivadas objetivas empleadas con más frecuencia en Mecánica Computacional son las derivadas de Gurtin  $\overset{\nabla}{\sigma}$  [7], la derivada de Truesdell  $\overset{\circ}{\sigma}$  [8], o la derivada de Green-Naghdi  $\overset{\nabla}{\sigma}$  [9], que se definen respectivamente como:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - \boldsymbol{w} \sigma + \sigma \boldsymbol{w} \quad (6)$$

$$\overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} - l\sigma + \sigma l + trl\sigma \quad (7)$$

$$\dot{\sigma} = \overset{\circ}{\sigma} - \omega\sigma + \sigma\omega = r\dot{\Sigma}r^T \quad (8)$$

donde  $\omega = \dot{r}r^T$  y  $\Sigma = r^T\dot{\sigma}r$  se conoce como el tensor de tensiones no rotado.

El lector debe observar que si el tensor constitutivo  $C$  se mantiene constante en la ec. (1), las derivadas definidas en las ecuaciones (6-8) caracterizan, en general, materiales diferentes [10]. La respuesta constitutiva puede ajustarse con el fin de unificar los resultados, y con este propósito el tensor de cuarto orden tiene que modificarse convenientemente, para lo cual se agregan términos que dependen de las tensiones [10]. Para problemas elásticos, en los cuales las tensiones no están acotadas, los términos de corrección resultan importantes, pero en el caso elastoplástico las diferencias pueden despreciarse porque las tensiones deben pertenecer al convexo elástico, que en los casos usuales es de magnitud mucho más pequeña que las constantes del material.

Es interesante destacar que la ley constitutiva definida por las ecuaciones (1-3), parten de una idea teórica muy sencilla poseen formato muy sencillo. Sin embargo, en la práctica, no existe un tratamiento unificado del problema debido al gran número de derivadas objetivas que pueden utilizarse, como ha sido claramente señalado por Belytschko [11].

Desde el punto de vista físico el inconveniente más importante de este tipo de modelos es que disipan energía en régimen elástico, y una discusión profunda acerca del tema, que excede a este trabajo, puede consultarse en Simo and Pister [12].

### Implementación Numérica de los modelos hipoelásticos

En esta sección se discuten los esquemas numéricos empleados con el fin de integrar las derivadas objetivas definidas por las ecuaciones (6-8). La derivada material del tensor de tensiones de Cauchy  $\overset{\circ}{\sigma}$  se expresa de forma discreta mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$\overset{\circ}{\sigma} = \frac{{}^{n+1}\sigma - {}^n\sigma}{\Delta t} \quad (9)$$

que se integra utilizando un esquema de Euler explícito. La derivada material  $\overset{\circ}{\sigma}$  se expresa en función de una cualquiera de las derivadas objetivas  $\dot{\sigma}$ , y teniendo en cuenta la ecuación (5) resulta:

$${}^{n+1}\sigma = {}^n\sigma + \Delta t (\dot{\sigma} - \kappa\sigma + \sigma\kappa) \quad (10)$$

que se reescribe a partir de la ecuación constitutiva como:

$${}^{n+1}\sigma = {}^n\sigma + \Delta t (C d^e - \kappa\sigma - \sigma\kappa) \quad (13)$$

Es importante destacar que el tensor  $d^e$  es desconocido al comienzo de cada intervalo de tiempo, y por ello se supone:  $d^e = d$  (*predictor elástico*), y si el criterio de fluencia no se satisface las tensiones se corrigen a continuación en el denominado (*corrector plástico*), mediante un algoritmo adecuado.

El punto clave para integrar la ec. (13) se basa en el esquema numérico utilizado para calcular el predictor elástico. La derivada objetiva del tensor de tensiones que se utiliza esta relacionada con la cinemática

mediante la ecuación constitutiva, y lo mismo sucede con el esquema numérico. Posiblemente el punto más complejo es el tratamiento numérico de la cinemática, y el objetivo de un buen algoritmo es calcular apropiadamente el tensor velocidad de deformación  $\mathbf{d}$ , y el tensor  $\boldsymbol{\pi}$ .

Cualquier esquema numérico puede utilizarse en presencia de pequeñas deformaciones, sin embargo en presencia de grandes deformaciones el cálculo se complica porque se debe satisfacer el Principio de Objetividad en un sentido incremental o discreto, Hughes y Winget [13], requisito también conocido como *Objetividad Incremental*. Luego el incremento de tensiones  $\Delta t \mathbf{C} \mathbf{d}$ , y consecuentemente los tensores  $\mathbf{d}$  y  $\boldsymbol{\pi}$  deben calcularse en la configuración intermedia  ${}^{n+\frac{1}{2}}\Omega$  [14,15].

Por razones de exactitud es deseable que tanto la matriz  $\mathbf{B}$  así como las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  se calculen al final del intervalo  $t^{n+1}$ . Sin embargo, por razones de Objetividad, el trabajo numérico se realiza en la configuración intermedia  ${}^{n+\frac{1}{2}}\Omega$ . En la práctica algunos algoritmos transforman las tensiones a la configuración final  ${}^{n+1}\Omega$ , mientras otros omiten este punto con el propósito de ahorrar operaciones, con lo que se introduce otra fuente potencial de dificultades.

En resumen, es necesario calcular el incremento de tensiones, los términos de transporte, actualizar las tensiones, y comprobar si se satisface el criterio de fluencia  $f$ , antes de poder calcular las fuerzas internas  $\mathbf{p}$ . Mientras estas operaciones resultan comunes a todos los algoritmos, en la práctica computacional se implementan de formas muy diferentes. De esta manera, en la literatura pueden reconocerse varios esquemas numéricos diferentes que se discuten en los Cuadros 2 to 5. En los mismos se tratan los algoritmos correspondientes a las derivadas objetivas de Jaumann indicada mediante JI, una versión simplificada de la misma denotada mediante JII, la derivada de Green-Naghdi, denominada GN, y la derivada de Truesdell indicada mediante T.

### Derivada de Jaumann

La derivada de Jaumann  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$  definida mediante la ec. (8), es indudablemente la derivada objetiva más conocida, y es una de las más empleadas en el contexto de los hidrocódigos [11,14,16].

La implementación numérica que se discute a continuación se debe a Benson [14], y se basa en calcular los tensores velocidad de deformación y velocidad de rotación, así como el incremento de tensiones en la configuración intermedia  ${}^{n+\frac{1}{2}}\Omega$ . El criterio de fluencia también se verifica en dicha configuración, y el tensor de tensiones resultante se transforma finalmente a la configuración deformada, estas operaciones se resumen en el cuadro 2.

Los términos de transporte, ver ec. (7), se representan mediante el tensor velocidad de deformación  $\mathbf{w}$ , luego el algoritmo es objetivo solo en un sentido infinitesimal. Otro problema, ampliamente tratado en la literatura (ver Benson [14] y las referencias allí citadas), resulta el hecho que esta derivada cuando existe endurecimiento cinemático muestra un comportamiento oscilatorio en presencia de grandes deformaciones de corte.

Más allá de estos inconvenientes esta derivada es muy simple para programar, económica, y en la práctica el principio de objetividad se satisface porque los incrementos de tiempo son muy pequeños. Por estas razones es una de las más utilizadas en los códigos explícitos.

Los pasos predictor y corrector, en el sentido de los trabajos de Simo y Ortiz [2] y Simo and Hughes [17], en este caso no se identifican claramente porque los efectos plásticos no se pueden desacoplar de los cambios geométricos. El criterio de fluencia se verifica en la configuración intermedia y el tensor de tensiones se transporta luego hacia la configuración deformada  ${}^n\Omega$ , con lo que no se puede garantizar consistencia al final del intervalo.

---

Esta configuración no debe confundirse con la noción de configuración intermedia  ${}^t\Omega^e$ , empleada en los modelos elastoplásticos con grandes deformaciones basados en la hiperelasticidad

Para un intervalo de tiempo  ${}^n t$ , calcular  ${}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{w}$  y realizar las siguientes operaciones:  
 i Transformar las tensiones medio paso desde  ${}^n \Omega$  hasta  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega$ :

$${}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^* = {}^n \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{w} {}^n \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \Delta t {}^n \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}$$

ii Calcular el incremento de tensiones  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta t \mathbf{C} : {}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{d}$$

iii Actualizar las tensiones:

$${}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^{TR} = \Delta \boldsymbol{\sigma} + {}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^*$$

iv Verificar el criterio de fluencia  ${}^{n+\frac{1}{2}} f^{TR}$  y corregir las tensiones si fuese necesario:

$${}^{n+\frac{1}{2}} f^{TR} = {}^{n+\frac{1}{2}} f^{TR}({}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^{TR}, {}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{q}^{TR}) \leq 0$$

v Transformar el medio paso restante desde  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega$  hasta  ${}^{n+1} \Omega$ :

$${}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} = {}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{w} {}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \Delta t {}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}$$

Cuadro 2: Algoritmo JI: Integración de la derivada de Jaumann en dos pasos [14]

Con el fin de ahorrar operaciones en la práctica se utiliza una versión simplificada de este esquema, llamada JII. Este algoritmo que calcula las tensiones en la configuración intermedia y omite la transformación desde  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega$  hasta  ${}^{n+1} \Omega$ , se detalla en el Cuadro 3, siguiendo a Belytschko [11].

Para un intervalo de tiempo dado  ${}^{n+\frac{1}{2}} t$ , calcular  $\mathbf{w}$  en  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega$  y realizar las siguientes operaciones:  
 i Transformar el tensor de tensiones desde  ${}^n \Omega$  hasta  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega$ :

$${}^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^* = {}^n \boldsymbol{\sigma} - \Delta t \mathbf{w} {}^n \boldsymbol{\sigma} + \Delta t {}^n \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}$$

ii Calcular el incremento de tensiones  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  y actualizar las tensiones predictoras:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta t \mathbf{C} : {}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{d}$$

$${}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^{TR} = {}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^* + \Delta \boldsymbol{\sigma}$$

iii Verificar el criterio de fluencia  ${}^{n+1} f^{TR}$  y corregir las tensiones si corresponde:

$${}^{n+1} f^{TR} = {}^{n+1} f^{TR}({}^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^{TR}, {}^{n+1} \mathbf{q}^{TR}) \leq 0$$

Cuadro 3: Algoritmo JII: Integración de la derivada de Jaumann en un paso [11]

Este algoritmo comparte con el JI los inconvenientes antes señalados, pero es muy económico, simple y muy sencillo para programar en la práctica. En este caso pueden reconocerse un predictor elástico (pasos i e ii, en el Cuadro 3), y un corrector plástico (paso iii).

### Derivada de Green-Naghdi

Con el fin de remediar las oscilaciones de las tensiones cuando se emplea la derivada de Jaumann en presencia de endurecimiento cinemático, se suele emplear frecuentemente la derivada de Green-Naghdi. Este algoritmo ha sido utilizado en códigos implícitos como NIKE2D [18], en el código explícito PRONTO-2D [19], y en el programa DYNA2D [20] para el caso de endurecimiento cinemático. El algoritmo denominado GN se resume en el Cuadro 4.

Calcula  ${}^n \mathbf{x}, {}^{n+1} \mathbf{x}$ , and  ${}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{x}$ , los tensores de rotación correspondientes  ${}^n \mathbf{R}$ ,  ${}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{R}$ , y  ${}^{n+1} \mathbf{R}$ , y realiza las siguientes transformaciones:

i) Transporta las tensiones  ${}^n \boldsymbol{\sigma}$  a la configuración no rotada  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega^u$ :

$${}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma} = {}^n \mathbf{R}^T {}^n \boldsymbol{\sigma} {}^n \mathbf{R}$$

ii) Transporta el tensor velocidad de deformación desde  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega$  hasta  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega^u$ , calcula el incremento de tensiones  $\Delta \boldsymbol{\Sigma}$  y actualiza el tensor de tensiones:

$${}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{d}^u = {}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{R}^T {}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{d} {}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{R} \quad \Delta \boldsymbol{\Sigma} = \Delta t \mathbf{C} {}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{d}^u$$

$${}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma}^{TR} = {}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma} + \Delta \boldsymbol{\Sigma}$$

iii) Verifica el criterio de fluencia  ${}^{n+1} f^{TR}$  y si es necesario corrige las tensiones:

$${}^{n+1} f^{TR} = {}^{n+1} f^{TR}({}^{n+1} \boldsymbol{\Sigma}^{TR}, {}^{n+1} \mathbf{q}^{TR}) \leq 0$$

iv) Transporta las tensiones  ${}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma}^{TR}$  desde la configuración no rotada  ${}^{n+\frac{1}{2}} \Omega^u$  hasta la configuración final  ${}^{n+1} \Omega$ :

$${}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1} \mathbf{R} {}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma} {}^{n+1} \mathbf{R}^T$$

Cuadro 4: Algoritmo GN. Integración de la derivada de Green-Naghdi [18]

Como puede verse el algoritmo GN transforma los diferentes tensores desde una configuración a otra mediante tensores ortogonales. De esta manera puede tener en cuenta rotaciones finitas. Esta característica representa una gran ventaja respecto a los algoritmos II y III que tienen en cuenta la transformación geométrica mediante los términos de transporte.

El inconveniente de este esquema es el costo, ya que deben calcularse tres descomposiciones polares, que si bien son relativamente sencillas en 2D, resultan muy costosas en problemas 3D [14] y por esta razón se han propuesto otras técnicas para calcular tensor  $\mathbf{R}$ .

Finalmente cabe comentar que pueden distinguirse dos pasos en el algoritmo, y que no es fácil desacoplar las transformaciones geométricas del tratamiento de la plasticidad, con lo que no resulta evidente la distinción entre los problemas predictor y corrector en el sentido discutido en este trabajo.

### Derivada de Truesdell

Un esquema numérico basado en la derivada de Truesdell ha sido propuesto por Pinsky et al. [10,21], y si bien lo han denominado como la expresión en tasas del problema hiperelástico, también puede utilizarse para definir un material hipoeelástico.

Este esquema se basa en un algoritmo del tipo predictor-corrector, y en su deducción se emplea un tensor constitutivo espacial  $\mathbf{C}$  constante. Mientras que la evaluación del predictor implica cambios en la geometría, el problema corrector tiene lugar al final del intervalo en la configuración deformada  ${}^{n+1} \Omega$ .

Este esquema numérico que surge es implícito, incrementalmente objetivo, y con la condición que el tensor constitutivo  $\mathbf{C}$  permanezca constante se obtiene una expresión cerrada. Las transformaciones tensoriales entre las distintas configuraciones se escriben en función del tensor gradiente de la deformación incremental  $\mathbf{T} = \frac{\partial {}^{n+1} \mathbf{x}}{\partial {}^{n+1} \mathbf{x}}$ , y resulta necesario calcular dos operaciones *push-forward*  $\phi_*$  [6]. Este algoritmo, denotado aquí mediante T se muestra en el Cuadro 5.

Es importante destacar que si están presentes los términos correctivos discutidos en la formulación teórica del modelo, el tensor  $\mathbf{C}$  ya no es constante, y debe emplearse un esquema iterativo para calcular el predictor plástico [21].

El requerimiento de objetividad que este algoritmo satisface en un sentido más exigente que el clásico

conocido como *invariancia espacial* [6]. En la práctica, sin embargo esta propiedad simplifica el trabajo numérico ya que se evita totalmente el cálculo de la descomposición polar.

Calcular las coordenadas  ${}^{n+1}\mathbf{x}$  y el tensor gradiente de la deformación incremental  ${}^n\mathbf{f}$  y  ${}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{f}$ . Luego realizar las siguientes operaciones:

i Transportar las tensiones  ${}^n\boldsymbol{\sigma}$  a la configuración final  ${}^{n+1}\Omega$ :

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^* = {}^n\mathbf{f}^T {}^n\boldsymbol{\sigma} {}^n\mathbf{f}$$

ii En la configuración intermedia  ${}^{n+\frac{1}{2}}\Omega$  calcular el tensor velocidad de deformación  ${}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{d}$  y el incremento de tensiones  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta t \mathbf{C} {}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{d}$$

iii Transportar el incremento de tensiones  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  a la configuración final  ${}^{n+1}\Omega$ :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^* = {}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{f}^T \Delta\boldsymbol{\sigma} {}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{f}$$

iv Calcular el predictor del tensor de tensiones  ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{TR}$ :

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{TR} = {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^* + \Delta\boldsymbol{\sigma}^*$$

v Verificar el criterio de fluencia  ${}^{n+1}f^{TR}$  y proceder con el corrector plástico si corresponde:

$${}^{n+1}f^{TR} = {}^{n+1}f^{TR}({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{TR}, {}^{n+1}\mathbf{q}^{TR}) \leq 0$$

Cuadro 5: algoritmo T: Integración de la derivada de Truesdell [9,21].

### Discusión de los esquemas basados en hipoeelasticidad

Se han discutido cuatro algoritmos, desde el punto de vista del costo computacional los más económicos resultan el JII, el JI, el T y el GN en ese orden.

En el caso de los códigos explícitos, dejando de lado efectos de contacto, todo el costo del proceso se debe al cálculo de las fuerzas internas. Como además los incrementos de tiempo son muy pequeños, los esquemas basados en la derivada de Jaumann brindan muy buenos resultados, y por esta razón son muy empleados en la práctica, excepto en el caso de endurecimiento cinemático para el que se suele emplear el GN, mientras que el T ha sido experimentado mucho menos.

En el caso de códigos implícitos se emplean grandes incrementos de carga, y consecuentemente se vuelve importante satisfacer rigurosamente los requisitos de Objetividad y Objetividad Incremental. El costo adicional que ello implica se compensa largamente porque el esfuerzo necesario para integrar la ecuación constitutiva es en este caso relativamente bajo frente al costo total. Aunque el algoritmo T es mucho más económicos que el GN, en la práctica se ha empleado casi exclusivamente el algoritmo GN, mientras que el T esta mucho menos difundido en la práctica.

Desde el punto de vista de Objetividad los esquemas GN y T son preferibles frente a los basados en la derivada de Jaumann, con las salvedades expresadas en los párrafos anteriores.

### MODELOS HIPERELASTICOS

Los modelos basados en el cálculo de la respuesta elástica a partir de un potencial hiperelástico se han estudiado a menudo en la literatura a partir del trabajo de Lee [22] y otros autores. Una reseña completa acerca del estado del arte puede encontrarse en la Tesis doctoral del autor [23], y en las referencias allí citadas.

Este tipo de modelos han comenzado a utilizarse en la práctica luego de los trabajos de Simo [3,4]. En la

práctica estos modelos resultan atractivos cuando se utilizan arquitecturas implícitas, ya que mediante el cálculo del denominado operador tangente algorítmico se obtiene una excelente velocidad de convergencia, aun en presencia de grandes incrementos de carga.

Este tipo de modelos evita completamente la integración de ecuaciones constitutivas en tasas. De esta manera el principio de Objetividad se satisface de manera trivial con lo que se ahoran importantes operaciones a nivel de punto de Gauss y es esta característica la que los torna atractivos para su empleo en códigos explícitos. En este último caso en la literatura practicamente no existen referencias, como surge del Trabajo de Benson [14]. El autor ha experimentado con exito el empleo de esta clase de modelos en códigos explícitos [24,25], y recientemente Ortiz y colaboradores han realizado experiencias similares [26].

Un algoritmo de este tipo debido al autor [23] se discute brevemente a continuación, aunque debe destacarse que cabe mencionar que a los fines de este trabajo podría utilizarse cualquier otro modelo de este tipo.

### Bases Teóricas

Este modelo, escrito en el contexto de las ideas de Simo y Ortiz [2-4], se basa en la bien conocida noción de la descomposición multiplicativa del Tensor gradiente de la deformación  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$  [22]. Los efectos de plasticidad se tienen en cuenta mediante la teoría de variables internas [27], y el modelo es totalmente consistente con la termodinámica de los sólidos irreversibles. La formulación detallada de la teoría puede consultarse en la Tesis del autor [23].

La formulación del modelo se lleva a cabo en la configuración intermedia, sin embargo a los fines del presente trabajo es suficiente partir de las ecuaciones que describen el modelo en la configuración deformada, las cuales se listan en el Cuadro 6.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} &= \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{b}^{e-1})}{\partial \mathbf{e}^e} \\
 \dot{\gamma} &\geq 0 \quad f \leq 0 \quad \dot{\gamma} f = 0 \\
 \mathbf{d}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
 \mathcal{D}^p &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p + \mathbf{p} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0
 \end{aligned}$$

Cuadro 6 Modelo Hiperelástico en la configuración deformada  ${}^t\Omega$

donde  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}^e$  y  $\mathbf{e}^p$  indican al tensor de deformación de Almansi y sus componentes elástica y plástica respectivamente. El tensor elástico de Finger se indica mediante  $\mathbf{b}^{e-1}$ ,  $f$  representa al criterio de fluencia y  $\gamma$  es el multiplicador plástico. La regla de flujo se define de la misma forma que en los modelos hipoeelásticos (ver ec. 6). La disipación plástica se indica mediante  $\mathcal{D}^p$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  representa a las variables internas y  $\mathbf{p}$  son las fuerzas termodinámicas conjugadas a las variables internas.

Para el caso de metales las deformaciones elásticas son muy pequeñas, luego el tensor  $\mathbf{F}^e$  tiende a la identidad y el tensor  $\mathbf{b}^{e-1}$  al tensor métrico espacial  $\mathbf{g}$ , consecuentemente en el Cuadro 6 no resulta necesario incluir al tensor  $\mathbf{b}^{e-1}$ . Por la misma razón es posible escribir la componente elástica de la energía libre como sigue:

$$\psi^e = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{2} \lambda \text{tr}(\mathbf{e}^e)^2 + \mu (\mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e) \right] \quad (14)$$

en función del tensor elástico de Almansi  $\mathbf{e}^e$  y las constantes del material  $\lambda$  y  $\mu$ . Este modelo ha sido utilizado previamente por el autor y coautores [23] como una alternativa a los modelos neohookianos propuestos por otros autores. [2-1].

Los efectos de la plasticidad se tienen en cuenta mediante una regla de flujo asociada. La función de fluencia es el bien conocido criterio de Von Mises o J2. En este caso solo se tiene en cuenta endurecimiento isótropo lineal o no lineal, que se formula en función de la deformación plástica efectiva  $\bar{\epsilon}^P$ :

$$\psi^P = \psi^P(\bar{\epsilon}^P) \quad (15)$$

### Implementación Numérica

En esta sección se reseña el algoritmo para integrar el modelo hiperelástico. Las tensiones se integran utilizando un esquema del tipo predictor-corrector [17].

Estos pasos están completamente desacoplados ya que primero se tienen en cuenta los cambios geométricos para calcular las tensiones predictoras, y luego tiene lugar la corrección plástica para la geometría fija.

El punto clave en que se basa este algoritmo es que no necesita integrar ninguna ecuación en tasas, evitando de esta manera las dificultades numéricas discutidas previamente para el caso de los modelos hipoeelásticos. Esta ventaja se basa en el hecho que en esta clase de ecuaciones constitutivas se relacionan tensiones totales con deformaciones totales.

En este caso el tensor elástico de Finger juega el papel de una variable interna. Para el problema predictor el tensor elástico de Finger resulta [23]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1(\text{trial})} = \mathbf{f}^{-T} \cdot {}^t\mathbf{b}^{e-1} \cdot \mathbf{f}^{-1} \quad (16)$$

donde  $\mathbf{f}^{-1}$  es la inversa del tensor del gradiente de la deformación incremental escrito en función de las coordenadas actuales y de los desplazamientos incrementales como:  $\mathbf{f}^{-1} = \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}$ , con  $\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}$ .

El problema corrector se calcula utilizando un esquema de Euler hacia atrás y la expresión final del tensor elástico de Finger resulta [23]:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1(\text{trial})} + 2\gamma {}^{t+\Delta t}\mathbf{n} \quad (17)$$

El término  $2\gamma {}^{t+\Delta t}\mathbf{n}$  se calcula mediante el algoritmo de retorno radial. El vector  $\mathbf{n}$  es la normal a la superficie de fluencia y  $\gamma$  es el multiplicador plástico. Finalmente las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  se obtienen a partir del tensor elástico de Almansi  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^e = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}\mathbf{g} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{b}^{e-1})$ , que se calcula en función del tensor elástico de Finger.

Cabe comentar que los requerimientos de memoria son similares a los de un código hiperelástico, y que no es necesario calcular explícitamente la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación, con lo que se ahorran importantes operaciones a nivel de punto de Gauss.

Este tipo de modelo se reformulaban originalmente en función de la derivada de objetiva de Jaumann [22], con lo que se perdían muchas de las ventajas potenciales de esta clase de modelos. Luego de las contribuciones de Simo y Ortiz [2-4], se han comenzado a utilizar cada vez más frecuentemente en la práctica computacional algoritmos que calculan la respuesta elástica en base a leyes secantes, evitando de esta manera las generalmente costosa integración de las derivadas objetivas.

Este tipo de esquema, ha sido propuesto para su empleo en códigos implícitos, y en la práctica brindan excelentes resultados en conjunción con los denominados tensores tangentes algorítmicos. Pese a estas ventajas la gran mayoría de los códigos comerciales que poseen leyes constitutivas capaces de tratar el problema elastoplástico con grandes deformaciones, continúan utilizando modelos hipoeelásticos, generalmente basados

en la derivada de GN. Al respecto es importante destacar que el algoritmo H es mucho más económico que el GN.

Como se ha señalado antes en existe muy poca experiencia en la práctica acerca del uso de este tipo de modelos en códigos explícitos. El autor y coautores han investigado su empleo en este tipo de programas [23-25], y han resuelto exitosamente problemas de conformado de metales [28,29]. Además pueden mencionarse la ya citada contribución de Ortiz et al [26].

Dados los desplazamientos  ${}^{n+1}\mathbf{u}$  y las variables internas  ${}^n\mathbf{b}^{e-1}$ , y  ${}^n\boldsymbol{\alpha}$  almacenadas en la base de datos del código para un instante  ${}^n t$ :

- i Actualizar la geometría y calcular el tensor  $\mathbf{f}$ :
- ii Actualizar el tensor elástico de Finger:
 
$${}^{n+1}\mathbf{b}^{e-1TR} = \mathbf{f}^{-T} {}^n\mathbf{b}^{e-1} \mathbf{f}^{-1}$$
- iii Calcular el tensor elástico de Almansi y las tensiones de Cauchy:
 
$${}^{n+1}\mathbf{e}^e = \frac{1}{2} ({}^{n+1}\mathbf{g} - {}^{n+1}\mathbf{b}^{e-1}) \quad ; \quad {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi({}^{n+1}\mathbf{e}^e)}{\partial {}^{n+1}\mathbf{e}^e}$$
- iv Verificar el criterio de fluencia y calcular el corrector plástico si corresponde:
 
$$f({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}\mathbf{q}) \leq 0$$
- v Corregir el tensor elástico de Finger mediante el empleo del algoritmo de retorno radial.
 
$${}^{n+1}\mathbf{b}^{e-1} = {}^{n+1}\mathbf{b}^{e-1TR} + 2\lambda {}^{n+1}\mathbf{n}$$
- vi Corregir las deformaciones elásticas de Almansi, las tensiones de Cauchy y almacenarlas en la base de datos.

Cuadro 7: Algoritmo H: esquema numérico del modelo hiperelástico [23].

## CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado distintos algoritmos numéricos utilizados en la literatura con el propósito de integrar la ecuación constitutiva de problemas elastoplásticos con grandes deformaciones.

La discusión se ha enfocado hacia el cálculo de las fuerzas internas, y por ello se han presentado las derivadas objetivas del tensor de tensiones de Cauchy, así como los algoritmos correspondientes. Estos esquemas se han comparado entre sí, y también con el resultante del modelo hiperelástico analizado.

Desde el punto de vista del esfuerzo computacional los algoritmos JI y JII son los más eficientes, seguidos por el esquema hiperelástico, el Algoritmo T y el algoritmo GN. Es importante destacar que el algoritmo H es el más costoso computacionalmente que los JI y JII, pero es más riguroso tanto desde el punto de vista teórico como numérico, debido al hecho conocido que los modelos hipoeelásticos pueden disipar energía en régimen elástico, y además porque el algoritmo H satisface exactamente Objetividad, mientras que los esquemas usados en la derivada de Jaumann solo lo cumplen en un sentido instantáneo.

En términos generales puede decirse que si el algoritmo se debe emplear en un código implícito, los postulados de la Mecánica de medios continuos deben satisfacerse escrupulosamente. Las operaciones adicionales que requiere no pesan demasiado en el costo final del proceso dado que el tiempo de proceso está gobernado por el costo de resolver el sistema de ecuaciones lineales, y la tendencia actual es resolver la menor cantidad de intervalos del mayor tamaño posible. Si en cambio el algoritmo se debe implementar en un código explícito, los incrementos de tiempo son muy pequeños por razones de estabilidad, y en la práctica no se detecta la influencia de ciertas simplificaciones usuales.

Los comentarios anteriores conducen a sugerir que se empleen algoritmos que satisfagan rigurosamente Objetividad cuando se utilizan códigos implícitos. En este caso claramente el más ventajoso es el algoritmo H, que evita integrara derivadas objetivas, satisface rigurosamente Objetividad y es mas económico que el esquema T, y mucho más sencillo y económico que el GN, que es el más empleado en la práctica.

En cambio en presencia de códigos explícitos los esquemas más económicos resultan el JI y el JII, y funcionan bien en la práctica. En este caso la elección de este tipo de esquemas frente al algoritmo H, resulta un compromiso entre el costo computacional y la exactitud teórica y numérica.

### AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al Instituto de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Cuyo la ayuda recibida para la presentación de este trabajo.

### REFERENCIAS

- [1] Hughes T.J.R., "Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate Independent Deviatoric Plasticity", in *Theoretical Foundations for large-scale Computations for Nonlinear Material Behaviour*, S.Nemat-Nasser, R.J.Asaro and G.A.Hegemier, editores, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda, (1984).
- [2] J.C. Simo and Ortiz M., "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **49**, 221-245, (1985).
- [3] Simo J.C., "A Framework for finite strain elstoplasticity based on maximum plastic dissipation and thr multiplicative decomposition: Part I Continuum Formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **66**, 199-219, (1988).
- [4] Simo J.C., "A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and thr multiplicative decomposition: Part II Computational aspects", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **68**, 1-31, (1988).
- [5] Malvern L.E., *Introduction of Mechanics of Continuous Medium*, Prentice Hall, (1969).
- [6] Marsden J.E. and T.J.R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1983).
- [7] Gurtin M., *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, (1981).
- [8] Eringen A.C., *Mechanics of Continua*, John Wiley, (1965).
- [9] Green A.E. and P.M Naghdi, "A general theory of elastic plastic continuum", *Archs. Ration. Mech. Analysis*, **18**, 251-281, (1965).
- [10] Pinsky P.M., M. Ortiz and K.S. Pister, "Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **40**, 137-158, (1983).
- [11] Belytschko T., "An Overview of Semidiscretization and Time integration procedures", in *Computational Methods for Transient Analysis*, Belytschko T. and T.J.R.Hughes editores, North Holland, (1983).
- [12] Simo J.C. and K.S.Pister: *Remarks on rate constitutive equations for finite deformations problems: computational implications*, *Comp. Meth. in Applied Mech Engng.*, **46**, 201-215 (1984).
- [13] Hughes T.J.R. and J.Winget, "Finite Rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,

12, 1862-1867, (1980).

[14] Benson D.J., "Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, 235-394, (1992).

[15] Hallquist J.O., *NIKE2D - A vectorized Implicit, Finite deformation Finite element code for Analyzing the Static and Dynamic response of 2-D Solids with interactive Rezoning and graphics*, Report UCID-19677, Rev 1, Lawrence Livermore National Laboratory, (1986).

[16] Goicolea J.M., *PR2D User's Guide*, Version 1-2.10, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, (1992).

[17] Simo J.C. and T.J.R. Hughes, "General return mappings algorithms for rate-independent plasticity", in *Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, C.S.Desai et al Ed., Elsevier, (1987).

[18] Hallquist J.O., *NIKE2D - A vectorized Implicit, Finite deformation Finite element code for Analyzing the Static and Dynamic response of 2-D Solids with interactive Rezoning and graphics*, Report UCID-19677, Rev 1, Lawrence Livermore National Laboratory, (1986).

[19] Hallquist J.O., *User's Manual for DYNA2D - An explicit Two-dimensional Hydrodynamic Finite element code with Interactive rezoning*, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, report UCID-18756, Rev. 1, (1982a).

[20] Flanagan D.P. and L.M.Taylor, "An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **62**, 305-320, (1987).

[21] Pinsky P.M., M. Ortiz and R.L. Taylor, "Operator Split Methods in Numerical Solution of the Finite Deformation Elastoplastic Dynamic Problem", *Computers and Structures*, **17**, 345-359, (1983).

[22] Lee E.H., "Elastic-Plastic deformation at finite strains", *J. Applied Mechanics*, **36**, 1-6, (1969).

[23] García Garino C., *A Numerical Model for the analysis of large strain elastoplastic solids*, Ph.D. Thesis, In Spanish, E.T.S. Ingenieros de Caminos, UPC, Barcelona, (1993).

[24] García Garino C., J. Oliver and S.Botello, "Large Strain Plasticity. Fundamentals and Applications", (in spanish), *Mecánica Computacional Vol 12*, 343, AMCA, (1992).

[25] García Garino C., J.Oliver and E. Oñate, " Use of a Hyperelastic J2 Model in Hydrocodes", *Computational Plasticity IV*, R. Owen et al Ed., 1889-1900, Pineridge Press-CIMNE, (1995).

[26] Camacho G.T., Marusich T.D. y Ortiz M., "Modelling of High-Speed Machining and Ballistic Penetration *Computational Plasticity IV*, R. Owen et al Ed., 1835-1864, Pineridge Press-CIMNE, (1995).

[27] Lubliner J.: *Plasticity Theory*, Macmillan Publishing Company, New York, (1990).

[28] García Garino C., J. Rojek and E. Oñate, "Simulation of Sheet Metal Stamping Processes Using a Solid Finite Strain Model", *Applied Mechanics in the Americas*, AMCA, (1995).

[29] Rojek J., C. García Garino and E. Oñate, "Advanced Finite Element Models for Analysis of Industrial Sheet Forming Processes", in *Proceedings of 18<sup>th</sup> Biennial Congress of IDDRG.*, (1994).