

UN MÉTODO DE MENOR DEGENERACIÓN PARA PROBLEMAS DE PERTURBACIÓN SINGULAR

Enrique G. Banchio

Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N.
Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correos 916, 5000 Córdoba-Argentina

Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N.
Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correos 916, 5000 Córdoba-Argentina

Dean T. Mook

Department of Engineering Science and Mechanics
Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia 24061-0219

RESUMEN

En este trabajo presentamos un método directo para obtener la relación entre la carga crítica, las coordenadas críticas y el parámetro de imperfección. En estados críticos caracterizados por bifurcaciones, los ceros de la primera y segunda variación de la energía potencial del sistema perfecto son raíces múltiples. Por lo tanto los desarrollos de la carga crítica y de las coordenadas correspondientes no son en potencias enteras del parámetro de imperfección, lo cual impide la aplicación de métodos de perturbación regular. En la presente propuesta suponemos las expansiones para la carga crítica y las coordenadas correspondientes en términos de potencias arbitrarias del parámetro de imperfección. Luego aplicando el principio de menor degeneración, se determinan los exponentes y los coeficientes de las expansiones.

ABSTRACT

In this work, we describe a direct procedure for obtaining the relationships between the critical loads, the critical coordinates, and the amplitude of the imperfection. For critical states characterized as bifurcations the zeros of the first and second variations of the potential energy of the perfect system are always repeated roots. Thus, the expansions of the critical loads and coordinates do not go in integer powers of the imperfection parameter, and regular perturbation methods are not applicable. In the present approach we assume the expansions for the critical loads and corresponding coordinates in terms of arbitrary powers of the imperfections parameter. Then by the principle of least degeneracy, we determine the exponents and the coefficients of the expansions.

INTRODUCCIÓN

Las limitaciones prácticas nos impiden construir sistemas estructurales en forma precisa como fueron planeados y los sistemas físicos inevitablemente contienen pequeñas imperfecciones asociadas a imprecisiones geométricas y defectos de los materiales. Estas imperfecciones pueden cambiar drásticamente las respuestas de los sistemas. Resulta interesante estudiar la sensibilidad de dichos sistemas frente a pequeñas imperfecciones. En particular cuando se refleja con la pérdida de estabilidad del sistema imperfecto derivado como una perturbación de un sistema perfecto.

El análisis de sensibilidad a una imperfección determina el grado de perceptibilidad del sistema frente a dicha imperfección. Cuando se estudia la estabilidad de un sistema mediante consideraciones energéticas, se genera una familia de sistemas mediante la introducción de un parámetro de imperfección ε en la función de energía potencial total para obtener una función $V(Q_i, \Lambda, \varepsilon)$. Con $\varepsilon = 0$ se denota el sistema perfecto, y para valores no nulos de ε los sistemas imperfectos.

De todos los estados críticos, nos interesan en particular aquellos en lo que una pequeña imperfección provoca una reducción considerable de la carga máxima. Tales configuraciones se presentan en las bifurcaciones asimétricas y simétricas inestables. En estos casos, la relación carga máxima — imperfección, denotada por $\lambda(\varepsilon)$, presenta una pendiente infinita en $\varepsilon = 0$ por lo cual es imposible implementar algún método de perturbación regular [3], [4], [5]. En [5] se construye la sensibilidad de la carga crítica frente a imperfecciones mediante un desarrollo en series intermedio, en el que λ y ε se expanden en función de una componente de desplazamiento; luego se invierten las series y se construye la aproximación de λ en función de ε .

Este trabajo es una extensión del estudio de Godoy y Mook [1] de sistemas de un grado de libertad, para casos de múltiples grados de libertad. Para la exposición consideraremos un sistema especializado de gran utilidad tanto teórico como práctico en el cual la energía potencial V es lineal en el parámetro de carga y se escribe como

$$V(Q_i, \Lambda) = U(Q_i) - \Lambda E(Q_i)$$

donde U representa las deformaciones, E los desplazamientos y Λ la carga.

Introducimos la imperfección agregando un término de la forma

$$-\varepsilon B(Q_i)$$

con el nuevo parámetro ε que puede considerarse como la magnitud de la imperfección. Este tipo de imperfección se presenta cuando hay una imperfección geométrica inicial o la existencia de una pequeña fuerza no colineal a la carga que produce una deformación inicial.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Consideremos un sistema estructural cuya función de energía potencial total es de la forma

$$V = U(Q_i) - \Lambda E(Q_i) - \varepsilon B(Q_i)$$

Para estudiar la sensibilidad es conveniente realizar una expansión en serie de la energía potencial total a partir de un punto de equilibrio estable del sistema perfecto ϵ . Realizamos las aproximaciones de cada una de las componentes de V .

$$\begin{aligned} U(Q_i) &\approx \hat{U}_0 + \hat{U}_i Q_i + \frac{1}{2!} \hat{U}_{ij} Q_i Q_j + \frac{1}{3!} \hat{U}_{ijk} Q_i Q_j Q_k + \dots \\ E(Q_i) &\approx \hat{E}_0 + \hat{E}_i Q_i + \frac{1}{2!} \hat{E}_{ij} Q_i Q_j + \frac{1}{3!} \hat{E}_{ijk} Q_i Q_j Q_k + \dots \\ B(Q_i) &\approx \hat{B}_0 + \hat{B}_i Q_i + \frac{1}{2!} \hat{B}_{ij} Q_i Q_j + \frac{1}{3!} \hat{B}_{ijk} Q_i Q_j Q_k + \dots \end{aligned}$$

donde Q_i representan las coordenadas generalizadas para $i = 1, \dots, n$ con n el número de grados de libertad del sistema;

$$\hat{U}_{ij} = \left. \frac{\partial U}{\partial Q_i \partial Q_j} \right|_{\epsilon}, \quad \hat{E}_{ij} = \left. \frac{\partial E}{\partial Q_i \partial Q_j} \right|_{\epsilon}, \quad \hat{B}_{ij} = \left. \frac{\partial B}{\partial Q_i \partial Q_j} \right|_{\epsilon}.$$

Entonces escribimos el desarrollo de V como

$$\begin{aligned} V &= \hat{U}_0 - \Lambda \hat{E}_0 - \epsilon \hat{B}_0 + \hat{U}_i Q_i - \Lambda \hat{E}_i Q_i - \epsilon \hat{B}_i Q_i \\ &+ \frac{1}{2!} \hat{U}_{ij} Q_i Q_j - \frac{1}{2!} \Lambda \hat{E}_{ij} Q_i Q_j - \frac{1}{2!} \epsilon \hat{B}_{ij} Q_i Q_j + \dots \end{aligned}$$

Un estado crítico está determinado por las condiciones de equilibrio, y de estabilidad [2],[5];

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i} = V_i = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Q_i \partial Q_j} X_j = V_{ij} X_j = 0.$$

Resulta entonces

$$\begin{aligned} V_i &= \hat{U}_i - \Lambda \hat{E}_i - \epsilon \hat{B}_i + \hat{U}_{ij} Q_j - \Lambda \hat{E}_{ij} Q_j - \epsilon \hat{B}_{ij} Q_j \\ &+ \frac{1}{2!} \hat{U}_{ijk} Q_j Q_k - \frac{1}{2!} \Lambda \hat{E}_{ijk} Q_j Q_k - \frac{1}{2!} \epsilon \hat{B}_{ijk} Q_j Q_k \\ &+ \frac{1}{3!} \hat{U}_{ijkl} Q_j Q_k Q_l - \frac{1}{3!} \Lambda \hat{E}_{ijkl} Q_j Q_k Q_l - \frac{1}{3!} \epsilon \hat{B}_{ijkl} Q_j Q_k Q_l + \dots = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} V_{ij} X_j &= \left[\hat{U}_{ij} - \Lambda \hat{E}_{ij} - \epsilon \hat{B}_{ij} + \hat{U}_{ijk} Q_k - \Lambda \hat{E}_{ijk} Q_k - \epsilon \hat{B}_{ijk} Q_k + \frac{1}{2!} \hat{U}_{ijkl} Q_k Q_l \right. \\ &- \frac{1}{2!} \Lambda \hat{E}_{ijkl} Q_k Q_l - \frac{1}{2!} \epsilon \hat{B}_{ijkl} Q_k Q_l + \frac{1}{3!} \hat{U}_{ijklm} Q_k Q_l Q_m - \frac{1}{3!} \Lambda \hat{E}_{ijklm} Q_k Q_l Q_m \\ &\left. - \frac{1}{3!} \epsilon \hat{B}_{ijklm} Q_k Q_l Q_m + \dots \right] X_j = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Con el propósito de obtener las relaciones entre la carga máxima y el parámetro de imperfección $\lambda(\epsilon)$, y entre las coordenadas correspondientes y la imperfección $Q_i(\epsilon)$ proponemos los siguientes desarrollos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda_c + \lambda_1 \epsilon^M \\ Q_j &= q_{jc} + q_{j1} \epsilon^N \\ X_j &= x_{jc} + x_{j1} \epsilon^O \end{aligned} \quad (3)$$

Donde $\lambda_c, \lambda_{1c}, q_{jc}, q_{j1}, x_{jc}, x_{j1}$ con $j = 1, \dots, n$ son reales y M, N, O positivos. Esta forma de realizar el análisis de perturbaciones es la diferencia clave entre el presente trabajo y aquellos que se desprenden de la teoría de Thompson y Hunt [5]. Introducimos los desarrollos (3) en la ecuación de equilibrio (1), y luego de agrupar por potencias de ε y teniendo en cuenta las identidades

$$E_i^c = V_i^c, \quad E_{ij}^c = V_{ij}^c, \quad E_{ijk}^c = V_{ijk}^c, \quad \text{etc.} \quad (3)$$

$$B_i^c = \dot{V}_i^c, \quad B_{ij}^c = \dot{V}_{ij}^c, \quad B_{ijk}^c = \dot{V}_{ijk}^c, \quad \text{etc.} \quad (4)$$

donde $(\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial \lambda}$ y $(\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial \varepsilon}$. La ecuación de equilibrio queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & V_i^c + \dot{V}_i^c \varepsilon + \lambda_1 V_i^c \varepsilon^M + V_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^N + \dot{V}_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{1+N} + \lambda_1 V_{ij}^c q_{j1} \varepsilon^{M+N} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{2N} \\ & + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1+2N} + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \varepsilon^{M+2N} + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{3N} \\ & + \frac{1}{3!} \dot{V}_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+3N} + \frac{1}{3!} \lambda_1 V_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{M+3N} + \frac{1}{4!} V_{ijklm}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{4N} \\ & + \frac{1}{4!} \dot{V}_{ijklm}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{1+4N} + \frac{1}{4!} \lambda_1 V_{ijklm}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{M+4N} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

donde $()^c$ denota la evaluación en el punto crítico $(Q_{ic}, \lambda_c, 0)$. Ahora introducimos los desarrollos (3) en la ecuación de estabilidad crítica (2) y después de reordenar los términos, obtenemos

$$\begin{aligned} & V_{ij}^c x_{jc} + \dot{V}_{ij}^c x_{jc} \varepsilon + \lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} \varepsilon^M + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^N + V_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^O + \dot{V}_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{1+O} \\ & + \lambda_1 V_{ij}^c x_{j1} \varepsilon^{M+O} + V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{N+O} + \dot{V}_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{1+N+O} + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} \varepsilon^{M+N+O} \\ & + \dot{V}_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{1+N} + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \varepsilon^{M+N} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2N} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+2N} \\ & + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{M+2N} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{2N+O} + \frac{1}{2!} \dot{V}_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{1+2N+O} \\ & + \frac{1}{2!} \lambda_1 V_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} \varepsilon^{M+2N+O} + \frac{1}{3!} V_{ijklm}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{3N} + \frac{1}{3!} \dot{V}_{ijklm}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{1+3N} \\ & + \frac{1}{3!} \lambda_1 V_{ijklm}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{M+3N} + \frac{1}{3!} V_{ijklm}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{3N+O} \\ & + \frac{1}{3!} \dot{V}_{ijklm}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{1+3N+O} + \frac{1}{3!} \lambda_1 V_{ijklm}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \varepsilon^{M+3N+O} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

A partir de las ecuaciones de equilibrio (6) y de estabilidad crítica (7) tomando $\varepsilon = 0$ ambas ecuaciones se reducen a $V_i^c = 0$ y $V_{ij}^c x_{jc} = 0$ de las cuales obtenemos los valores críticos λ_c, q_{jc} y x_{jc} . Como V_{ij} es singular en el punto crítico, obtendremos la dirección crítica x_{jc} como función de alguna de las coordenadas a la cual debemos asignarle algún valor. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $x_{1c} = 1$. Luego, se determinan los exponentes M, N y O de los desarrollos (3) de manera tal de obtener las ecuaciones menos degeneradas, es decir las que retengan la mayor cantidad de información posible para poder obtener los coeficientes. A continuación consideraremos para este tipo de imperfección el caso de un punto crítico correspondiente a una bifurcación simétrica.

BIFURCACIÓN SIMÉTRICA

En el caso de un punto crítico distinto correspondiente a una bifurcación simétrica, caracterizada por

$$\begin{aligned} V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} &= 0 \\ V_i^c x_{ic} &= 0 \\ \dot{V}_i^c x_{ic} &\neq 0 \end{aligned}$$

escogemos $M = \frac{2}{3}$ y $N = \frac{1}{3}$, reemplazamos estos valores en la ecuación de equilibrio (6) y agrupamos por potencias de ε

$$\begin{aligned} \underbrace{V_i^c}_{=0} + [V_{ij}^c q_{j1}] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 V_i^c + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c q_{j1} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + \left[\dot{V}_i^c + \lambda_1 V_{ij}^c q_{j1} + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^c q_{j1} q_{k1} q_{l1} \right] \varepsilon^{\frac{4}{3}} \\ + \dots = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

A partir de esta expresión retenemos el término de menor orden que conduce a la ecuación

$$V_{ij}^c q_{j1} = 0 \quad (9)$$

Como V_{ij} en el punto crítico es singular y además, x_{jc} satisface $V_{ij}^c x_{jc} = 0$ con $x_{1c} = 1$. Entonces la ecuación anterior nos permite escribir

$$q_{j1} = \alpha x_{jc} \quad \text{con } \alpha \neq 0 \quad (10)$$

Aplicando el mecanismo de contracción a la ecuación de equilibrio (8)

$$\begin{aligned} \left[V_{ij}^c x_{ic} q_{j1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 \underbrace{V_i^c x_{ic}}_{=0} + \frac{1}{2!} V_{ijk}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + \left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} q_{j1} \right. \\ \left. + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} q_{j1} q_{k1} q_{l1} \right] \varepsilon^{\frac{4}{3}} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

reemplazando q_{j1} por (10), obtenemos

$$\begin{aligned} \left[\alpha \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} x_{jc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 \underbrace{V_i^c x_{ic}}_{=0} + \frac{1}{2!} \alpha^2 \underbrace{V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + \left[\dot{V}_i^c x_{ic} + \lambda_1 \alpha V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} \right. \\ \left. + \frac{1}{3!} \alpha^3 V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right] \varepsilon^{\frac{4}{3}} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

y luego tenemos la siguiente ecuación escalar

$$\dot{V}_i^c x_{ic} + \alpha \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \frac{\alpha^3}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} = 0 \quad (13)$$

Ahora elegimos $O = \frac{1}{3}$ y reemplazamos en la ecuación de estabilidad (7)

$$\begin{aligned} & \underbrace{V_{ij}^c x_{jc}}_{=0} + \left[V_{ij}^c x_{j1} + V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} + V_{ijk}^c x_{j1} q_{k1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ & + \left[\dot{V}_{ij}^c x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{j1} + \lambda_1 V_{ijk}^c x_{jc} q_{k1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{j1} q_{k1} q_{l1} + \frac{1}{3!} V_{ijklm}^c x_{jc} q_{k1} q_{l1} q_{m1} \right] \varepsilon^{\frac{4}{3}} \\ & + \dots = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Sustituimos q_{j1} por (10) y nos queda la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \underbrace{V_{ij}^c x_{jc}}_{=0} + \left[V_{ij}^c x_{j1} + \alpha V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{jc} + \alpha V_{ijk}^c x_{j1} x_{kc} + \frac{1}{2!} \alpha^2 V_{ijkl}^c x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ & + \left[\dot{V}_{ij}^c x_{jc} + \lambda_1 V_{ij}^c x_{j1} + \alpha \lambda_1 V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} + \frac{1}{2!} \alpha^2 V_{ijkl}^c x_{j1} x_{kc} x_{lc} + \right. \\ & \left. \alpha^3 \frac{1}{3!} V_{ijklm}^c x_{jc} x_{kc} x_{lc} x_{mc} \right] \varepsilon^{\frac{4}{3}} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

que se reduce a

$$V_{ij}^c x_{j1} + \alpha V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} = 0 \quad (16)$$

Como normalizamos x_{jc} tal que $x_{1c} = 1$, entonces el desarrollo $x_1(\varepsilon) = x_{1c} + x_{11}\varepsilon^O + \dots$ tiene $x_{11} = x_{12} = \dots = 0$. La ecuación anterior queda de la forma

$$V_{ij}^c x_{j1} = -\alpha V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} - V_{i1}^c \underbrace{x_{11}}_{=0}$$

es decir

$$V_{ij}^c x_{j1} = -\alpha V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} \quad \text{para } j = 2, \dots, n \quad (17)$$

Introducimos el cambio de variable

$$y_{j1} = \frac{1}{\alpha} x_{j1} \quad \text{o sea } x_{j1} = \alpha y_{j1} \quad \text{con } y_{11} = 0 \quad (18)$$

Reemplazando en (17) obtenemos el siguiente sistema

$$V_{ij}^c y_{j1} = V_{ijk}^c x_{jc} x_{kc} \quad (19)$$

que nos permite calcular para y_{j1} . Ahora aplicamos el mecanismo de contracción a la ecuación de estabilidad (14)

$$\begin{aligned} & \left[\underbrace{V_{ij}^c x_{ic}}_{=0} x_{j1} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} \\ & + \left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + V_{ijk}^c x_{ic} x_{j1} q_{k1} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} q_{k1} q_{l1} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Reemplazamos por q_{j1} por (10) y x_{j1} por (18)

$$\left[\alpha \underbrace{V_{ij}^c x_{ic} y_{j1}}_{=0} + \alpha \underbrace{V_{ijk}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc}}_{=0} \right] \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \left[\lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} + \alpha^2 V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} x_{kc} + \frac{\alpha^2}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right] \varepsilon^{\frac{2}{3}} + \dots = 0 \quad (21)$$

y tenemos la siguiente ecuación escalar

$$\alpha^2 \left(V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} x_{kc} + \frac{1}{2!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right) + \lambda_1 V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} = 0 \quad (22)$$

A partir de la ecuación (13) despejamos λ_1

$$\lambda_1 = - \frac{\left(\dot{V}_i^c x_{ic} + \frac{\alpha^3}{3!} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right)}{\alpha \dot{V}_{ij}^c x_{ic} x_{jc}} \quad (23)$$

Sustituyendo (23) en la ecuación (22) queda

$$\alpha^3 \left(V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} x_{kc} + \frac{1}{3} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} \right) - \dot{V}_i^c x_{ic} = 0 \quad (24)$$

Esta última ecuación nos permite encontrar α

$$\alpha = \left(\frac{\dot{V}_i^c x_{ic}}{V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} x_{kc} + \frac{1}{3} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (25)$$

Una vez obtenida α , sustituyendo en (23) calculamos λ_1 ; luego reemplazando en (10) y (18) obtenemos q_{j1} y x_{j1} . Disponemos entonces de los desarrollos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda_c + \lambda_1 \varepsilon^M \\ Q_j &= q_{jc} + q_{j1} \varepsilon^N \\ X_j &= x_{jc} + x_{j1} \varepsilon^O \end{aligned}$$

La selección de M , N , O ha sido presentada sin mayor discusión. Sin embargo, una elección inapropiada de M , N , O hubiera llevado a resultados inconsistentes. El método actual de búsqueda que se emplea en este trabajo es el prueba y error; sin embargo, los autores están investigando otras posibilidades basadas en optimización.

Por razones de espacio, los desarrollos en el presente trabajo se limitan a términos de "primer orden" en la ecuación (3), o sea el primer conjunto de coeficientes. El procedimiento para encontrar el término siguiente en la serie (3), incluyendo los exponentes desconocidos, es idéntico al presentado anteriormente. Así mismo, sólo presentamos aquí el caso de bifurcación simétrica. Bifurcación asimétrica ha sido solucionada por los autores, así como imperfecciones que afectan el parámetro de carga. Sin embargo, eso será tratado en otro trabajo.

EJEMPLO DE BIFURCACIÓN SIMÉTRICA

Para ejemplificar lo expuesto anteriormente, consideremos el problema discutido por Thompson [5]. En el cual una estructura de largo ℓ articulada en ambos extremos cargada axialmente por P que reposa sobre una fundación elástica de rigidez K por unidad de longitud, como se muestra en la Figura 1. La estructura se asume inextensible longitudinalmente y de rigidez a la flexión B . Para representar una imperfección suponemos que la estructura soporta una pequeña carga transversal ε en su punto medio. Las dos cargas mantienen su magnitud y dirección mientras la estructura flexiona.

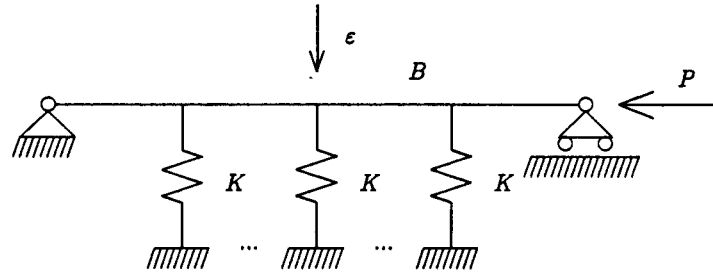


Figura 1: Estructura sobre fundación elástica

La energía potencial total aproximada en función de u_i , P y ε resulta

$$V(u_i, P, \varepsilon) = \frac{1}{2} \hat{U}_{ij} u_i u_j + \frac{1}{24} \hat{U}_{ijkl} u_i u_j u_k u_l + \dots - P \left[\frac{1}{2} \hat{E}_{ij} u_i u_j + \frac{1}{24} \hat{E}_{ijkl} u_i u_j u_k u_l + \dots \right] - \varepsilon \hat{\phi}_i u_i, \quad (26)$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ij} &= U_{ij}(0) = 0 && \text{para } i \neq j, \\ \hat{U}_{ii} &= U_{ii}(0) = \frac{B\ell}{2} \left(\frac{i\pi}{\ell} \right)^4 + \frac{1}{2} K\ell, \\ \hat{E}_{ij} &= E_{ij}(0) = 0 && \text{para } i \neq j, \\ \hat{E}_{ii} &= E_{ii}(0) = \frac{\ell}{2} \left(\frac{i\pi}{\ell} \right)^2, \\ \hat{U}_{ijkl} &= U_{ijkl}(0) = 12B \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^6 \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l i^2 j^2 k l \int_0^\ell \sin \frac{i\pi x}{\ell} \sin \frac{j\pi x}{\ell} \cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{l\pi x}{\ell} dx, \\ \hat{E}_{ijkl} &= E_{ijkl}(0) = 3ijklm \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^4 \int_0^\ell \cos \frac{i\pi x}{\ell} \cos \frac{j\pi x}{\ell} \cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{l\pi x}{\ell} dx, \\ \hat{\phi}_i &= \phi_i(0) = +1 && \text{para } i = 1, 5, 9, \dots \\ \hat{\phi}_i &= \phi_i(0) = -1 && \text{para } i = 3, 7, 11, \dots \\ \hat{\phi}_i &= \phi_i(0) = 0 && \text{para } i = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

Como podemos ver tanto U_{ij} como E_{ij} están en forma diagonal y podemos determinar los valores críticos directamente. Resulta $u_{ic} = 0$ y la carga crítica

$$P^i = \frac{\hat{U}_{ij}}{\hat{E}_{ij}},$$

dando

$$\frac{P^i}{B(\pi/\ell)^2} = i^2 + \frac{1}{i^2}\gamma,$$

donde $\gamma = K/B(\pi/\ell)^4$. Debido a la existencia de fundación, la menor carga crítica no se da necesariamente para $i = 1$. Por lo tanto supondremos que la menor carga crítica ocurre para $P^c = P^t$ por lo que la dirección crítica queda determinada por $x_{tc} = 1$ y $x_{ic} = 0$ para $i \neq t$. Con estos resultados podemos aplicar las fórmulas de la sección anterior para obtener el primer término de los desarrollos 3. Calculamos α por la ecuación (25). Para lo cual necesitamos

$$\begin{aligned} \dot{V}_i^c x_{ic} &= -\hat{\phi}_i \\ V_{ijk}^c x_{ic} y_{j1} x_{kc} + \frac{1}{3} V_{ijkl}^c x_{ic} x_{jc} x_{kc} x_{lc} &= \frac{3}{8} B \ell \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^6 t^2 (t^4 - 3\gamma), \\ V_{ij}^c x_{ic} x_{jc} &= -\frac{\ell}{2} \left(\frac{t\pi}{\ell}\right)^2 \end{aligned}$$

que introducidos en (25) nos conduce a

$$\alpha = \left(\frac{-8\hat{\phi}_i \ell^5}{B\pi^6 t^2 (3\gamma + t^4)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Reemplazando en (23) calculamos p_1

$$p_1 = \frac{3B\pi^4 (3\gamma - t^4) \left(\frac{-8\hat{\phi}_i \ell^5}{B\pi^6 t^2 (-3\gamma + t^4)} \right)^{\frac{1}{2}}}{8\ell^4}$$

que reescribimos como

$$p_1 = -\frac{3}{2} \left(\frac{B}{\ell^2 t^4} \right)^{\frac{1}{2}} (t^4 - 3\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

Por último obtenemos los desarrollos

$$\begin{aligned} P^M(\varepsilon) &= P^c - \frac{3}{2} \left(\frac{B}{\ell^2 t^4} \right)^{\frac{1}{2}} (t^4 - 3\gamma)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ u_i(\varepsilon) &= \left(\frac{-8\hat{\phi}_i \ell^5}{B\pi^6 t^2 (3\gamma + t^4)} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad \text{y } u_i(\varepsilon) = 0 \quad \text{para } i \neq t \end{aligned}$$

REFERENCIAS

1. GODOY L. A. and MOOK DEAN T., *Higher-order sensitivity to imperfections in bifurcation buckling analysis*, International Journal of Solids and Structures (en prensa) (1995).
2. J. G. A. CROLL and A. C. WALKER, *Elements of structural stability*, Macmillan, London, 1972.
3. A. H. NAYFEH, *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
4. J. G. SIMMONDS and MANN J. E., *A first look at perturbation theory*, R. E. Krieger Publishing Company, 1986.
5. J. M. T. THOMPSON and G. W. HUNT, *A general theory of elastic stability*, John Wiley & Sons, New York, 1973.