

MODELADO TRIDIMENSIONAL DE ENGRANAJES
FLEXIBLES EN ANALISIS DE MECANISMOS

Alberto Cardona

Grupo de Tecnología Mecánica - INTEC

Universidad Nacional del Litoral - Conicet, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina

RESUMEN

Los engranajes son dispositivos de uso habitual para la transmisión de movimiento de rotación entre ejes, y se encuentran presentes prácticamente en todo tipo de máquinas. Un movimiento de engrane relativo tridimensional es aquél desarrollado por un par de engranajes con ejes no concurrentes y no paralelos. Todos los tipos de engranajes pueden ser vistos como caso particular de engrane tridimensional; por ejemplo, engranajes rectos, cónicos, hipoidales, tornillo sinfin, etc. En este trabajo desarrollamos las ecuaciones de movimiento para representar engrane tridimensional en el contexto de la formulación de un programa multipropósito para análisis de sistemas multicuerpos flexibles.

INTRODUCCION

Existen referencias clásicas sobre engranajes y elementos de máquina (por ejemplo [1]). En los últimos años, se han publicado trabajos en los que se busca mejorar la capacidad de análisis para permitir el diseño de transmisiones más pequeñas, livianas y silenciosas [2]. Rama Mohana Rao y Muthuveerappan [3] usan elementos finitos para evaluar tensiones en la raíz del diente en transmisiones helicoidales. Özgüden et al [4,5] desarrollan modelos para análisis dinámico de pares de engranajes rectos. Sus modelos incluyen flexibilidad de ejes y apoyos, permitiendo estudiar efectos por acoplamiento entre vibraciones laterales y de torsión. Kahraman [6,7] desarrolla un modelo para simular el comportamiento dinámico de un sistema planetario de una etapa con engranajes helicoidales. La formulación permite modelar sistemas planetarios con un número arbitrario de planetas, y estudiar el efecto producido por errores de fabricación, juego en el dentado y fluctuación de rigidez, sobre la distribución de cargas entre los piñones. Gérardin y Robert [8] desarrollan un programa general para analizar vibraciones de torsión en trenes de engranajes, incluyendo flexibilidad de dientes, errores de fabricación (excentricidad) y fluctuación de rigidez.

En este trabajo desarrollamos las ecuaciones de movimiento para representar engrane tridimensional en el contexto de la formulación de un programa multipropósito para análisis de sistemas multicuerpos flexibles [9,10]. El par de engranajes es implementado como una junta particular del programa, agregando a éste una nueva funcionalidad. El programa de análisis tiene en cuenta, entre otros efectos, movimiento tridimensional de los miembros, flexibilidad, amortiguamiento y disipación por fricción. La familia de elementos del programa incluye (entre otros) viga, membrana, cuerpo rígido, resorte, juntas rotoidal, helicoidal, prismática y cilíndrica y leva, permitiendo construir un modelo sumamente fiel de una máquina.

La junta *par de engranajes* es descripta por dos nodos : uno en el centro de cada rueda. Estos nodos pueden ser conectados a otros elementos que describen el mecanismo. La formulación desarrollada es suficientemente general como para representar casi todo tipo de engranajes usados en la industria : rectos, helicoidales, cónicos, dentados interno y externo, rueda y tornillo sinfin, hipoidales, etc. Se incluyen los efectos de flexibilidad de dientes, con fluctuación de rigidez y juego en el engrane. Todas las componentes de las fuerzas de contacto inducidas por el engrane

(tangencial, radial y axial) son tenidas en cuenta. Estas fuerzas son transmitidas al resto del mecanismo a través de los nodos del elemento. Se incluye además la fuerza de fricción que puede generarse por efecto del deslizamiento relativo que existe en ciertos tipos de engranaje (por ejemplo, rueda y tornillo sinfin). La fuerza de fricción es función de la fuerza transmitida y de un coeficiente, el cual puede variar con el valor instantáneo de la velocidad de deslizamiento en el engrane. Trenes de engranajes y sistemas planetarios pueden representarse fácilmente mediante la superposición de varios elementos *par de engranajes* en el mismo modelo.

Destacamos que la mayoría de los trabajos de la literatura limitan el análisis a una configuración de engrane determinada : por ejemplo, un par de engranajes rectos con algunas componentes de flexibilidad en el sistema. La formulación que presentamos da un tratamiento unificado para todos los tipos de engrane y combinación de éstos. El programa resultante permite analizar prácticamente toda situación, pudiendo el analista decidir a voluntad qué efectos introducir en el modelo.

En este trabajo damos, por razones de limitación de espacio, una descripción resumida del modelo formado por dos ruedas. Una descripción más detallada, en la cual se incluyen los efectos de fricción y sistemas de rueda y cremallera se da en los trabajos [11,12]. Las posibilidades de aplicación de la formulación se ilustran con dos ejemplos numéricos.

FORMULACION DEL PROBLEMA DINAMICO CON RESTRICCIONES

Las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico sometido a restricciones holonómicas Φ pueden ser escritas en la forma [10,13] :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q + Q' \\ k\Phi(\dot{q}, q, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde se ha utilizado una formulación Lagrangiana aumentada, \mathcal{L} es el Lagrangiano del sistema sin restricciones, q y \dot{q} son los desplazamientos y velocidades generalizadas del sistema dinámico, y Q son las fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema. Las fuerzas de restricción Q' , que pueden interpretarse como aquéllas que obligan al sistema a verificar las restricciones impuestas, son :

$$Q' = \frac{\partial \Phi}{\partial q} (k\lambda - p\Phi) \quad (2)$$

donde k y p son factores de escala y de penalidad, respectivamente.

Las ecuaciones (1) forman un sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas no lineales. La solución puede obtenerse avanzando paso a paso mediante un esquema de integración temporal apropiado. En cada paso de tiempo debemos resolver un sistema de ecuaciones no lineales algebraicas, el cual es resuelto mediante el método de Newton. La contribución de las restricciones holonómicas a la matriz de iteración puede obtenerse mediante diferenciación de las fuerzas de restricción y la restricción misma, con respecto a los parámetros de desplazamiento generalizados, resultando :

$$S = \begin{bmatrix} p\mathbf{B}\mathbf{B}^T & -k\mathbf{B} \\ -k\mathbf{B}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

en donde hemos despreciado las derivadas de segundo orden de las restricciones.

CINEMATICA DE LA JUNTA

Definiciones Básicas

Consideraremos una junta formada por dos ruedas dentadas con centros A y B . En esta sección definiremos relaciones básicas que serán usadas para expresar la cinemática de la unión.

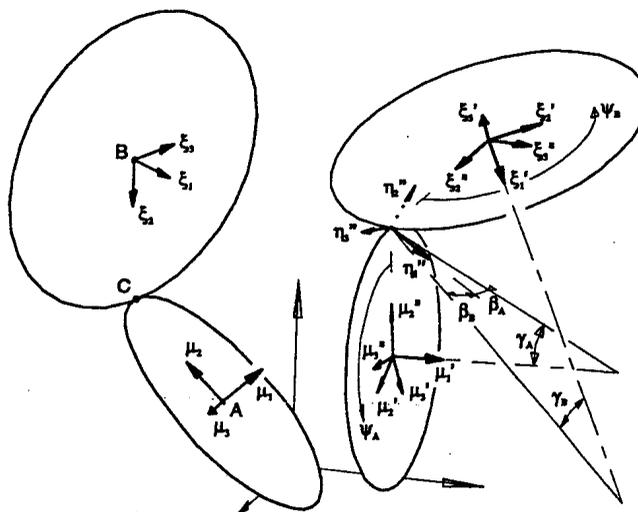


Figura 1 : Cinemática del par de engranajes

La posición de cada centro de rueda en el referencial inercial está dada por x_A y x_B . Definimos una terna de vectores unitarios ortogonales en cada centro de rueda en la configuración de referencia :

- $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ vinculados a la primera rueda, con origen en su centro A ;
- $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ vinculados a la segunda rueda, con origen en su centro B .

Ambas ternas son dextrógiras y tienen su primer vector orientado perpendicularmente al plano de la rueda, en tanto su segundo vector se dirige hacia el punto de contacto entre ambas ruedas (ver figura 1).

Notamos que tanto la distancia entre centros en la configuración actual como la orientación relativa de ambas ruedas, deben ser mantenidas constantes por algún medio externo a fin de asegurar un engrane correcto. La formulación que desarrollamos no tiene en cuenta posibles variaciones en éstas para corregir la relación de transmisión.

La orientación de ambas ternas materiales en la configuración actual puede obtenerse aplicando el operador de rotación en cada rueda a las ternas de referencia :

$$\mu'_i = R_A \mu_i \quad \xi'_i = R_B \xi_i \quad i = 1, 3 \quad (4)$$

R_A, R_B son las matrices de rotación en los nodos A, B , las cuales se relacionan con los vectores de rotación Θ_A, Θ_B a través de la forma exponencial $\exp(\Theta_A), \exp(\Theta_B)$ [10,14].

Definimos un segundo par de ternas unitarias en la configuración actual. Estas son solidarias del marco que soporta al par de engranajes, y se definen siguiendo la misma regla seguida para obtener las ternas de referencia $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ y $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. I.e., los vectores μ''_1 y ξ''_1 son normales a cada rueda :

$$\mu''_1 = \mu'_1 = R_A \mu_1 \quad \xi''_1 = \xi'_1 = R_B \xi_1 \quad (5)$$

mientras que los vectores μ''_2, ξ''_2 se orientan hacia el punto de contacto y los vectores μ''_3, ξ''_3 se definen completando ternas dextrógiras.

Definimos además una terna de vectores unitarios $\{\eta''_1, \eta''_2, \eta''_3\}$, los cuales se orientan a lo largo de los dientes en contacto en la configuración actual : η''_1 es paralelo a la línea de base del diente; η''_2 se orienta según la vertical del diente, desde la primera rueda hacia la segunda; finalmente, η''_3 es perpendicular al plano medio del diente.

La terna $\{\eta_i''\}$ se relaciona a $\{\mu_i''\}$ a través de los ángulos de conicidad γ_A y de hélice β_A , como se muestra en la figura 1 :

$$[\eta_1''^A \quad \eta_2''^A \quad \eta_3''^A] = [\mu_1'' \quad \mu_2'' \quad \mu_3''] Y_A \quad (6)$$

La expresión explícita de la matriz ortogonal Y_A resulta :

$$Y_A = Y(\gamma_A, \beta_A) = \begin{bmatrix} \cos \gamma_A \cos \beta_A & -\sin \gamma_A & \cos \gamma_A \sin \beta_A \\ \sin \gamma_A \cos \beta_A & \cos \gamma_A & \sin \gamma_A \sin \beta_A \\ -\sin \beta_A & 0 & \cos \beta_A \end{bmatrix} \quad (7)$$

La convención de signos para los ángulos de conicidad y de hélice está dada en la figura 2. El superíndice A en la ecuación (6) se usa para enfatizar que los vectores $\eta_i''^A$ se calculan sólo en función de variables cinemáticas de la rueda A .

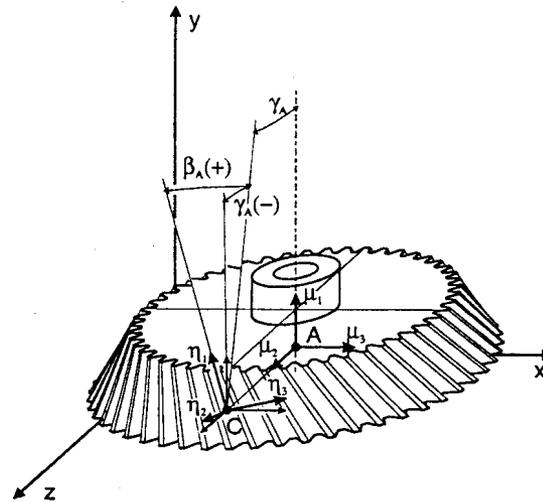


Figura 2 : Convención de signos para los ángulos de conicidad y de hélice

Para la rueda B valen relaciones similares :

$$[\eta_1''^B \quad \eta_2''^B \quad \eta_3''^B] = [\xi_1'' \quad \xi_2'' \quad \xi_3''] \underbrace{Y(\gamma_B, \beta_B)}_{Y_B} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A partir de la igualdad entre las ecuaciones (6) y (8), determinamos la relación entre las ternas $\{\mu_i''\}$ y $\{\xi_i''\}$ durante el engrane :

$$[\xi_1'' \quad \xi_2'' \quad \xi_3''] = [\mu_1'' \quad \mu_2'' \quad \mu_3''] Y_A Y_B^T = [\mu_1'' \quad \mu_2'' \quad \mu_3''] Z(\gamma_A, \beta_A, \gamma_B, \beta_B) \quad (9)$$

Puede mostrarse fácilmente que Z es en realidad función de sólo tres parámetros independientes $(\gamma_A, \gamma_B, \beta_A - \beta_B)$.

Expresión explícita de los vectores $\mu_2, \mu_3, \xi_2, \xi_3$ en la configuración de referencia

La posición del punto de contacto \mathbf{x}_C puede calcularse en términos de variables cinemáticas en la rueda A o en la rueda B :

$$\mathbf{x}_C^A = \mathbf{x}_A + \mathbf{r}_A = \mathbf{x}_A + \mu_2'' \mathbf{r}_A \quad \mathbf{x}_C^B = \mathbf{x}_B + \mathbf{r}_B = \mathbf{x}_B + \xi_2'' \mathbf{r}_B \quad (10)$$

donde $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ son vectores radio desde el centro de cada rueda al punto de contacto

$$\mathbf{r}_A = r_A \mu_2'' \quad \mathbf{r}_B = r_B \xi_2'' \quad (11)$$

A partir de las ecuaciones (9) y (10), obtenemos la expresión de μ_2 [11] :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= -\frac{1}{(Z_{2,2} r_B - r_A)^2 - r_B^2 Z_{3,2}^2} [(Z_{2,2} r_B - r_A) \mathbf{1} - r_B Z_{3,2} \tilde{\mu}_1] \{ \mathbf{x}_{AB} + r_B Z_{1,2} \mu_1 \} \\ &= c_1 \mathbf{x}_{AB} + c_2 \mu_1 + c_3 \mu_1 \times \mathbf{x}_{AB} \end{aligned} \quad (12)$$

donde $\mathbf{x}_{AB} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$ y donde las constantes (c_1, c_2, c_3) se definen como sigue :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{r_A - Z_{2,2} r_B}{c} \\ c &= (r_A - Z_{2,2} r_B)^2 - Z_{3,2}^2 r_B^2 \\ c_2 &= \frac{(r_A - Z_{2,2} r_B) Z_{1,2} r_B}{c} \\ c_3 &= \frac{Z_{3,2} r_B}{c} \end{aligned} \quad (13)$$

Luego podemos calcular el tercer vector μ_3 :

$$\mu_3 = \mu_1 \times \mu_2 = c_1 \mu_1 \times \mathbf{x}_{AB} - c_3 [1 - \mu_1 \otimes \mu_1] \mathbf{x}_{AB} \quad (14)$$

Los vectores ξ_2, ξ_3 se obtienen por último usando la ecuación (9) : $[\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3] = [\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3] \mathbf{Z}$.

Puede mostrarse numéricamente que $c \neq 0$ para $r_A \geq r_B$. En consecuencia, pediremos que se satisfaga a priori esta condición para asegurar que la resolución de μ_2 .

Grados de libertad de la junta

El par está formado por dos cuerpos rígidos (las dos ruedas) vinculadas por una restricción cinemática que une las rotaciones en torno a sus respectivos ejes de rotación. Usamos quince variables cinemáticas para describir la junta, agrupadas en el vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = (\mathbf{x}_A^T \ \Theta_A^T \ \mathbf{x}_B^T \ \Theta_B^T \ \psi_A \ \psi_B \ u_m) \quad (15)$$

$\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ dan la posición del centro de cada rueda, en tanto Θ_A, Θ_B dan su rotación. El valor escalar u_m mide la deformación del engrane en la dirección circunferencial. Este valor es en realidad una medida combinada que resulta de la deformación de los dientes en contacto y del juego entre dientes. Finalmente, los desplazamientos angulares ψ_A, ψ_B miden la rotación relativa de cada rueda en el marco local del par, obteniéndose la siguiente relación entre las ternas prima y doble prima :

$$\begin{aligned} \mu_2'' &= \mu_2' \cos \psi_A - \mu_3' \sin \psi_A & \mu_3'' &= \mu_2' \sin \psi_A + \mu_3' \cos \psi_A \\ \xi_2'' &= \xi_2' \cos \psi_B - \xi_3' \sin \psi_B & \xi_3'' &= \xi_2' \sin \psi_B + \xi_3' \cos \psi_B \end{aligned} \quad (16)$$

En forma matricial escribimos :

$$\begin{aligned} [\mu_1'' \ \mu_2'' \ \mu_3''] &= [\mu_1' \ \mu_2' \ \mu_3'] \mathbf{R}(\mathbf{e}_1, \psi_A) \\ [\xi_1'' \ \xi_2'' \ \xi_3''] &= [\xi_1' \ \xi_2' \ \xi_3'] \mathbf{R}(\mathbf{e}_1, \psi_B) \end{aligned} \quad (17)$$

con

$$R(e_1, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

La junta tiene doce grados de libertad físicos : las seis componentes de movimiento de cuerpo rígido en cada rueda, más la deformación global del engrane menos la restricción relativa entre ruedas. Por lo tanto, la dimensión del vector de variables cinemáticas q excede en tres al número de grados de libertad físicos de la junta, y debemos imponer tres restricciones adicionales para definir correctamente el sistema. Una restricción está dada por la relación cinemática resultante del contacto entre dientes, en tanto las dos relaciones adicionales resultan de fijar el valor de los desplazamientos angulares relativos ψ_A, ψ_B . El conjunto de restricciones se describe en la sección siguiente. Para imponer éstas, añadimos tres multiplicadores de Lagrange -conjugados a las restricciones mencionadas- al vector de coordenadas generalizadas q y así formar el vector de incógnitas de la junta.

Variación de los vectores $\mu_i'', \xi_i'', \eta_i''$

A partir de las ecuaciones (17), podemos determinar las siguientes expresiones (escritas en forma matricial) :

$$\begin{aligned} [\delta\mu_1'' \quad \delta\mu_2'' \quad \delta\mu_3''] &= [R_A \delta\Theta_A] [\mu_1'' \quad \mu_2'' \quad \mu_3''] + \delta\psi_A [0 \quad -\mu_3'' \quad \mu_2''] \\ [\delta\xi_1'' \quad \delta\xi_2'' \quad \delta\xi_3''] &= [R_B \delta\Theta_B] [\xi_1'' \quad \xi_2'' \quad \xi_3''] + \delta\psi_B [0 \quad -\xi_3'' \quad \xi_2''] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [\delta\eta_1''^A \quad \delta\eta_2''^A \quad \delta\eta_3''^A] &= [R_A \delta\Theta_A] [\eta_1''^A \quad \eta_2''^A \quad \eta_3''^A] + \delta\psi_A [0 \quad -\mu_3'' \quad \mu_2''] Y_A \\ [\delta\eta_1''^B \quad \delta\eta_2''^B \quad \delta\eta_3''^B] &= [R_B \delta\Theta_B] [\eta_1''^B \quad \eta_2''^B \quad \eta_3''^B] + \delta\psi_B [0 \quad -\xi_3'' \quad \xi_2''] Y_B \end{aligned} \quad (19)$$

Igualmente, las variaciones de la posición del punto de contacto, medidas en términos de variables cinemáticas sobre una u otra rueda, resultan :

$$\begin{aligned} \delta x_C^A &= \delta x_A + (R_A \delta\Theta_A) \times \mu_2'' r_A - \mu_3'' \delta\psi_A r_A \\ \delta x_C^B &= \delta x_B + (R_B \delta\Theta_B) \times \xi_2'' r_B - \xi_3'' \delta\psi_B r_B \end{aligned} \quad (20)$$

CALCULO DE LAS FUERZAS DE RESTRICCIÓN

Como dijimos anteriormente, necesitamos tres ecuaciones de restricción para definir correctamente la junta. La primera de ellas da la relación cinemática entre los desplazamientos angulares relativos de ambas ruedas :

$$\phi_1 = (-\psi_A z_A + \psi_B z_B) \frac{m_n \cos \alpha_n}{2} + u_m \cos \alpha_n = 0 \quad (21)$$

donde m_n es el módulo normal del dentado, α_n el ángulo de presión normal, y z_A y z_B son los números de dientes en cada rueda. La restricción se formula de esta manera para que el multiplicador de Lagrange conjugado -escalado por el factor k - tenga el significado físico de la fuerza de contacto normal : $\mathcal{F} = k\lambda_1$.

La segunda restricción representa el contacto circunferencial producido por el engrane entre dientes :

$$\phi_2 = (x_C^A - x_C^B) \cdot \eta_3''^A = 0 \quad (22)$$

donde x_C^A, x_C^B dan la posición del punto de contacto calculado en términos de variables cinemáticas en la rueda A y en la rueda B , respectivamente.

La tercera restricción expresa la unicidad de la terna unitaria η_i'' , calculada en función de variables cinemáticas en una y otra rueda :

$$\phi_3 = \eta_2''^A \cdot \eta_3''^B = 0 \quad (23)$$

Las variaciones de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 resultan, por diferenciación :

$$\delta\phi_1 = \delta q \cdot \frac{\partial\phi_1}{\partial q} = \begin{Bmatrix} \delta x_A \\ \delta\Theta_A \\ \delta x_B \\ \delta\Theta_B \\ \delta\psi_A \\ \delta\psi_B \\ \delta u_m \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}z_A m_n \cos\alpha_n \\ \frac{1}{2}z_B m_n \cos\alpha_n \\ \cos\alpha_n \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\delta\phi_2 = \delta q \cdot \frac{\partial\phi_2}{\partial q} = \begin{Bmatrix} \delta x_A \\ \delta\Theta_A \\ \delta x_B \\ \delta\Theta_B \\ \delta\psi_A \\ \delta\psi_B \\ \delta u_m \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \eta_3''^A \\ \mathbf{R}_A^T(\eta_3''^A \times (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_C^B)) \\ -\eta_3''^A \\ \mathbf{R}_B^T(\eta_3''^A \times \mathbf{r}_B) \\ (Y_{A\ 3,3} \mu_2'' - Y_{A\ 2,3} \mu_3'') \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_C^B) \\ r_B \xi_3'' \cdot \eta_3''^A \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$\delta\phi_3 = \delta q \cdot \frac{\partial\phi_3}{\partial q} = \begin{Bmatrix} \delta x_A \\ \delta\Theta_A \\ \delta x_B \\ \delta\Theta_B \\ \delta\psi_A \\ \delta\psi_B \\ \delta u_m \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}_A^T(\eta_2''^A \times \eta_3''^B) \\ 0 \\ -\mathbf{R}_B^T(\eta_2''^A \times \eta_3''^B) \\ -Y_{A\ 2,2} \mu_3'' \cdot \eta_3''^B \\ (Y_{B\ 3,3} \xi_2'' - Y_{B\ 2,3} \xi_3'') \cdot \eta_2''^A \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Luego, substituyendo en la ecuación (2), evaluamos el vector de fuerzas de restricción \mathbf{Q}' de la junta :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial q} & \frac{\partial\phi_2}{\partial q} & \frac{\partial\phi_3}{\partial q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (k\lambda_1 - p\Phi_1) \\ (k\lambda_2 - p\Phi_2) \\ (k\lambda_3 - p\Phi_3) \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \{ k\lambda - p\Phi \} \quad (27)$$

La contribución a la rigidez se obtiene inmediatamente usando (3).

DEFORMACION DEL DENTADO Y JUEGO

Los engranajes se asumen formados por discos rígidos, con dientes elásticos cuya rigidez está representada por un resorte no lineal y un amortiguador insertados a lo largo de la línea de presión instantánea. La variación temporal de la rigidez y los efectos no lineales debido al juego son importantes para predecir la respuesta dinámica del par de engranajes. Siguiendo Özgüven et al [4,5], incluimos el efecto de excitación paramétrica mediante un término que representa la armónica fundamental del error de transmisión estática. La separación de los dientes y el juego son incluidos en el modelo siguiendo la misma aproximación.

Las fuerzas del dentado se derivan del potencial elástico \mathcal{V}_m , definido como sigue :

$$\mathcal{V}_m = \frac{1}{2} k_m [u_m + x_{err}]^2 \quad (28)$$

con :

$$[[x]] = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & -b < x < 0 \\ x + b & x \leq -b \end{cases}$$

Aquí, k_m es la rigidez del dentado, x_{err} es el error de transmisión bajo carga estática y b es el juego circunferencial. El error de transmisión bajo carga estática incluye tanto los errores

de fabricación del dentado, como las variaciones de rigidez. Asumimos que este término es una función del desplazamiento angular en la primera rueda (ψ_A).

Las fuerzas del dentado se calculan diferenciando con respecto a los desplazamientos generalizados q , dando :

$$\delta \mathcal{V}_m = \left\{ \begin{array}{c} \delta \psi_A \\ \delta u_m \end{array} \right\} \cdot k_m \{ [u_m + x_{err}] \left\{ \begin{array}{c} x'_{err} \\ 1 \end{array} \right\} \right\} \quad (29)$$

La contribución a la matriz de rigidez tangente se logra derivando una vez más :

$$\delta q \cdot S_m \Delta q = \left\{ \begin{array}{c} \delta \psi_A \\ \delta u_m \end{array} \right\} \cdot k_m \left[\begin{array}{cc} x'_{err} & 2 \\ x'_{err} & [u_m + x_{err}] x''_{err} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta \psi_A \\ \Delta u_m \end{array} \right\} \quad (30)$$

con $x'_{err} = \frac{\partial x_{acc}}{\partial \psi_A}$.

En el ejemplo tratado hemos supuesto la siguiente expresión para el error de transmisión :

$$x_{err}(\psi_A) = X (1 - \cos(z_A \psi_A)) \quad (31)$$

donde asumimos una perturbación de amplitud X y una frecuencia de excitación igual a la frecuencia de paso de un diente.

El amortiguamiento de contacto entre dientes se obtiene añadiendo un término $c_m \dot{u}_m$ a las fuerzas internas. El coeficiente c_m puede expresarse en forma aproximada :

$$c_m = 2\xi \sqrt{k_m m_e} \quad (32)$$

con m_e una masa equivalente que representa la inercia de ambas ruedas :

$$m_e = \frac{I_A I_B}{I_A R_B^2 + I_B R_A^2} \quad (33)$$

y ξ el porcentaje de amortiguamiento del dentado [4].

COMPONENTE RADIAL DE LA FUERZA DE CONTACTO

El contacto entre dientes se produce a lo largo de la línea de presión. Su orientación varía con el signo del torque transmitido, de tal modo que la fuerza de contacto puede ser vista como tratando siempre de separar ambas ruedas. La fuerza de contacto está contenida en el plano $\{\eta_2'', \eta_3''\}$, normalmente orientada a los dientes en contacto. Su magnitud \mathcal{F} es igual a $k\lambda_1$ (el multiplicador de Lagrange conjugado a la primer restricción ϕ_1 multiplicado por el factor de escala k).

Las componentes circunferencial y axial de la fuerza de contacto -orientada según η_3'' - fueron tenidas en cuenta cuando se formuló la restricción holonómica ϕ_2 . Sin embargo, la componente radial de la fuerza de contacto es de naturaleza no holonómica y debe agregarse explícitamente a la formulación como una fuerza no conservativa.

La componente radial de la fuerza que actúa sobre la rueda A en el punto de contacto puede escribirse, en términos de variables cinemáticas sobre una u otra rueda :

$$\mathbf{F}^A = -k|\lambda_1| \sin \alpha_n \eta_2''^A \quad \mathbf{F}^B = -k|\lambda_1| \sin \alpha_n \eta_2''^B \quad (34)$$

(usaremos una expresión u otra cuando corresponda). La fuerza radial es conjugada a variaciones de posición del punto de contacto C , resultando en la expresión de trabajo virtual :

$$\delta \mathcal{W} = \delta q \cdot \mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} \delta x_A \\ \delta \Theta_A \\ \delta x_B \\ \delta \Theta_B \\ \delta \psi_A \\ \delta \psi_B \\ \delta u_m \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}^A \\ \mathbf{R}_A^T (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}^A) \\ -\mathbf{F}^B \\ -\mathbf{R}_B^T (\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}^B) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (35)$$

donde \mathbf{Q} es el vector de fuerzas no conservativas. Por diferenciación obtenemos la contribución a la matriz de rigidez tangente (no simétrica) \mathbf{S} :

$$\delta^2 \mathcal{W} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \lambda \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{qq} & \mathbf{S}_{q\lambda} \\ \mathbf{S}_{\lambda q} & \mathbf{S}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} \quad (36)$$

donde :

$$\mathbf{S}_{qq} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{\mathbf{F}}^A \mathbf{R}_A^T & 0 & 0 & -c_A \mu_3'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_A^T (r_A \tilde{\mathbf{F}}^A - c_A \tilde{r}_A) \mu_3'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{\mathbf{F}}^B \mathbf{R}_B^T & 0 & -c_B \xi_3'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_B^T (r_B \tilde{\mathbf{F}}^B - c_B \tilde{r}_B) \xi_3'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{q\lambda} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}^A / \lambda_1) & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_A^T \tilde{r}_A (\mathbf{F}^A / \lambda_1) & 0 & 0 \\ (\mathbf{F}^B / \lambda_1) & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_B^T \tilde{r}_B (\mathbf{F}^B / \lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{\lambda q} = \mathbf{S}_{\lambda\lambda} = \mathbf{0} \quad (37)$$

EJEMPLOS

Mecanismo con par de engranajes cónicos rectos

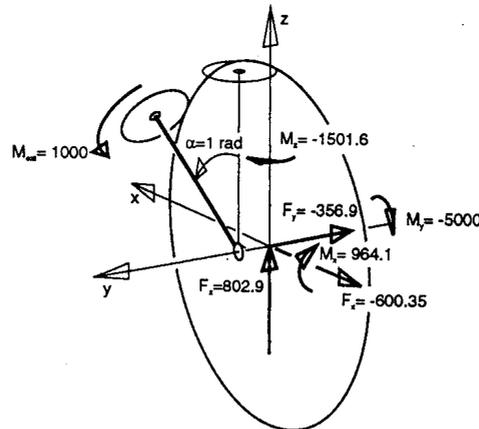


Figura 3 : Par cónico recto

El primer ejemplo consiste en un par cónico recto, en el cual una rueda está fija y la otra se encuentra montada sobre un eje rígido que gira en torno al eje y (figuras 3,4).

El centro de la primera rueda está fija en el origen de coordenadas. La rueda se encuentra contenida en el plano $x-z$. Su radio es $r_A = 5$, módulo normal $m_n = 0.2$, ángulo de presión $\alpha_n = 20^\circ$, número de dientes $z_A = 50$, ángulo de conicidad $\gamma_A = -\tan^{-1}(5) = -78.7^\circ$ de hélice $\beta_A = 0$. En la configuración inicial, la segunda rueda tiene su centro en $(0, 1, 5)$ y está contenida en un plano paralelo al plano principal $x-y$. Su radio es $r_B = 1$, número de dientes $z_B = 10$,

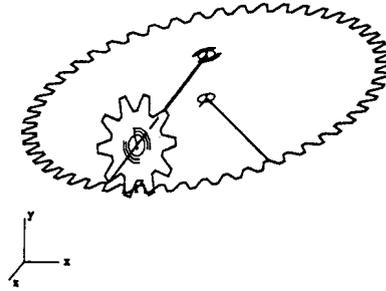


Figura 4 : Vista esquemática del par cónico recto (salida del programa)

ángulo de conicidad $\gamma_B = -\tan^{-1}(0.2) = -11.3^\circ$ y de hélice $\beta_B = 0$. Está vinculada a través de una junta rotoidal a una barra rígida que va del $(0, 1, 5)$ al punto de coordenadas $(0, 1, 0)$. En este punto, la barra está conectada a través de una unión rotoidal con eje a lo largo del eje y a la fundación.

El sistema tiene un grado de libertad. Hallamos una nueva configuración imponiendo un incremento de ángulo de 1 radián a la barra rígida. Además, actúa un momento $M_{ext} = 1000$ en la articulación entre la barra y la segunda rueda. La figura 3 muestra la configuración calculada con los valores resultantes de las acciones de la primera rueda sobre la fundación. La fuerza de contacto normal entre los engranajes calculada es $F_{gear} = 1.064 \times 10^3$, coincidiendo con los valores teóricos.

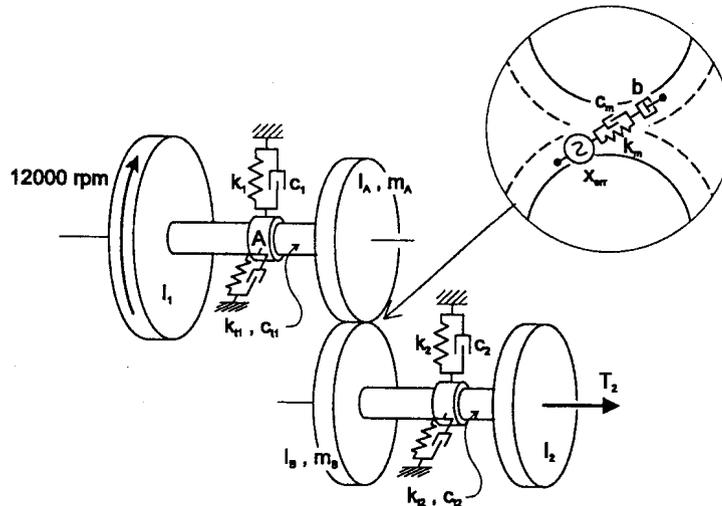


Figura 5 : Transmisión de engranajes rectos

Análisis dinámico de una transmisión

Este ejemplo trata el análisis de una transmisión compuesta por dos ejes unidos a través de un par de engranajes rectos (figura 5). Este ejemplo fue tratado igualmente por Özgüven [4], con una expresión diferente del error de transmisión.

El sistema tiene una velocidad impuesta constante de 12000 RPM en la rueda 1, y transmite un torque $T_2 = 945.8$ aplicado en la rueda 2. Las propiedades del engrane son : módulo

normal $m_n = 0.15748$, diámetro $d = 3.937$, ángulo de presión $\alpha_n = 20^\circ$ y número de dientes $z_A = z_B = 25$ (los ángulos de conicidad y de hélice son nulos). Las masas e inercias de rotación son : $m_A = m_B = 5.36 \times 10^{-3}$ e $I_A = I_B = 0.0102$. La rigidez del dentado es $k_m = 1.477 \times 10^7$, amortiguamiento $\xi = 0.1$, y la amplitud del error de transmisión bajo carga es $X = 0.003937$ (ecuación (31)). El modelo incluye sólo la rigidez en torsión de los ejes, con valores de rigidez : $k_{t1} = 1.7 \times 10^4$, $k_{t2} = 3.0 \times 10^4$, y de amortiguamiento : $c_{t1} = 0.076026$, $c_{t2} = 0.12369$. Los discos en los extremos tienen inercia en rotación $I_1 = 0.051$ e $I_2 = 0.0102$.

Analizamos cuatro condiciones distintas, para ilustrar los distintos fenómenos que pueden observarse cuando se varían las características del modelo :

- A : Ambos ejes están rígidamente montados en sus soportes, en tanto el juego entre engranajes es nulo.
- B : Se incluye la flexibilidad horizontal y vertical de las bancadas, con valores de rigidez $k_1 = k_2 = 1.477 \times 10^7$ y amortiguamiento $c_1 = c_2 = 50$. El juego es nulo.
- C : Los soportes de los ejes son rígidos, pero se introduce el juego en el modelo con valor $b = 0.001968$.
- D : Este caso incorpora flexibilidad de soportes y juego.

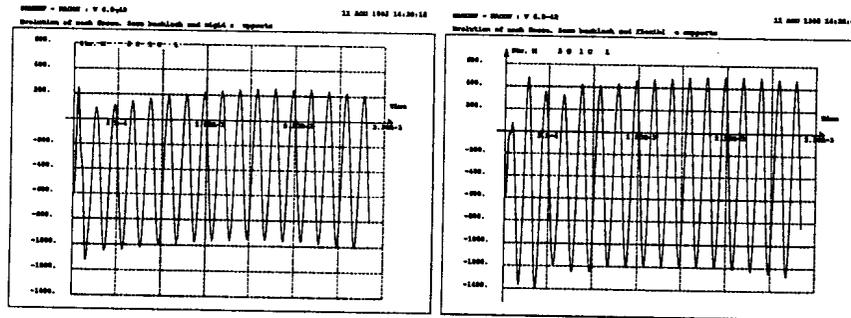


Figura 6 : Transmisión de engranajes rectos : evolución de la fuerza del dentado. Análisis sin considerar juego. Izq. : apoyos rígidos (A); der. : apoyos flexibles (B).

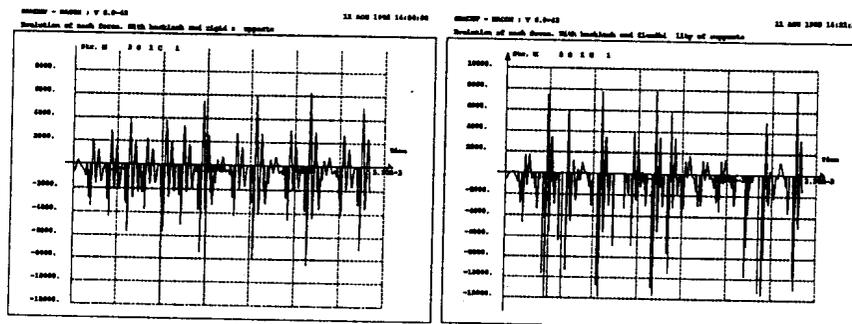


Figura 7 : Transmisión de engranajes rectos : evolución de la fuerza del dentado. Análisis incluyendo juego. Izq. : apoyos rígidos (C); der. : apoyos flexibles (D).

Se observa una respuesta casi estacionaria en los resultados, los cuales se integraron hasta que desaparezca el transitorio inicial (se sigue un procedimiento especial a tal fin).

Las figuras 6 y 7 muestran la evolución temporal de la fuerza total transmitida por el dentado para los cuatro casos. Podemos notar lo siguiente :

- La inclusión de la flexibilidad de soportes, no afecta sensiblemente el contenido frecuencial de la respuesta. Sin embargo, la amplitud de las oscilaciones de carga aumenta de un factor 1.4.
- Cuando se incluye el juego en el modelo, el contenido frecuencial de la fuerza transmitida varía en un factor 4. Al mismo tiempo, la amplitud de la oscilación de cargas aumenta de un factor casi 15.

CONCLUSIONES

Se propuso un método para realizar el análisis cinemático y dinámico de mecanismos tridimensionales con pares de engranajes de tipo general. Las ecuaciones de restricción se generan usando una técnica de Lagrangiano aumentado, en tanto las fuerzas no holonómicas radiales y de fricción se añaden explícitamente a las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema dinámico. La flexibilidad de los dientes se tuvo en cuenta en el modelo relacionando la deformación a lo largo de la línea de presión normal con la fuerza normal que actúa sobre el diente en contacto. Se mostraron ejemplos de aplicación en análisis cinemático y dinámico de mecanismos con engranajes. El último caso tratado incluye efectos de flexibilidad en engranajes y bancadas, juego y fluctuación de rigidez.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo recibió apoyo de Conicet a través del proyecto PID-BID 238 y de Fundación Antorchas mediante el proyecto A-13218/1-10.

REFERENCIAS

1. J.E.Shigley and J.J.Uicker Jr., *Theory of Machines and Mechanisms*, Mc Graw-Hill, New York (1980).
2. H.N.Özgülven and D.R.Houser, *Mathematical Models Used in Gear Dynamics - A Review* J.Sound Vibration 121 (1988) 383-411.
3. C.Rama Mohana Rao and G.Muthuveerappan, *Finite Element Modeling and Stress Analysis of Helical Gear Teeth*, Comp. & Struct. 49 (1993) 1095-1106.
4. H.N.Özgülven, *A Non-linear Mathematical Model for Dynamic Analysis of Spur Gears including Shaft and Bearing Dynamics*, J.Sound Vibration 145 (1991) 239-260.
5. Ö.S. Şener and H.N.Özgülven, *Dynamic Analysis of Geared Shaft Systems by Using a Continuous System Model*, J.Sound Vibration 166 (1993) 539-556.
6. A.Kahraman, *Load Sharing Characteristics of Planetary Transmissions*, Mech. Mach. Theory 29 (1994) 1151-1165.
7. A.Kahraman, *Planetary Gear Train Dynamics*, Journal of Mechanical Design 116 (1994) 713-720.
8. M.Gérardin and G.Robert, *Vibrations de Torsion et de Flexion d'un Train d'Engrenages*, LTAS-Rapport VF-42, Université de Liège, Belgium (1981).
9. *SAMCEF - Module d'Analyse de Mécanismes MECANO (Manuel d'Utilisation)* (1994).
10. A.Cardona, *An Integrated Approach to Mechanism Analysis*, Ph.D. thesis, Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées 127, Université de Liège, Belgium, 1989.
11. A.Cardona, *Three Dimensional Gears Modeling in Multibody Systems Analysis*, submitted to International Journal for Numerical Methods in Engineering (1995).
12. A.Cardona, *Flexible Three Dimensional Gear Modeling in Mechanism Analysis*, submitted to European Journal on Finite Elements (1995).
13. A.Cardona, M.Gérardin and D.B.Doan, *Rigid and Flexible Joint Modeling in Multibody Dynamics using Finite Elements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 89 (1991) 395-418.
14. A.Cardona and M.Gérardin, *A Beam Finite Element Nonlinear Theory with Finite Rotations*, Int. J. Num. Meth. Engrg. 26 (1988) 2403-2438.