

## UN METODO DE ELEMENTOS FINITOS POR DESCOMPOSICION DE DOMINIO PARA MODELADO MAGNETOTELURICO BIDIMENSIONAL

Luis Guarracino, Juan E. Santos  
Departamento de Geofísica Aplicada, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata  
Paseo del Bosque s/n, La Plata (1900), Argentina

### RESUMEN

El problema directo en Magnetotelúrica consiste en modelar los campos electromagnéticos naturales a partir de un modelo de conductividad terrestre. Se presenta una formulación por descomposición de dominio del problema directo bidimensional que conduce naturalmente a un algoritmo iterativo cuya solución se aproxima por un método de elementos finitos. Este procedimiento permite aproximar en forma simultánea las tres componentes del campo electromagnético secundario y es especialmente adecuado para su implementación en computadoras de arquitectura en paralelo.

### ABSTRACT

The forward problem in Magnetotelluric consists of modelling the natural electromagnetic fields starting from a earth conductivity model. We present a domain decomposition formulation of the bidimensional forward problem which leads in a natural way to an iterative algorithm whose solution is approximated by a finite element method. This procedure allows to approximate simultaneously the three secondary electromagnetic field components and it is specially adequate to implement in parallel architecture computers.

### INTRODUCCION

El Método Magnetotelúrico consiste en realizar mediciones de los campos eléctricos y magnéticos naturales sobre una región particular de la superficie terrestre y extraer de ellos modelos de conductividad eléctrica. A partir de estos modelos puede inferirse información del subsuelo mediante relaciones entre la conductividad eléctrica y las propiedades físicas de las rocas tales como composición, textura, porosidad y contenido de fluidos.

Las variaciones temporales de las corrientes ionosféricas generan una onda electromagnética que se propaga con leve atenuación hasta alcanzar la superficie terrestre. La mayor parte de la energía de la onda se refleja en la interface tierra-aire y sólo una pequeña parte se propaga verticalmente en el subsuelo induciendo en la corteza corrientes eléctricas denominadas *corrientes telúricas*. La amplitud, fase y relaciones direccionales entre los campos eléctricos y magnéticos medidos en superficie dependerán de la distribución de conductividad eléctrica del subsuelo.

El objetivo de este trabajo es presentar un método iterativo de descomposición de dominio para modelado magnetotelúrico bidimensional. Este procedimiento presenta un interés particular

resolver al mismo tiempo tanto el campo eléctrico como el magnético. Además, este método es especialmente adecuado para su implementación en computadoras de arquitectura en paralelo.

### EL PROBLEMA DIFERENCIAL

El modelo terrestre elegido es bidimensional, representable por un modelo unidimensional con una inhomogeneidad bidimensional tal como puede observarse en la figura 1.

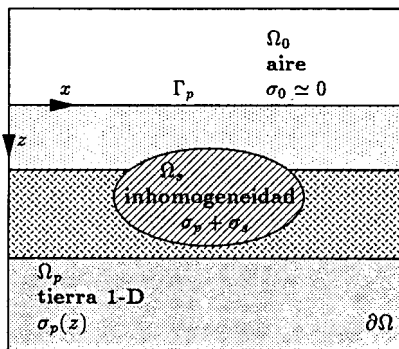


Figura 1 : Modelo de conductividad terrestre.

La conductividad eléctrica del modelo es:

$$\sigma(x, z) = \begin{cases} \sigma_0 \simeq 0 & \text{en } \Omega_0 \text{ (aire),} \\ \sigma_p(z) & \text{en } \Omega_p \text{ (tierra 1-D),} \\ \sigma_p(z) + \sigma_s(x, z) & \text{en } \Omega_s \text{ (dentro de la inhomogeneidad).} \end{cases}$$

El dominio total  $\Omega$  es la unión de los tres subdominios:  $\Omega_0$ ,  $\Omega_p$  y  $\Omega_s$ . Se denotará con  $\partial\Omega$  al borde del dominio  $\Omega$  y con  $\Gamma_p$  a la interfaz tierra-aire. La función  $\sigma_s(x, z)$  es la anomalía de la conductividad eléctrica, y se define como la diferencia entre la conductividad total  $\sigma(x, z)$  y la correspondiente a un modelo terrestre unidimensional de conductividad  $\sigma_p(z)$ .

Para simplificar el análisis de la inducción electromagnética en un modelo terrestre bidimensional se resuelve el campo eléctrico incidente en dos componentes:  $E_{0y}$  en la dirección de simetría (*along strike*) y  $E_{0x}$  perpendicular a la dirección de simetría (*across strike*). La componente  $E_{0x}$  excita el modo transverso magnético (TM) caracterizado por las componentes de campo electromagnético ( $E_x, E_z, H_y$ ) mientras que  $E_{0y}$  induce las componentes ( $E_y, H_x, H_z$ ), excitando el modo transverso eléctrico (TE). En este trabajo se analizará solamente el modo TE; el procedimiento para el modo TM es análogo.

Para conocer los campos electromagnéticos inducidos en el modelo se aplican las ecuaciones de Maxwell junto con las correspondientes condiciones de borde para la interfaz entre medios de propiedades electromagnéticas distintas. Dado que en Magnetotelúrica las corrientes de desplazamiento son despreciables y que para la mayoría de las rocas la permeabilidad magnética puede considerarse constante e igual a la permeabilidad magnética del vacío  $\mu_0$ , las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo toman la forma:

$$\begin{aligned} \text{i) } \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E}, \\ \text{ii) } \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde se asume una dependencia temporal de la forma  $e^{i\omega t}$  de los campos complejos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ . Al reemplazar las componentes del campo electromagnético para el modo TE en (1) se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma(x, z)E_y, \\ \text{ii)} \quad & \frac{\partial E_y}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_z, \\ \text{iii)} \quad & \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_x, \end{aligned} \quad (2)$$

y a partir de estas últimas:

$$\nabla^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = i\omega\mu_0 \sigma E_y. \quad (3)$$

El problema directo se formuló en términos del *campo secundario* siguiendo la idea de Coggon [1]. El campo total se considera compuesto por una componente *primaria*, que puede ser calculada analíticamente, y una componente *secundaria* que se define como la diferencia entre los campos primario y total. Esta formulación aumenta la exactitud de los resultados cuando la componente secundaria es mucho menor que la total.

El campo secundario  $u$  se define por la fórmula

$$u = E_y - E_{yp}, \quad (4)$$

siendo  $E_{yp}(z)$  el campo eléctrico primario correspondiente a un modelo terrestre unidimensional de conductividad  $\sigma_p(z)$  cuya expresión analítica es conocida.

Para formular el problema diferencial se eligió un dominio rectangular  $\Omega$  lo suficientemente grande como para que el campo secundario sea despreciable fuera de él y en particular sobre su borde  $\partial\Omega$ . Resulta entonces el siguiente problema inhomogéneo con condición de borde para el campo secundario:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \nabla^2 u - ia u = f \quad \text{en } \Omega, \\ \text{ii)} \quad & u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

donde por simplicidad se ha expresado  $a(x, z) = \omega\mu_0\sigma(x, z)$  y  $f(x, z) = i\omega\mu_0\sigma_s(x, z)E_{yp}(z)$ .

El campo magnético secundario se define en forma análoga a (4):

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}(x, z) - \mathbf{H}_{xp}(z), \quad (6)$$

siendo  $\mathbf{H}_{xp}(z)$  el campo magnético primario correspondiente a un modelo terrestre unidimensional de conductividad  $\sigma_p(z)$  cuya expresión analítica también es conocida.

Teniendo en cuenta las expresiones de los campos secundarios (4) y (6), las ecuaciones (2.i,ii,iii) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{\partial u}{\partial x} = -i\omega\mu_0 v_z, \\ \text{ii)} \quad & \frac{\partial u}{\partial z} = i\omega\mu_0 v_x. \end{aligned} \quad (7)$$

De esta manera se completa la formulación del problema bidimensional en términos del campo secundario.

### FORMULACION POR DESCOMPOSICION DE DOMINIO

La idea del método de descomposición de dominio consiste en transformar el problema diferencial original (5) en un problema equivalente formulado sobre una partición de  $\Omega$ . Este procedimiento conduce naturalmente a la formulación a nivel diferencial de un algoritmo iterativo que se resuelve en forma aproximada utilizando un método de elementos finitos. Aplicaciones de la técnica de descomposición de dominio a problemas de modelado de flujos en medios porosos y propagación de ondas en medios disipativos pueden encontrarse en [2], [3], [4] y [5].

Consideremos una partición no solapada del dominio  $\Omega$  que por simplicidad se supondrá rectangular:

$$\Omega = \sum_{j,k=1}^{n_x, n_y} \Omega_{jk}; \quad \Omega_{jk} \cap \Omega_{lm} = 0 \quad j,k \neq l,m.$$

Denotaremos por  $\partial\Omega_{jk}$  al borde del subdominio  $\Omega_{jk}$ , que descomponemos en la forma:

$$\partial\Omega_{jk} = \bigcup_{s=L,R,T,B} \Gamma_{jk}^s,$$

siendo  $\Gamma_{jk}^L$ ,  $\Gamma_{jk}^R$ ,  $\Gamma_{jk}^T$ ,  $\Gamma_{jk}^B$  los bordes izquierdo, derecho, superior e inferior de  $\Omega_{jk}$ , respectivamente, según se ilustra en la figura 2. El símbolo  $\nu_{jk}$  denota la normal exterior unitaria en  $\Gamma_{jk}^s$ .

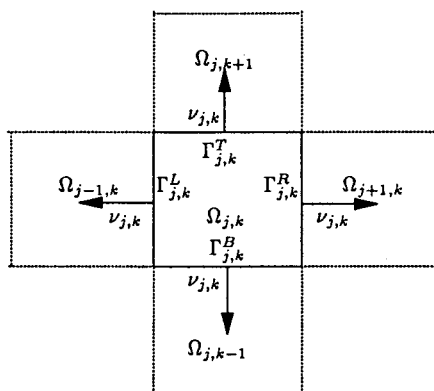


Figura 2 : Descripción de la malla.

Las condiciones naturales de consistencia en los bordes de subdominios adyacentes son:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & u_{jk} = u_{j^*k^*} \quad \text{en } \Gamma_{jk}^s, \\ \text{ii)} \quad & \frac{\partial u_{jk}}{\partial \nu_{jk}} + \frac{\partial u_{j^*k^*}}{\partial \nu_{j^*k^*}} = 0 \quad \text{en } \Gamma_{jk}^s, \end{aligned} \quad (8)$$

donde:

$$\begin{aligned} j^* &= j-1, & k^* &= k, & \text{en } \Gamma_{jk}^L; \\ j^* &= j+1, & k^* &= k, & \text{en } \Gamma_{jk}^R; \\ j^* &= j, & k^* &= k-1, & \text{en } \Gamma_{jk}^B; \\ j^* &= j, & k^* &= k+1, & \text{en } \Gamma_{jk}^T. \end{aligned} \quad (9)$$

Las condiciones de consistencia (8.i,ii) se reemplazan por la siguiente condición de borde del tipo de Robin:

$$\frac{\partial u_{jk}}{\partial \nu_{jk}} + i\beta_{jk}^s u_{jk} = -\frac{\partial u_{j^*k^*}}{\partial \nu_{j^*k^*}} + i\beta_{jk}^s u_{j^*k^*}, \quad (10)$$

siendo  $\beta_{jk}^s$  una constante real y positiva.

Luego una formulación equivalente del problema (5) por un método de descomposición de dominio puede establecerse como sigue: encontrar  $u_{jk}$  tal que

$$\begin{aligned} i) \quad & \nabla^2 u_{jk} - i a u_{jk} = f, \quad \text{en } \Omega_{jk}, \\ ii) \quad & u_{jk} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega \text{ (borde exterior),} \\ iii) \quad & \frac{\partial u_{jk}}{\partial \nu_{jk}} + i\beta_{jk}^s u_{jk} = -\frac{\partial u_{j^*k^*}}{\partial \nu_{j^*k^*}} + i\beta_{jk}^s u_{j^*k^*}, \quad \text{en } \Gamma_{jk}^s \text{ tal que } \Gamma_{jk}^s \cap \partial\Omega = \emptyset. \end{aligned} \quad (11)$$

En [6] se demuestra que el problema local (5) tiene solución única y que las formulaciones (5) y (11) son equivalentes.

Introduciendo los multiplicadores de Lagrange ([7],[8]):

$$\lambda_{jk}^s \sim -\frac{\partial u_{jk}}{\partial \nu_{jk}}, \quad \text{en } \Gamma_{jk}^s \text{ (interiores), } s = L, R, T, B, \quad (12)$$

obtenemos la siguiente formulación híbrida del problema (11): encontrar  $(u_{jk}, \lambda_{jk})$  tales que

$$\begin{aligned} i) \quad & \nabla^2 u_{jk} - i a u_{jk} = f, \quad \text{en } \Omega_{jk}, \\ ii) \quad & u_{jk} = 0, \quad \text{en } \partial\Omega \text{ (borde exterior),} \\ iii) \quad & -\lambda_{jk}^s + i\beta_{jk}^s u_{jk} = \lambda_{j^*k^*}^s + i\beta_{jk}^s u_{j^*k^*}, \quad \text{en } \Gamma_{jk}^s \text{ (bordes interiores),} \end{aligned} \quad (13)$$

donde:

$$\begin{aligned} s^* = R & \quad \text{para } s = L, \\ s^* = L & \quad \text{para } s = R, \\ s^* = T & \quad \text{para } s = B, \\ s^* = B & \quad \text{para } s = T. \end{aligned}$$

Luego una formulación débil del problema (13) puede establecerse del siguiente modo: encontrar  $(u_{jk}, \lambda_{jk})$  tales que:

$$\begin{aligned} i) \quad & (\nabla u_{jk}, \nabla \varphi)_{\Omega_{jk}} + i(a u_{jk}, \varphi)_{\Omega_{jk}} + \sum_{s=L,R,T,B} \langle \lambda_{jk}^s, \varphi \rangle_{\Gamma_{jk}^s} = (f, \varphi)_{\Omega_{jk}}, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_{jk}) \\ ii) \quad & -\lambda_{jk}^s + i\beta_{jk}^s u_{jk} = \lambda_{j^*k^*}^s + i\beta_{jk}^s u_{j^*k^*}, \quad \text{en } \Gamma_{jk}^s \text{ (bordes interiores).} \end{aligned} \quad (14)$$

El conjunto de funciones de pruebas admisibles para el problema se denota  $\mathcal{H}_0^1(\Omega_{jk})$  donde el supraíndice 1 indica que tanto las funciones como sus derivadas de primer orden son de cuadrado integrable en  $\Omega_{jk}$  y el subíndice 0 que  $\varphi$  es nula si  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_{jk} \neq \emptyset$ . Es importante notar que la condición de borde  $u_{jk} = 0$  sobre  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_{jk}$ , ha sido impuesta en forma fuerte forzando a las funciones de prueba  $\varphi(x, z)$  a anularse sobre el borde exterior.

Si tenemos en cuenta que los subíndices  $j^*, k^*, s^*$  corresponden a los subdominios contiguos al  $\Omega_{jk}$  la formulación (14) sugiere naturalmente el siguiente algoritmo iterativo: a partir de valores iniciales arbitrarios  $(u_{jk}^0, \lambda_{jk}^{s,0})$  se calculan  $(u_{jk}^{n+1}, \lambda_{jk}^{s,n+1})$  como sigue:

$$\begin{aligned} i) \quad & (\nabla u_{jk}^{n+1}, \nabla \varphi)_{\Omega_{jk}} + i(a u_{jk}^{n+1}, \varphi)_{\Omega_{jk}} + \sum_{s=L,R,T,B} \langle \lambda_{jk}^{s,n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma_{jk}^s} = (f, \varphi)_{\Omega_{jk}}, \quad \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_{jk}), \\ ii) \quad & \lambda_{jk}^{s,n+1} = i\beta_{jk}^s u_{jk}^{n+1} - \left[ \lambda_{j^*k^*}^{s^*,n} + i\beta_{jk}^s u_{j^*k^*}^n \right], \quad \text{en } \Gamma_{jk}^s \text{ (bordes interiores).} \end{aligned} \quad (15)$$

Estas últimas expresiones representan un número infinito de ecuaciones. El siguiente paso será definir un método de elementos finitos para aproximar la solución de (15).

### APROXIMACION POR ELEMENTOS FINITOS

Para simplificar la descripción del procedimiento numérico se tratará solo el caso en que la partición de  $\Omega$  asociada al espacio de elementos finitos coincide con la elegida para la formulación del método de descomposición de dominio.

Sea  $V^h$  un espacio bilineal de elementos finitos contenido en  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ :

$$V^h = \{ \varphi \in C^0(\bar{\Omega}) : \varphi/\Omega_{jk} \in P_{11}(\Omega_{jk}), \varphi \equiv 0 \text{ en } \partial\Omega, 1 \leq j \leq n_x, 1 \leq k \leq n_z \},$$

donde  $P_{11}(\Omega_{jk})$  denota la restricción a  $\Omega_{jk}$  de los polinomios de grado no mayor que uno en cada variable.

Los espacios locales de elementos finitos se definen por:

$$\begin{aligned} \text{i) } V_{jk}^h &= V^h/\Omega_{jk}, \\ \text{ii) } W_{jk}^h &= \bigcup_{s=L,R,B,T} P_1(\Gamma_{jk}^s), \end{aligned}$$

siendo  $P_1(\Gamma_{jk}^s)$  la restricción a  $\Gamma_{jk}^s$  de los polinomios de grado no mayor que uno en una variable. El procedimiento iterativo de elementos finitos por descomposición de dominio se define como el análogo discreto de (15), es decir, a partir de valores iniciales arbitrarios  $(u_{jk}^{h,0}, \lambda_{jk}^{h,s,0}) \in V_{jk}^h \times W_{jk}^h$ , se calculan  $(u_{jk}^{h,n+1}, \lambda_{jk}^{h,s,n+1})$  mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{i) } (\nabla u_{jk}^{h,n+1}, \nabla \varphi)_{\Omega_{jk}} + i(a u_{jk}^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_{jk}} + \sum_{s=L,R,T,B} \langle \lambda_{jk}^{h,s,n+1}, \varphi \rangle_{\Gamma_{jk}^s} &= (f, \varphi)_{\Omega_{jk}}, \quad \varphi \in V_{jk}^h, \\ \text{ii) } \lambda_{jk}^{h,s,n+1} &= i\beta_{jk}^s u_{jk}^{h,n+1} - [\lambda_{j-k}^{h,s,n} + i\beta_{jk}^s u_{j-k}^{h,n}], \quad \text{en } \Gamma_{jk}^s \text{ (bordes interiores)}. \end{aligned} \quad (16)$$

La convergencia del método iterativo (16) se demuestra [6].

### RESULTADOS NUMERICOS

Para ilustrar resultados numéricos se eligió un modelo de dos capas con un prisma vertical de alta conductividad con respecto al medio que lo rodea cuya geometría se muestra en la figura 3.

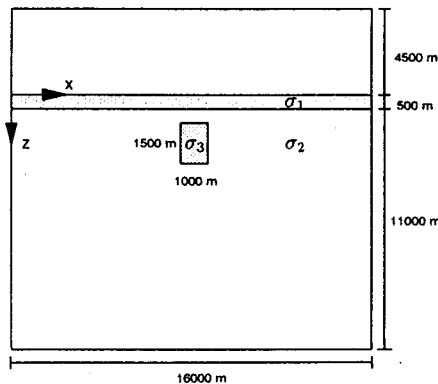


Figura 3 : Modelo de dos capas con anomalía prismática.

La conductividad del modelo es:

$$\sigma(x, z) = \begin{cases} \sigma_1 = 0.01 \text{ (ohm} \cdot \text{m)}^{-1} & \text{capa 1,} \\ \sigma_2 = 0.05 \text{ (ohm} \cdot \text{m)}^{-1} & \text{capa 2,} \\ \sigma_3 = 0.5 \text{ (ohm} \cdot \text{m)}^{-1} & \text{prisma.} \end{cases}$$

El procedimiento iterativo por descomposición de dominio (16) aproxima directamente el campo eléctrico secundario  $u$ . Las componentes de campo magnético secundario  $v_x$  y  $v_z$  se obtienen a partir de las ecuaciones (7.i, ii) utilizando los valores de los multiplicadores de Lagrange para aproximar  $\frac{\partial u}{\partial z}$  y  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . De esta manera el método iterativo por descomposición de dominio permite aproximar las tres componentes de campo secundario ( $u, v_x, v_z$ ) en forma simultánea. Las figuras 4 y 5 muestran, respectivamente, el campo eléctrico secundario  $u$  y la componente  $v_x$  del campo magnético secundario en todo el dominio  $\Omega$  para una frecuencia de 1 Hz.

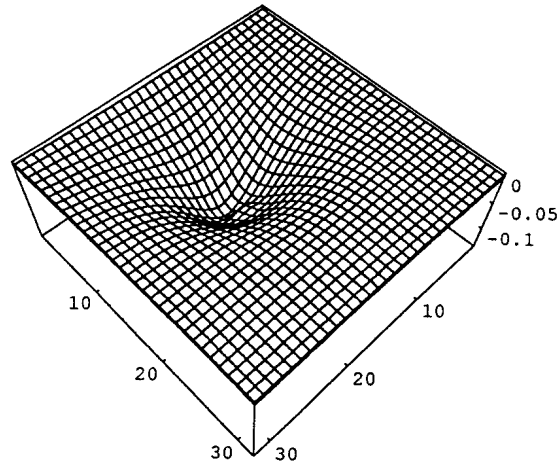


Figura 4 : Campo eléctrico secundario  $u$  en todo el dominio  $\Omega$  para  $f=1$  Hz.

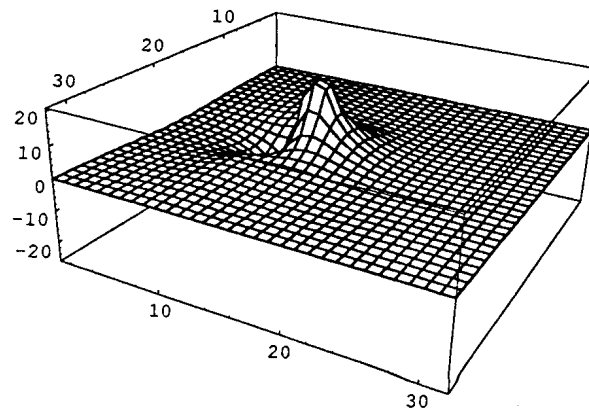


Figura 5 : Componente  $v_x$  del campo magnético secundario en todo el dominio  $\Omega$  para  $f=1$  Hz.

La figura 6 muestra las curvas de resistividad aparente en superficie para distintas frecuencias. Estas curvas son las que usualmente se utilizan para interpretación. La resistividad aparente  $\rho_{yx}$  se obtiene a partir de la siguiente fórmula:

$$\rho_{yx} = \frac{Z_{yx} \bar{Z}_{yx}}{\mu_0 \omega}, \quad Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x}.$$

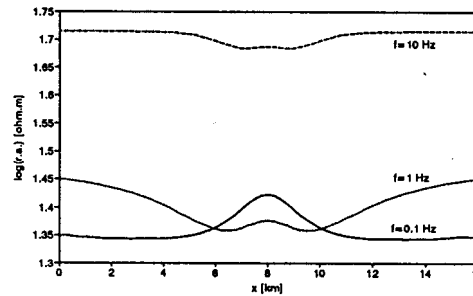


Figura 6 : Curvas de resistividad aparente ( $z = 0$ ).

Con el fin de comparar y validar resultados se resolvió el problema diferencial (5) utilizando un método de diferencias finitas. Las soluciones alcanzadas por ambos métodos se ajustan perfectamente según puede observarse en la figura 7 para una malla de 32 por 32.

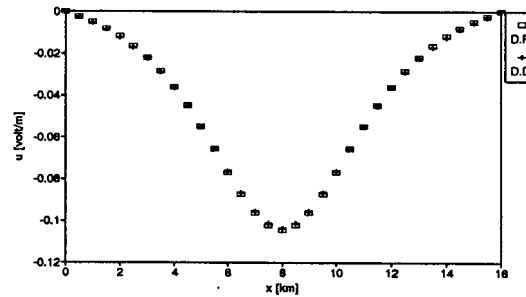


Figura 7 : Comparación de la solución en superficie.

### Convergencia del algoritmo

Con el fin de hacer más eficiente el algoritmo iterativo (16) se implementaron las siguientes alternativas.

#### a. Relajación de la solución

La relajación de la solución consiste en reemplazar  $u_{jk}^{h,n+1}$  por  $\frac{1}{2}(u_{jk}^{h,n+1} + u_{jk}^{h,n})$  y  $\lambda_{jk}^{h,s,n+1}$  por  $\frac{1}{2}(\lambda_{jk}^{h,s,n+1} + \lambda_{jk}^{h,s,n})$  luego de cada iteración. Esta sencilla modificación reduce sensiblemente el número de iteraciones, especialmente para lograr errores relativos pequeños.

#### b. Esquema iterativo red-black

Cada iteración consiste en el cálculo de la solución en todos los subdominios de  $\Omega$ . Para calcular la solución en un subdominio cualquiera  $\Omega_{jk}$ , usamos "información" que corresponde a los subdominios contiguos mediante la condición de Robin impuesta entre ellos. La idea de este esquema es usar "información" actualizada para acelerar la convergencia.



Consideremos el esquema de los subdominios de  $\Omega$  que se muestra en la figura 8.

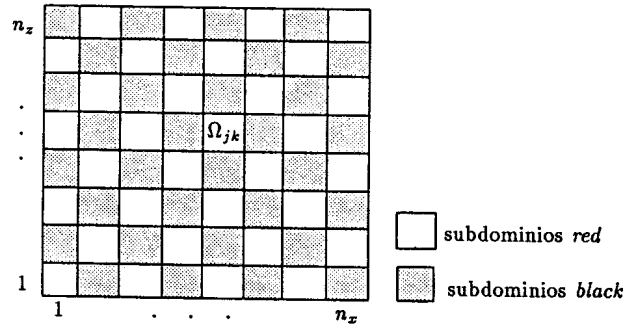


Figura 8 : Esquema red-black.

Cada iteración se realiza de la siguiente manera:

- i) Se resuelve el sistema en los subdominios *red* usando la solución y los multiplicadores de Lagrange de los subdominios contiguos *black* como condiciones de borde.
- ii) Se actualizan los multiplicadores de Lagrange para todos los subdominios *red*.
- iii) Se realizan los dos pasos anteriores en los subdominios *black*, usando la solución y los multiplicadores de Lagrange de los *red* calculados en i) y ii) como condición de borde.
- iv) Se relaja la solución según se explicó anteriormente.

Es posible además disminuir el tiempo de máquina según el modo en que este esquema *red-black* es implementado. De acuerdo con el trabajo de C. C. Douglas [9] esta reducción depende del tamaño del *cache* (memoria rápida) del procesador. La idea es usar los datos mientras se encuentran en el *cache* de manera que pasen por él solo una vez y no dos veces como ocurre en la implementación usual.

### c. Esquema multigrilla

Se implementó por último un esquema multigrilla de dos niveles. El procedimiento para resolver una malla de  $n_x$  por  $n_z$  elementos (ambos múltiplos de 2) es el siguiente:

- i) Se resuelve el problema para una malla "gruesa" de  $\frac{n_x}{2}$  por  $\frac{n_z}{2}$ .
- ii) Se interpolan la solución obtenida y los multiplicadores de Lagrange para los puntos de la malla de  $n_x$  por  $n_z$ .
- iii) Se resuelve el problema inicial utilizando como valores iniciales los obtenidos en ii).

El esquema multigrilla se realizó tomando como base el programa con la iteración de tipo *red-black* implementado de acuerdo con lo propuesto en [9] por C. C. Douglas.

Estas modificaciones se implementaron en un sistema Sun SPARC station 20 con procesador sun4m, memoria principal de 32 MB y memoria virtual de 63 MB. Las reducciones en el número de iteraciones y en el tiempo de máquina se muestran en la tabla 1 para una malla de  $64 \times 64$  y un error relativo de 0.0001.

	iteraciones	tiempo
sin relajacion	7919	7398.7 s
con relajacion	2626	2518.8 s
<i>red-black</i> (usual)	2066	1576.7 s
<i>red-black</i> (C. C. Douglas)	2066	1221.6 s
multigrilla	32 × 32: 679 64 × 64: 244	341.7 s

Tabla 1 : Número de iteraciones y tiempo de máquina.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un método iterativo de descomposición de dominio para resolver el problema magnetoteléurico directo bidimensional que permite obtener en forma simultánea aproximaciones de las tres componentes del campo electromagnético secundario. Esto constituye una de las principales ventajas del método y lo hace particularmente adecuado para el modelado magnetoteléurico.

Por otra parte, la solución en cada subdominio se alcanza resolviendo sistemas de  $4 \times 4$  por lo que no presenta las limitaciones de los métodos directos en cuanto al tamaño de los sistemas de ecuaciones involucrados. Por lo tanto el método de descomposición de dominio es adecuado para resolver grandes modelos bidimensionales y constituye una eficaz alternativa para modelado tridimensional.

Finalmente, si bien en este trabajo se utilizaron computadoras en serie, es importante destacar que el método de descomposición de dominio es especialmente adecuado para su implementación en computadoras de arquitectura en paralelo. La idea de la paralelización es resolver los problemas localizados en los subdominios utilizando distintos procesadores en forma simultánea. De este modo se obtiene una importante reducción en el tiempo de cálculo con respecto a su implementación en serie, como puede observarse en el trabajo [5] para modelado de flujos en medios porosos.

## REFERENCIAS

- [1] J. H. Coggon , *Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method*, Geophysics, Vol. 36, 1971, págs. 132-155.
- [2] J. Douglas, Jr., P. J. Paes Leme, F. Pereira, and L. M. Yeh, *A massively parallel iterative numerical algorithm for immiscible flow in naturally fractured reservoirs*, Flow in Porous Media, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 114, 1993, págs. 75-94.
- [3] J. Douglas, Jr., P. J. Paes Leme, J. E. Roberts, and J. Wang, *A parallel iterative procedure applicable to the approximate solution of second order partial differential equations by mixed finite element methods*, Numerical Mathematics, Vol. 65, 1993, págs. 95-108.
- [4] J. Douglas, Jr., F. Pereira and J. E. Santos, *A domain decomposition approach to the simulation of waves in dispersive media*, Technical Report # 247, 1995, Center for Applied Mathematics, Purdue University, Proceedings of the Third International Conference on Wave Propagation Phenomena, SIAM (G. Cohen ed.), 673-684.
- [5] J. Douglas, Jr., F. Pereira and L. M. Yeh, *A parallelizable characteristic scheme for two phase flow I: single porosity models*, Technical Report # 253, 1994, Center for Applied Mathematics, Purdue University.
- [6] L. Guarracino, *Un método iterativo paralelizable de descomposición de dominio para modelado magnetoteléurico*, Tesis de Licenciatura , 1995, Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas, U.N.L.P.
- [7] D. N. Arnold and F. Brezzi , *Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates*, R.A.I.R.O. Modélisation, Mathématique et Analyse Numérique, Vol. 19, 1985, págs. 7-32.
- [8] B. X. Fraeijs de Veubeke, *Stress function approach*. International Congress on the Finite Element Method in Structural Mechanics, Bournemouth, 1975.
- [9] C. C. Douglas, *Caching in with multigrid algorithms: problems in two dimensions*, próximo a publicarse.