

**UN CODIGO BEM-3D VECTORIZABLE PARA
EL PROBLEMA DE NEUMANN EXTERIOR**

por J. D'Elía, M. Storti y S. Idelsohn

Grupo de Tecnología Mecánica del INTEC

Universidad Nacional del Litoral y CONICET

Güemes 3450, 3000, Santa Fe, Argentina

e-mail: rngtm@arcrde.edu.ar, Phone/Fax:54-42-55.66.73

RESUMEN

Se consideran algunos aspectos de la aplicación del Método de los Elementos de Borde 3D (BEM) para el problema potencial exterior de Neumann en aero/hidro mecánica, con resolutores iterativos de Krylov para un sistema algebraico denso no simétrico. Además se muestra una forma debilitada para el computo del coeficiente de presión en los nodos de la malla superficial. Finalmente se mencionan algunos aspectos de una codificación opcional sobre un procesador vectorial.

ABSTRACT

Some aspects of the application of the 3D Boundary Element Method (BEM) for the Neumann exterior potential problem in aero/hydro mechanics are considered with the Krylov iterative solvers for a dense non-symmetric algebraic system. Also a weak form for the pressure coefficient computation at the nodes of the surface mesh is shown. Finally some aspects of an optional codification over a vector processor are mentioned.

1. INTRODUCCION

Uno de los problemas en ingeniería aero/hidro mecánica es el diseño de las *formas* de las superficies de estructuras inmersas en un escurrimiento, el cual presenta ciertas peculiaridades que lo distinguen de otros tipos de problemas de la mecánica de los medios continuos y son las que promueven el tipo de método numérico que puede aplicarse con éxito, pudiéndose mencionar que [1]

- i) Las formas de las superficies de las estructuras de interés práctico son frecuentemente muy complicadas, por ejemplo, aviones con complejas configuraciones, hélices marinas o ventiladores. Por esto los métodos aplicables solo a formas suaves simples no resultan suficientes, ni tampoco aquellos cuyos costos computacionales involucrados rápidamente se incrementan con la complejidad de la forma de la superficie de la estructura.
- ii) Las cantidades de flujo resultan muy sensibles a los pequeños detalles de las formas de superficies de las estructuras, por lo que la diferencia entre un buen y un mal perfil aero/hidro mecánico resulta bastante sutil. Así un método útil debe ser capaz de discriminar entre formas un tanto similares. Por ejemplo, una magnitud muy sensible a los detalles de las formas de las superficies es el denominado coeficiente de presión, presión ejercida por el escurrimiento sobre la superficie de la estructura. Este coeficiente de presión es una magnitud de interés para el diseño ingenieril, y su suavidad depende de la continuidad de la derivada del tensor de curvatura de la superficie.
- iii) Los resultados del cálculo sobre la superficie del objeto suelen ser de interés principal para los ingenieros de diseño.
- iv) Un requerimiento común en todos los problemas es que la preparación de los datos y la posterior interpretación de los resultados, resulte práctico para los ingenieros de diseño minimizando los riesgos de errores.

Los métodos numéricos empleados para la discretización de los problemas de la mecánica del continuo se los puede clasificar en tres grupos principales: Finite Difference Methods (FDM), Finite Element Method (FEM) y Boundary Element Method (BEM), siendo posible una combinación optimizada entre ellos. Los métodos FDM y FEM son de discretización en *volumen* de todo el campo de flujo, mientras que BEM [5] es una discretización solo sus *superficies* de discontinuidad. Dentro de BEM puede identificarse la subclase del Método de Paneles en sus numerosas variantes, la cual puede reconocerse como una especialización de BEM para flujo potencial 3D en ingeniería aero/hidro mecánica. El problema de flujo potencial exterior a objetos sumergidos corresponde matemáticamente al problema de Neumann exterior [1]. Clásicamente su solución puede hallarse por medio de la tercera fórmula de Green, con integrales sobre las superficies de discontinuidad para las densidades superficiales de una capa (1-polar) y de dos capas (2-polar) ambas desconocidas sobre ellas. La Formulación de Morino [1] conduce a una ecuación integral de Fredholm para la densidad 2-polar, mientras que la otra densidad es hallada por la aplicación de la condición de borde. Para el problema discreto se puede emplear un método de paneles de bajo orden, el cual permite la integración exacta de los coeficientes de influencia 1-polar y 2-polar. La superficie es aproximada mediante una poliédrica donde sus caras son los paneles. Mediante una técnica de colocación por puntos se obtiene un sistema algebraico lineal denso no simétrico, donde la matriz del sistema es la matriz de influencia 2-polar, mientras que la matriz 1-polar resulta incluida en el vector independiente. Este sistema puede resolverse por métodos directos e iterativos, en particular los resolvidores iterativos de Krylov [2,3]. En una solución iterativa el principal costo en el tiempo de CPU es la evaluación de la matriz del sistema. Por esta razón puede proponerse su reemplazo por una matriz del sistema aproximada mucho más rápida de calcular.

2. DISCRETIZACION

La discretización de la Formulación de Morino puede describirse en tres niveles interrelacionados: aproximación de la superficie geométrica, evaluación de las integrales n-polares y sistema algebraico aproximado lineal.

2.1 Superficie Poliédrica

Para una aproximación de la superficie geométrica Γ se puede adoptar paneles poligonales, dando lugar a una superficie poliédrica Γ^E de E paneles, con las usuales condiciones: i) los paneles no se *sobre-enciman* entre si, ii) no existen *huecos* entre ellos (figura 1).

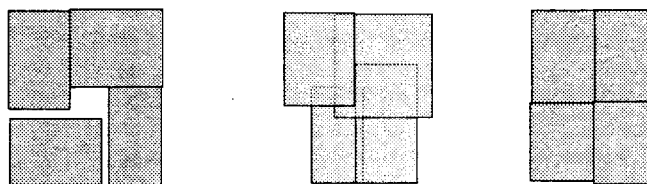


Figura 1: paneles no admisibles: con huecos (izq.), sobre-encimados (centr.); paneles admisibles (der.).

En las aplicaciones prácticas usualmente se emplean paneles triangulares o cuadriláteros, esto es, cada panel es un polígono (plano o alabeado) de $n_p = 3, 4$ vértices o nodos. Para el caso de paneles planos es clara la necesidad de refinar convenientemente aquellas zonas donde las superficies a discretizar presenten una curvatura apreciable. En forma

análoga a FEM para la definición de la malla se debe generar una tabla de coordenadas de los nodos y una tabla de conectividad de los mismos. En la primera se almacenan las coordenadas cartesianas 3D de todos los nodos de malla (vértices de los paneles), mientras que en la segunda se almacenan los nodos asociados a cada panel. Dado que la técnica de colocación no hace uso de estos nodos pueden admitirse nodos superpuestos, es decir, que no se requiere el concepto de contiguidad de los paneles, como en el caso de FEM. Esto otorga una mayor flexibilidad en la generación de la malla, por ejemplo, cuando se pegan un conjunto de submallas parciales. El único cuidado es la de asegurar que la secuencia de nodos en cada panel sea tal que den lugar a un versor normal orientado hacia el dominio exterior Ω^e .

2.2 Integrales n-polares

Para la evaluación de las integrales 1-polar y 2-polar, puede optarse por un método de bajo orden, donde se supone que la densidad respectiva es constante en cada panel y se la extrae fuera del operador integral. Un posterior empleo del teorema de la divergencia 2D permite reemplazar las integrales de superficie sobre cada panel por sus integrales de línea equivalentes, efectuadas sobre el perímetro del mismo. De esta forma, las expresiones analíticas obtenidas resultan solo singulares para puntos ubicados sobre dicho perímetro, por lo que será admisible emplear los *centroides* de los paneles como puntos de colocación. Estas integrales analíticas dan lugar al factor 2-polar A_{ij} y al factor 1-polar C_{ij} , definidos por

$$C_{ij} = \int_{\Gamma_j} d\Gamma_x \frac{1}{r} \quad ; \quad A_{ij} = \int_{\Gamma_j} d\Gamma_x \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r}$$

donde $r = |x - x_i|$ es el vector distancia relativa entre el punto de colocación x_i y el elemento superficial de integración $d\Gamma_x$ del panel plano j , de área Γ_j y versor normal ν . La expresión hallada para el factor 1-polar C_{ij} , considerado como una función de las coordenadas p, q, η del punto de observación (figura 3), verifica las propiedades clásicas comportamiento del potencial de una capa (figura 2): i) es una función simétrica de la distancia η entre el punto de medición del potencial al plano que contiene al panel, esto es, $C(p, q, \eta) = C(p, q, -\eta)$, ii) las tangentes a la curva $C(p, q, \eta) = f(\eta)$ en el origen $\eta = 0$ son finitas y de signo opuesto, esto es, la derivada $\partial C / \partial \eta$ presenta un salto finito al atravesar el plano del panel. En la figura 3 se muestra la intensidad del factor 1-polar $C(p, q, \eta)$ para puntos (p, q, η) sobre un plano α paralelo al del panel, para dos cotas η diferentes.

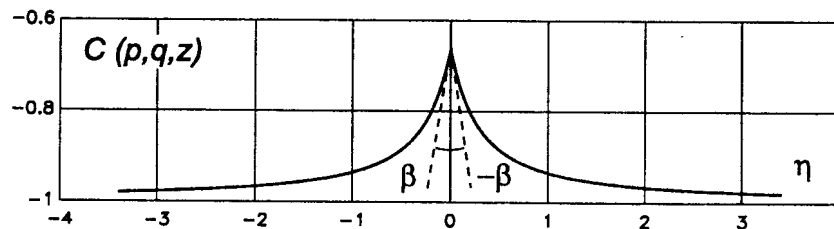


Figura 2: simetría del factor 1-polar $C(p, q, \eta)$ con respecto al plano del panel.

Análogamente, la expresión hallada para el factor 2-polar A_{ij} verifica las propiedades clásicas comportamiento del potencial de dos capas (figura 4): i) es una función anti-simétrica de la distancia η entre el punto de medición del potencial al plano que contiene

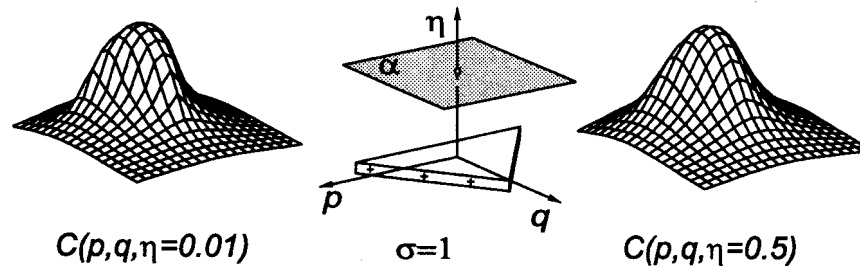


Figura 3: intensidad del factor 1-polar $C(p, q, \eta)$ en el plano α , para las cotas: $\eta = 0.01$ (izq.), $\eta = 0.50$ (der.).

al panel, esto es, $A(p, q, \eta) = -A(p, q, -\eta)$, ii) las tangentes a la curva $A(p, q, \eta) = f(\eta)$ en el origen $\eta = 0$ son finitas y del mismo signo, esto es, la derivada $\partial A / \partial \eta$ permanece continua al atravesar el plano del panel. En la figura 5 se muestra el comportamiento del factor 2-polar $A(p, q, \eta)$ para puntos (p, q, η) sobre un plano α paralelo al del panel, para dos cotas η diferentes.

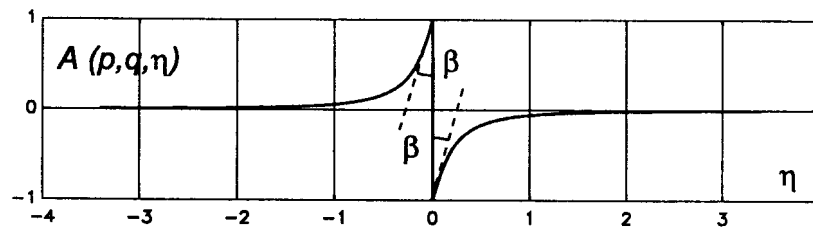


Figura 4: antisimetría del factor 2-polar $A(p, q, \eta)$ con respecto al plano del panel.

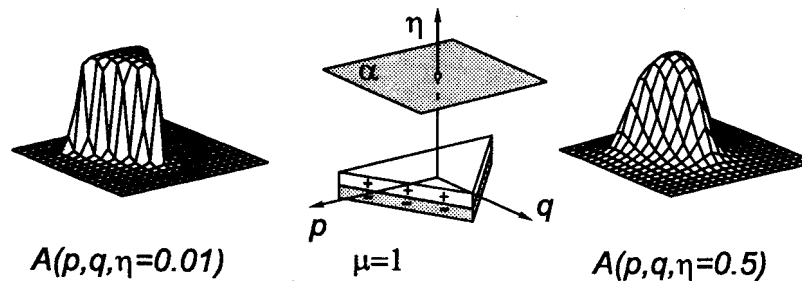


Figura 5: intensidad del factor 2-polar $A(p, q, \eta)$ en el plano α , para las cotas: $\eta = 0.01$ (izq.), $\eta = 0.5$ (der.).

La interpretación física de las matrices de influencia 2-polar A y 1-polar C , puede describirse de la siguiente manera: i) cada coeficiente A_{ij} de la matriz 2-polar representa el potencial medido en cada centroide i , originado por el panel fuente j con densidades

2-polar unitaria $\mu_j = 1$ y 1-polar nula $\sigma_j = 0$. ii) cada coeficiente C_{ij} de la matriz 1-polar representa el potencial medido en cada centroide i , originado por el panel fuente j con densidades 1-polar unitaria $\sigma_j = 1$ y 2-polar nula $\mu_j = 0$.

2.3 Sistema Algebraico Aproximado Lineal

La formulación integral de Morino puede ser aproximada en forma numérica por el Método de Elementos de Borde [5]. Este método reduce la ecuación integral lineal a un sistema algebraico de ecuaciones lineales y usualmente tres opciones son utilizadas para ello: cuadratura de Nyström, colocación por puntos o una técnica de Galerkin. Con la segunda opción y con los centroides como puntos de colocación, se obtiene un Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales (SEAL) de la forma $As = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ es la matriz de influencia 2-polar, n es el número de paneles, $s \in \mathbb{R}^{n,1}$ es el vector densidad 2-polar incógnita, $b \in \mathbb{R}^{n,1}$ es el vector de carga del sistema e igual a $b = Cu$, donde $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ es la matriz de influencia 1-polar, $u \in \mathbb{R}^{n,1}$ es el vector de la componente normal de la velocidad no perturbada, cambiada de signo y evaluada en cada centroide, dado por el producto escalar $u_j = -(b_j, U_j)$, para $j = 1, 2, \dots, n$, donde b_j, U_j son el versor binormal y la velocidad no perturbada en el centroide del panel plano j . Así el número de puntos de colocación elegido resulta igual al número de densidades dipolares incógnitas, de modo que la matriz del sistema algebraico resulte cuadrada.

3. MATRIZ 2-POLAR EXACTA Y MIXTA

Sobre el Sistema Algebraico de Ecuaciones Lineales (SEAL), pueden mencionarse algunas observaciones.

3.1 Número de Palabras y Tiempo de CPU

En problemas de interés práctico y dado que la matriz del sistema es en general llena, el número n^2 de coeficientes 2-polares a ser calculados, puede fluctuar entre un millón (8 MB) (1,000 paneles) a 400 millones (3,200 MB) (20,000 paneles), donde los MB estimados son para su almacenamiento en memoria en palabras de doble precisión. Además su cómputo involucra funciones trascendentales, lo que insume un apreciable mayor tiempo de CPU que el empleo de expresiones exclusivamente algebraicas. Si se emplea un método de resolución iterativo del sistema algebraico de ecuaciones, el tiempo de CPU más significativo lo absorbe el cómputo del producto matriz por vector. Si la dimensión de la matriz no permite tenerla almacenada en la RAM, es clara la necesidad de hacer la evaluación de estos coeficientes lo más eficiente posible. En la práctica, en la mayoría de los métodos iterativos industriales implementados, este cálculo computacional es por lejos el más caro en tiempo de CPU.

3.2 Requerimientos de Memoria RAM

Por otra parte los MB estimativos para la matriz del sistema, muestran una dificultad computacional: el empleo de los métodos directos para la resolución del SEAL, resulta rápidamente limitada por la RAM disponible usualmente, tanto en microcomputadores personales, como en estaciones de trabajo. Esta es una razón para explorar el rendimiento de los métodos iterativos en la resolución de un SEAL donde la matriz del sistema A exhibe las siguientes propiedades más sobresalientes: en general llena, no simétrica y con número de condición relativamente bajo. En esta formulación, el número de condición n_c de la matriz depende de la regularidad de la geometría de la malla, pero no del tamaño h^e de sus paneles, por lo que no empeora por refinamiento. Típicamente el número de condición será alto para el caso de mallar un par de superficies relativamente muy próximas entre sí, por ejemplo, superficies alares o álabes delgados, y será bajo para el caso de mallar superficies muy regulares.

3.3 Campo Dipolar Cercano y Lejano

Para mejorar el rendimiento de la resolución iterativa en un código industrial, se puede aprovechar el hecho que un panel dipolar visto desde lejos se lo puede considerar como un dipolo puntual. Esto permite emplear una expresión simplificada mucho más rápida de evaluar para el campo dipolar que induce. Esta observación permite introducir la siguiente distinción para la matriz dipolar: una matriz dipolar *exacta* A_e , donde todos sus coeficientes son calculados con la integral de campo cercano, y una matriz dipolar *mixta* A_m , donde una fracción grande de sus coeficientes son calculados con una integral aproximada para el campo lejano, quedando una pequeña fracción remanente a ser calculados con la integral de campo exacta. Resulta claro que un empleo exclusivo de una matriz dipolar mixta introduce un error de consistencia, pero puede proponerse un esquema iterativo mixto, donde se emplean convenientemente ambas matrices. En la práctica se encuentra suficiente que solo deben calcularse en forma analítica, un porcentaje relativamente bajo de los coeficientes, del orden del 5 %. Al calcularse en forma asintótica aproximadamente un 95 % de los coeficientes de la matriz dipolar, se gana rapidez de cómputo en una relación con la exacta de aproximadamente (8:1), esto es, 8 evaluaciones de la matriz mixta insume aproximadamente el mismo tiempo que 1 evaluación de la matriz exacta. Por otra parte, las discrepancias entre la matriz exacta A_e y la mixta A_m , pueden medirse a través del número de condición del producto matricial $c = \text{cond} \{A_m^{-1}A_e\}$. Mientras c mas se aproxime a uno mejor resultará la aproximación de la matriz mixta A_m a la matriz exacta A_e . Por ejemplo, se ha verificado que en pares de superficies delgadas de un 2 % de espesor, con un 95 % de coeficientes asintóticos, el número de condición resulta del orden de 1.04, es decir, $c = 1 + \varepsilon$, con $\varepsilon \ll 1$, por lo que puede aceptarse que una matriz mixta A_m construída en tales condiciones, resulte una razonable aproximación de la matriz exacta A_e .

4. RESOLVEDORES ITERATIVOS DE KRYLOV

Para la resolución iterativa del SEAL (matriz exacta o mixta) se ensayaron los siguientes resovedores de Krylov: GMRES(m), CGN y CGS [2,3,4]. Una dificultad común de todos ellos está relacionada con el tiempo de cómputo que demanda la matriz del sistema, dado que se optó por no almacenarla y recalcularla cada vez que se la necesita.

4.1 Mínimo Residuo Generalizado (GMRES)

El método del mínimo residuo generalizado re empezado cada m veces, o Generalized Minimal RESidual GMRES (m) [2,3], resuelve en forma iterativa el sistema lineal $As = b$, mediante el método de Galerkin y usando la base V_m ortogonal en l_2 , donde $V_m = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in R^{n,m}$ es el subespacio de Krylov $K_m = \text{span}\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$, n es el número de incógnitas. Una propiedad notable de este método es la de reducir siempre el residuo en cada iteración, excepto cuando se produce un efecto de saturación. Una dificultad práctica de este método es la estimación del mínimo subespacio de Krylov m . Si su dimensión resulta excesiva se trabaja de mas, con tiempos de cómputos innecesarios, pero si es excesivamente bajo, por ejemplo $m < 0.1 n$, entonces puede producirse un efecto de saturación: el residuo disminuye hasta un valor asintótico y no se reduce más, el cual puede estar aún lejos de la tolerancia adoptada.

4.2 Gradientes Conjugados sobre Ecuaciones Normales (CGN)

En general el sistema algebraico es no simétrico. En primera instancia, para poder resolverlo por gradientes conjugados, se puede formar su sistema de ecuaciones normales equivalente de la forma $(A'A)s = (A'b)$, en donde la matriz efectiva $(A'A)$ es simétrica y definida positiva, sistema al que puede aplicarse esta técnica, dando lugar al método de

gradientes conjugados sobre ecuaciones normales o Conjugate Gradient on the Normal equations (CGN) [2,3]. Sobre este método se pueden mencionar dos defectos: empeora notablemente el número de condición de la matriz del SEAL efectivo (lo eleva al cuadrado), e insume el doble de tiempo para su cómputo, no así en cuanto a los requerimientos de memoria, dado que siempre se puede emplear el artilugio de evaluar el producto de la matriz por un vector.

4.3 Gradientes Bi-Conjugados (Bi-CG)

El método de los gradientes biconjugados de Fletcher, o bi Conjugate Gradient method (bi CG), resulta una opción interesante para evitar la simetrización explícita del sistema algebraico de ecuaciones. Este método trabaja con la matriz A y su traspuesta A' , donde los vectores de dirección se mantienen biortogonales entre sí. Por ejemplo puede mencionarse la versión de Hriberšek *et al.* [5].

4.4 Gradientes Conjugados con Búsqueda Cuadrática (CGS)

El método de los gradientes conjugados con búsqueda cuadrática, o Conjugate Gradient Squared (CGS), emplea polinomios cuadráticos para encontrar las direcciones de búsqueda, de este modo se logra que el residuo se reduzca en forma cuadrática. Por otra parte, no necesita emplear explícitamente la matriz traspuesta A' . Una versión posible es la dada por Hriberšek *et al.* [5]. Con esta opción se suele obtener un menor número de iteraciones, por ello para casos prácticos de envergadura $n > 1,000$ paneles, resulta una posible opción recomendable.

4.5 Iteración Compuesta (IC)

Esta es una propuesta para ciertos casos industriales de envergadura. Saca provecho de la diferencia de los tiempos insumidos en el cálculo de matriz 2-polar, según sea la exacta o la mixta, donde se tiene aproximadamente $r_t = \Delta t_e / \Delta t_m \approx 8/1$, donde Δt_e es el tiempo necesario para una evaluación de la matriz exacta A_e , Δt_m es el tiempo necesario para una evaluación de la matriz mixta A_m . La propuesta consiste en emplear dos lazos iterativos anidados. Estimada una solución inicial, con el lazo exterior se calcula el residuo con la matriz exacta y se pasa al lazo interior. En el lazo interior se calcula una corrección resolviendo el sistema algebraico de ecuaciones aproximadas con un número prefijado de iteraciones, donde el vector de carga es el residuo exterior, la matriz de coeficientes es la mixta. Obtenida una corrección se retorna al lazo exterior, donde se actualiza la solución y se vuelve a iterar. Para la resolución iterativa del lazo interior puede emplearse cualquiera de los métodos anteriormente mencionados.

5. CODIFICACION ESCALAR Y VECTORIAL

Para la codificación se deben tener en cuenta diversos factores, algunos de ellos contrapuestos, por lo que se deben buscar soluciones de compromiso. Entre otros pueden mencionarse:

- i) Para garantizar la portabilidad del código escalar se debería restringirse a la sintaxis normalizada del lenguaje empleado, renunciando al empleo de instrucciones extendidas.
- ii) Usualmente se codifica para un procesador escalar con una concepción modular de las rutinas. Si además se va a pedir que sea vectorizable (paralelizable) para un procesador vectorial (paralelo), entonces por empezar habrá que distinguir aquellas partes del código que ejecutan el trabajo pesado de CPU susceptibles de ser vectorizadas (paralelizadas), aquí llamadas partes *álidas* del código. Probablemente estas partes bien identificadas y delimitadas se las deba reorganizar en su concepción, cambiar el orden de los lazos, eliminar en lo posible el llamado a subprogramas más internos, y lo más importante tratar de efectuar operaciones vectoriales (paralelas) exclusivamente sobre

vectores largos, dado que el rendimiento se viene abajo si las longitudes de los vectores involucrados son relativamente muy reducidas. Por otra parte el empleo de vectores relativamente largos introduce la conveniencia del uso de la técnica de "stripmining" [2,6].

iii) Para la reorganización de las partes álgidas del código, se puede acudir a la ayuda de los denominados traductores para vectorización, los cuales a partir del código fuente escalar inicial generan una versión de código fuente vectorizado, en el cual incluyen mensajes de diagnósticos, inhibidores de vectorización, optimizaciones y advertencias varias. Entre las optimizaciones puede mencionarse la partición de los vectores largos en bloques o tiras (stripmining) y el empleo de la biblioteca vectorial. Sin embargo, los traductores tienen sus limitaciones inherentes y hay reorganizaciones que ellos no pueden efectuar o diagnosticar, por lo que se debe efectuar un trabajo interactivo entre programador y traductor hasta encontrar una versión vectorizada aceptable [6].

La concepción básica del código BEM 3D implementado es para su ejecución en modo escalar, tanto en microcomputadores (DOS o UNIX) como en estaciones de trabajo escalares (UNIX), y en forma opcional para un procesador vectorial Intel i860 montado en un sistema Intel i486 bajo la forma de una placa coprocesadora numérica Number Smasher 860 de Microway [6]. Esta desarrolla una performance pico del orden de los 80 Mflops en simple precisión para las rutinas básicas del paquete LINPACK.

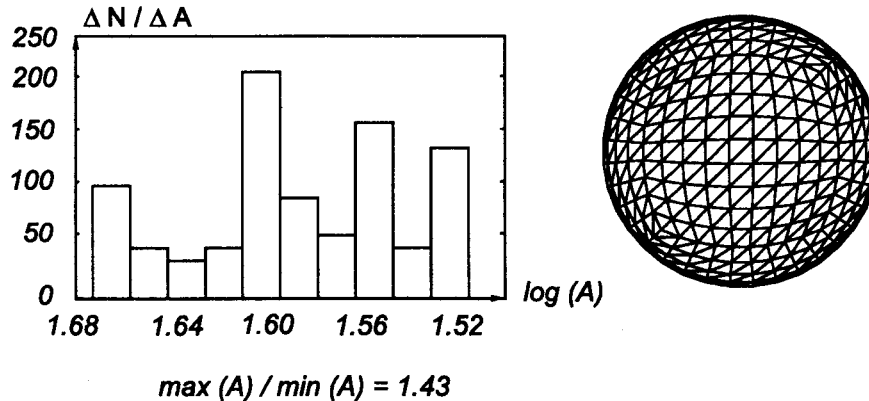


Figura 6: esfera con malla estructurada (der.), histograma de las áreas de los paneles (izq.).

6. COEFICIENTE DE PRESION

Para el cálculo del coeficiente de presión C_p , presión ejercida por el flujo externo sobre la superficie Γ , resulta suficiente calcular el campo de velocidades solo sobre ella y puede computarse mediante $C_p(x) = 1 - [w(x)/U(x)]^2$, para $x \in \Gamma$, donde $U(x)$ es la velocidad no perturbada, $w(x)$ es la velocidad total, dada por $w(x) = U(x) + v(x)$, $v(x) = v_\mu(x) + v_\sigma(x)$, donde $v(x)$ es la componente de perturbación total, suma de la velocidad de perturbación 2-polar $v_\mu(x)$ y de la 1-polar $v_\sigma(x)$. Para este cómputo se ha optado por dos estrategias: una forma fuerte y una forma débil, ambas adaptadas para paneles planos. Empero la forma débil propuesta solo permite paneles triangulares (con

parcelas nodales no coplanares), mientras que la forma fuerte admite paneles poligonales arbitrarios.

6.1 Coeficiente de presión sobre una esfera

Para comparar la robustez numérica de ambos esquemas, se considera un caso test de una esfera de radio unitario, inmersa en una corriente uniforme de velocidad unitaria $U = 1$. La solución del continuo para la velocidad $V(z)$ y el coeficiente de presión $C_p(z)$ sobre la superficie de la esfera de radio unitario $R = 1$ está dada por $V(z) = 1.5U \sin(\theta)$, $C_p(z) = 1 - (9/4) \sin^2(\theta)$, donde $\theta = \arccos(z/R)$. La malla mostrada en la figura 6 es estructurada, con tamaños y formas de los paneles altamente regulares. En la figura 7 se muestra el coeficiente de presión $C_p(z)$ a lo largo del eje z dada por ambas formulaciones para esta malla estructurada, donde para la formulación fuerte, se puede observar una leve tendencia a la dispersión. La malla mostrada en la figura 8, se obtiene de la anterior mediante una serie de perturbaciones aleatorias, en donde se agrega un ruido $\varepsilon = O(h)$ a las coordenadas nodales, donde h es una medida del diámetro medio de los paneles, luego se reproyecta a la esfera unitaria verificando que los paneles no se degeneren o colapsen, esto es, paneles con área negativa o nula. En la figura 9 se muestra el coeficiente de presión $C_p(z)$ a lo largo del eje z dada por ambas formulaciones para esta malla perturbada, donde ahora la tendencia a la dispersión en la formulación fuerte se manifiesta nítidamente, mientras que la formulación débil se comporta bastante estable.

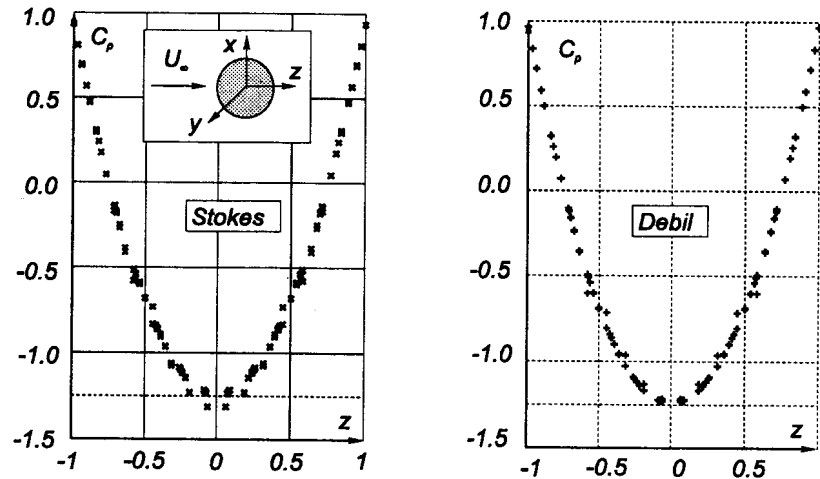


Figura 7: Coeficiente de presión $C_p(z)$ para la esfera con malla estructurada, según una formulación fuerte (izq.), según una formulación débil (der.).

6.2 Coeficiente de presión sobre un automóvil

En la figura 10 se muestran las gráficas del coeficiente de presión sobre el plano de simetría vertical de un automóvil para dos mallados 3D. Para tener en cuenta la influencia del piso que se extiende hasta el infinito en todo el plano de planta xy , se puede emplear el artificio de considerar la imagen especular del automóvil con respecto a dicho plano. De este modo se evita el mallado del piso y se aprovecha la simetría del potencial con respecto a dicho plano para reducir la dimensión del sistema algebraico.

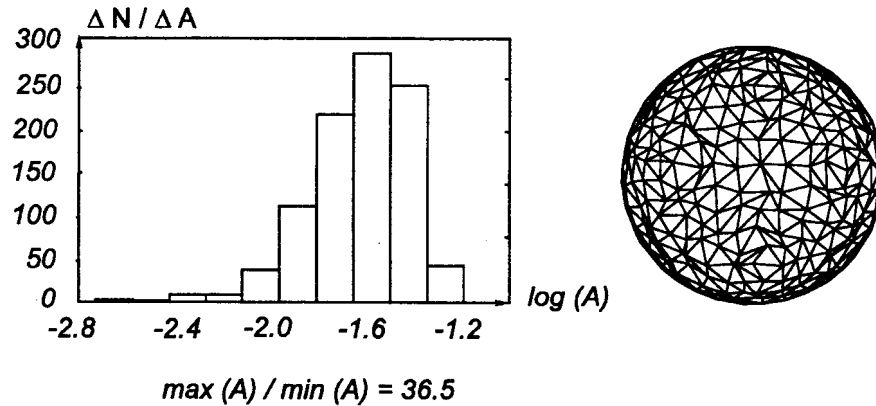


Figura 8: esfera con malla perturbada (der.), histograma de las áreas de los paneles (izq.).

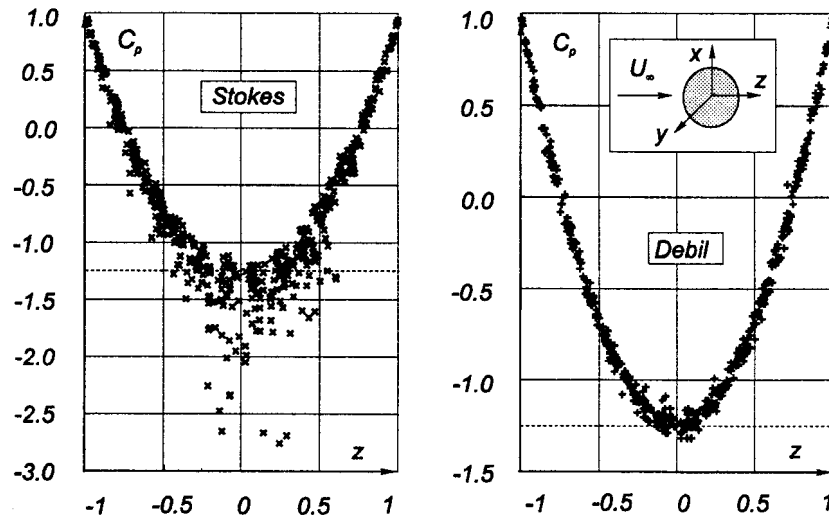


Figura 9: Coeficiente de presión $C_p(z)$ para la esfera con malla perturbada: según una formulación fuerte (izq.), según una formulación débil (der.).

CONCLUSIONES

i) El empleo de integraciones analíticas para los coeficientes 1 y 2 polares permite obtener expresiones de campo exactas de continuidad C^∞ para los coeficientes de influencia 2-polar A_{ij} y 1-polar C_{ij} . Además de la correcta representación de los campos 1-2 polares, en especial para paneles cercanos, evita posibles problemas de inestabilidad numérica que suelen presentarse si en cambio se hubiera optado por una integración numérica. Como defecto puede mencionarse el hecho de que absorben un apreciable tiempo de CPU para los coeficientes de influencia, dada la presencia de numerosas funciones trascendentales en las expresiones analíticas obtenidas. Para atenuar este defecto

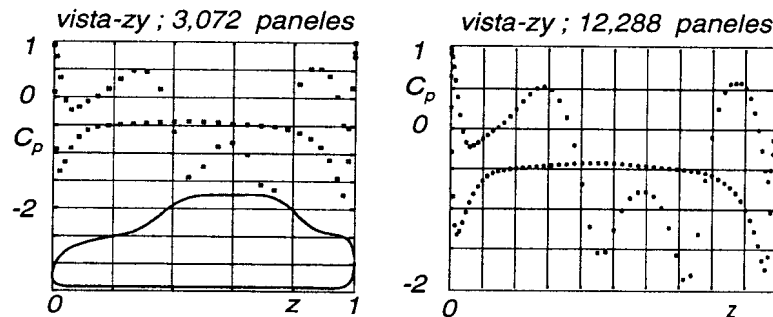


Figura 10: Coeficiente de presión $C_p(z)$ sobre el plano de simetría vertical para un automóvil con influencia del piso, según dos mallados 3D.

ha resultado en general aceptable el empleo de una matriz del sistema algebraico mixta, que en principio no degrada la calidad de la solución numérica obtenida y permite ahorros apreciables de tiempo de CPU.

ii) El empleo de resolvidores de Krylov resultan factibles para un tratamiento por BEM en la discretización de la formulación de Morino para el problema de Neumann exterior, aunque se debe prestar cierta atención a los preconditionadores empleados y a un posible mal condicionamiento de la matriz para ciertas geometrías patológicas.

iii) Una codificación de compromiso permite asegurar la portabilidad del código y su eventual vectorización (paralelización). El empleo de un código vectorizable, en especial en las rutinas de cómputo de los coeficientes de influencia 1 y 2 polares, permiten un factor de aceleración del orden de cuatro a uno, con respecto al procesamiento escalar en el i860, donde se debe tener presente que la "parte vectorizable" del código no es del 100% lo cual es compatible con la *Ley de Amdahl* [2], esto es, la presencia de operaciones intrínsecamente escalares.

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento al *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET, Argentina) por su financiamiento.

Referencias

1. Morino L. ed. "Computational Methods in Potential Aerodynamics", Springer-Verlag (1985).
2. "Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers", Dongarra J.J., Duff I.S., Sorensen D.C., van der Vorst H.A., SIAM, 2nd printing (1993).
3. Kane J.H., Keyes D.E., Prasad K.G., "Iterative Solution Techniques in Boundary Element Analysis", Int. Jour. for Numer. Meth. in Engin. (IJNME), vol. 31, 1511-1536 (1991).
4. Hriberšek M., Škerget P., Mang H., "Preconditioned conjugate gradient methods for boundary- domain integral method", Engin. Analy. with Boundary Elements 12, pp 111-118 (1993).
5. "Topics in Boundary Elements Research", Brebbia C.A. (edt), Vol 1,2,3,5. Springer Verlag (1984).
6. "NAS-High Performance Libraries vol. 1 & 2", "NDP Fortran Language and Library Reference Manual", "NDP VAST Reference Manual", "860 Toll Chain Reference Manual", "i860 Vector Primitive Library Reference Manual", Microway Inc.

