

## MODELADO DEL COMPORTAMIENTO TERMOMECAÁNICO DE REFRACTARIOS EN APLICACIONES SIDERURGICAS

Analia Gastón, Mabel Medina

Consejo de Investigaciones. Universidad Nacional de Rosario.  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Av. Pellegrini 250. 2000 Rosario. Argentina.

### RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo analítico simple para calcular las tensiones termomecánicas inducidas por diferentes esquemas de precalentamiento. A modo de ejemplo los cálculos se realizan para una cuchara de 100 tn con un revestimiento de trabajo de alta alúmina (70%  $Al_2O_3$ ). Las tensiones calculadas con este modelo se comparan con las que se obtienen por el método de elementos finitos. En base a este análisis termomecánico se pueden seleccionar esquemas de precalentamiento adecuados para lograr un buen control de la temperatura del acero, con niveles de tensiones inducidas que no superen los admisibles por el material refractario.

### ABSTRACT

In this work a simple analytical model is presented to calculate thermal stresses induced by different preheating schedules. As an example calculations are performed for a 100 tn high alumina (70%  $Al_2O_3$ ) ladle. The stresses calculated with this model are compared with those obtained by finite element method. Based on this thermomechanical analysis preheating schedules can be selected to achieved good control of the temperature of steel in the ladle, with induced stress levels that do not exceed material strength limitations.

### INTRODUCCION

Las cucharas de aceria empleadas en el proceso de fabricación del acero están constituidas por una carcaza metálica de acero, revestida con diferentes capas de materiales refractarios.

La vida útil de estas cucharas varía considerablemente, dependiendo de las características de la metalurgia secundaria y del proceso de colada continua, del diseño de la cuchara y de la configuración de su revestimiento, pudiendo identificarse diferentes mecanismos de desgaste:

- 1- ataque químico (corrosión por acción de las escorias y acero)
- 2- carga térmica (las altas temperaturas pueden producir reblandecimiento del material)
- 3- ataque mecánico (erosión durante el vuelco del acero a la cuchara, agitación con gas y desescoriado)
- 4- diseño termomecánico (desprendimiento de capas de refractario (spalling))

Durante el ciclo de operación, la temperatura evoluciona en régimen transitorio, produciéndose importantes gradientes dentro del revestimiento. La carcaza y las capas refractarias responden a estos cambios con expansiones y contracciones térmicas. Debido a los gradientes térmicos y diferentes coeficientes de expansión, la dilatación térmica diferencial genera tensiones térmicas en los componentes y fuerzas interactivas entre los mismos. Desde el punto de vista termomecánico, una etapa crítica es la del precalentamiento de la cuchara. En un trabajo previo se han analizado diferentes esquemas de precalentamiento de cucharas buscando minimizar las pérdidas de temperatura del acero durante la metalurgia de cuchara [1]. En este trabajo se

analiza si estos esos esquemas de precalentamiento son adecuados desde el punto de vista termomecánico. Se presenta un modelo analítico sencillo que permite una estimación de las tensiones desarrolladas. El mismo contempla la utilización de juntas de dilatación circunferenciales para reducir las tensiones inducidas. Los resultados de este modelo se comparan con los que se obtienen por el método de elementos finitos. El cálculo numérico se realiza con el software ALGOR. Se considera la dependencia con la temperatura de las propiedades mecánicas del revestimiento refractario.

Del conjunto de resultados obtenidos se establecen pautas para seleccionar esquemas de precalentamiento que permitan minimizar las pérdidas de temperatura del acero, previniendo el deterioro del revestimiento refractario.

### MODELO TERMOMECANICO ANALITICO

Una descripción simplificada de una cuchara de acería consiste en considererarla como una estructura cilíndrica de acero (carcaza) revestida interiormente por varias capas de ladrillos refractarios. Esta estructura debe cumplir con los siguientes objetivos:

1. contener acero líquido a elevada temperatura (1600C)
2. el revestimiento refractario debe minimizar las pérdidas de calor del metal fundido y proteger la carcaza de acero de las elevadas temperaturas de fabricación y de un ambiente de trabajo altamente agresivo
3. calentamiento de la estructura para asegurar un revestimiento estable. Esto se logra vía la aislación térmica de las diferentes capas refractarias. La carcaza en general no debe superar los 350 a 400C.

Los aspectos fundamentales del comportamiento termomecánico del revestimiento y de su interacción con la carcaza metálica pueden basarse en la superposición de dos estados de tensión plana [2],[3]:

- el estado de tensiones que se generan en un disco cilíndrico libre de tracción en su superficie, debido a una distribución de temperatura que depende del radio del disco, es decir  $T=T(r)$ .
- el estado de tensiones que se originan en un cilindro largo sometido a una presión interior y exterior uniforme en su superficie

El modelo propuesto supone que:

1. el revestimiento refractario y la carcaza responden con un comportamiento elástico lineal
2. la distribución de temperatura depende linealmente del radio
3. se considera al revestimiento refractario como un continuo (en realidad este revestimiento se conforma de un conjunto de ladrillos pegados con mortero refractario)
4. el espesor del revestimiento es tal que la carcaza se encuentra a una temperatura suficientemente baja como para restringir la expansión térmica del revestimiento más caliente.

Considérese el estado de tensiones generados en un disco de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$  sometido a una distribución de temperatura que depende sólo del radio, con las condiciones de contorno  $\sigma'_r(a) = \sigma'_r(b) = 0$ . La solución a este problema termoelástico de tensión plana [4] da las siguientes expresiones para la tensión radial y circunferencial:

$$\sigma'_{rr}(r) = \frac{E}{r^2} \left[ \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \alpha r T(r) dr - \int_a^r \alpha r T(r) dr \right] \quad (1)$$

$$\sigma'_{\theta\theta}(r) = \frac{E}{r^2} \left[ \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \alpha r T(r) dr + \int_a^r \alpha r T(r) dr - \alpha r^2 T(r) \right] \quad (2)$$

$$u'_r(r) = \frac{1}{r} \left[ \frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \alpha r T(r) dr + (1+\nu) \int_a^r \alpha r T(r) dr \right] \quad (3)$$

Si la distribución de temperatura es uniforme  $T(r) = T_0$ ,  $\sigma'_{rr}(r) = \sigma'_{\theta\theta}(r) = 0$ ,  $u'_r(r) = \alpha r T_0$ . La expansión radial media del revestimiento será:

$$u'_r(r) = \alpha T_0 \left[ \frac{b+a}{2} \right] \quad (4)$$

En el caso de una distribución lineal de temperatura:

$$T(r) = T_a - \frac{T_a - T_b}{b-a} (r-a) \quad m = \frac{T_a - T_b}{b-a} \quad (5)$$

reemplazando (5) en (1) y (2) surge que sólo contribuye a las tensiones radiales y circunferenciales, el término gradiente obteniéndose:

$$\sigma'_{rr}(r) = \frac{E\alpha m}{3} \left\{ r + \frac{a^3}{r^2} - \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} \right\} \quad (6)$$

$$\sigma'_{\theta\theta}(r) = \frac{E\alpha m}{3} \left\{ 2r + \frac{a^3}{r^2} - \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} \right] \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} \right\} \quad (7)$$

Valorizando la expresión (7) en  $r = a$  y  $r = b$ , se tiene que la zona interior está sometida a compresión y la exterior a tracción.

Generalmente la cuchara esta constituida por una serie de capas cilíndricas concéntricas de materiales con distintas propiedades termomecánicas. Durante el calentamiento de la estructura, desde la cara interior hacia la exterior, la distribución de temperatura no depende linealmente del radio. En principio puede subdividirse el revestimiento en un número de capas tal que en cada una de ellas pueda aproximarse la distribución de temperatura por una función lineal del radio. Como la temperatura media de cada capa disminuye hacia el exterior, las capas interiores se ven impedidas de expandir libremente y aparece una presión radial de interacción entre capas adyacentes debida a la diferencia de expansión térmica.

Para una capa cilíndrica (intermedia) con radio interior  $a$  y exterior  $b$ , con condiciones de contorno:  $\sigma''_{rr}(a) = -p$ ,  $\sigma''_{rr}(b) = -q$ , la tensión radial y circunferencial tienen las siguientes expresiones[5]:

$$\sigma''_{rr}(r) = -p \frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} - q \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad (8) \quad \sigma''_{\theta\theta}(r) = p \frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} - q \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad (9)$$

y el desplazamiento radial :

$$u''_r(r) = \frac{1}{E} \left\{ -\frac{(1+\nu)a^2}{1 - \frac{a^2}{b^2}} + \frac{(1-\nu)r}{b^2 - a^2} (pa^2 - qb^2) \right\} \quad (10)$$

En consecuencia, las tensiones totales a las que se ven sometidas las capas refractarias y la carcasa se deben a la superposición de dos componentes:

- 1- las tensiones creadas por el gradiente de temperatura, dentro de cada capa, ecuaciones (6) y (7). (este gradiente no influye en las fuerzas de interacción debido a la expansión radial del revestimiento [2]).
- 2- las tensiones debidas a la presión de interacción entre capas, creadas por la diferencia en la expansión radial térmica de las capas con diferente temperatura media, ecuaciones (8) y (9).

Resta aún determinar los valores de la presión de interacción entre las capas cilíndricas adyacentes en que se divide la estructura. Planteando la compatibilidad de desplazamientos en la interfase entre capas, se obtiene un sistema de ecuaciones del cual pueden despejarse los valores de estas incógnitas. En el Apéndice se detalla el planteo de las ecuaciones de compatibilidad para una división arbitraria en  $N$  capas de la estructura refractaria y carcasa.

La generalización a un modelo multicapa permite una mayor precisión en la determinación de las tensiones creadas por la expansión térmica que el presentado en [6]. Incluye la dependencia con la temperatura de las propiedades termomecánicas de los refractarios y la contribución a las tensiones debida a los gradientes térmicos de cada capa.

Los resultados de este modelo analítico se comparan con los obtenidos por el método de elementos finitos. La resolución del problema termomecánico se realizó con elementos cuadrangulares con un campo de temperatura y de deformación lineales.

## RESULTADOS OBTENIDOS

El objetivo de este trabajo es determinar el estado de tensiones inducido en el revestimiento refractario por diferentes esquemas de precalentamiento de la cuchara. La misma consta de tres capas refractarias y de la carcasa de acero. En la Tabla I se indican las propiedades térmicas y mecánicas de los materiales involucrados. La dependencia con la temperatura del módulo de elasticidad y módulo de Poisson del ladrillo de 70% de  $Al_2O_3$  se muestra en la Tabla II [2, pag. 470].

La hipótesis de un comportamiento elástico del material resulta adecuada para evaluar ritmos críticos de precalentamiento. En este caso el modelo está evaluando las tensiones por exceso, ya que los materiales refractarios presentan comportamiento plástico a partir de cierta temperatura, dependiendo del material. En cambio cuando se trata de evaluar ritmos de enfriamiento, si el material ha alcanzado el régimen plástico, es necesario un modelo no lineal para evaluar correctamente las tensiones [2], [13].

Los casos analizados corresponden al calentamiento con 200 m<sup>3</sup>/h, 100 m<sup>3</sup>/h y 50 m<sup>3</sup>/h con gas natural, que imponen una evolución de la cara interna del revestimiento (cara caliente) como se muestra en la figura 1. Para el flujo de 200 m<sup>3</sup>/h, la estructura se dividió en 8 capas; las cuatro primeras corresponden al revestimiento de trabajo, las dos siguientes al revestimiento de seguridad y las dos restantes a la aislación y la carcaza. Para 100 m<sup>3</sup>/h y 50 m<sup>3</sup>/h la división de las capas fue de tres en el revestimiento de trabajo y una capa por cada uno de los revestimientos restantes. Esta elección se realiza teniendo en cuenta cómo es la distribución de temperatura resultante del precalentamiento.

**TABLA I : Propiedades Térmicas y Mecánicas del revestimiento refractario y la carcaza**

CAPA	PROPIEDADES TERMICAS				PROPIEDADES MECANICAS		
	ESPESOR [mm]	K [W/mC]	$\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	C [J/KgC]	E [x 10 <sup>4</sup> MPa]	$\nu$	$\alpha$ [x10 <sup>-6</sup> C <sup>-1</sup> ]
TRABAJO ( 70% Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	155	1.75	2900	1045	4.8 (*)	0.2	5.4
SEGURIDAD	76	1.4	2292	1000	2.76	0.2	4.5
AISLACION	12.7	0.17	961	1000	2.07	0.2	4.5
CARAZA DE ACERO	38	55	7830	450	20	0.3	12

(\*) ultrasónico

**TABLA II : Propiedades Mecánicas refractario Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (70%)**

TEMPERATURA [c]	E [x 10 <sup>4</sup> MPa]	$\nu$
20	2.41	0.07
800	2.21	0.09
1100	1.45	0.17
1200	1.03	0.14

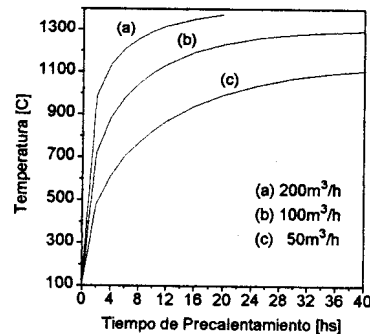


Fig.1 : Temperatura de la cara caliente en función del tiempo

La utilización del módulo ultrasónico en el cálculo de tensiones termomecánicas arroja valores muy elevados respecto de las tensiones medidas durante el ciclo de operación de cucharas de alta alumina por lo cual no representa un dato adecuado para este tipo de análisis [2],[7],[8]. No obstante con el objetivo de cuantificar esta sobreestimación se incluyen en todos los casos

las tensiones calculadas con el módulo ultrasónico, considerando sólo la contribución calculada con (9). EL decrecimiento que se observa en el valor de las tensiones es consecuencia de la disminución del módulo de Young al superarse los 800 C. La utilización de juntas de dilatación ubicadas en la interfase entre cada revestimiento y la carcasa, reducen las tensiones térmicas inducidas en el revestimiento. De acuerdo a los valores que aparecen en [6], [8],[9],[10],[11],[12] se realizaron los cálculos incluyendo tres juntas de dilatación iguales en la interfase entre distintos materiales de 0.5mm y 1mm de espesor.

Se calculan además las tensiones considerando el módulo de Young reducido de la capa de trabajo de 70%  $Al_2O_3$ . El revestimiento de una cuchara se arma con ladrillos refractarios pegados con mortero refractario. Estas juntas entre ladrillos son las que proveen el espacio para la expansión térmica y tienen gran influencia en el comportamiento termomecánico de la estructura. Ensayos realizados con ladrillos pegados con mortero muestran una reducción del módulo de elasticidad entre un 30% a un 50% respecto de los valores de los ladrillos sin mortero[2],[6]. Se consideró una reducción del 30% y no se incluyeron juntas de dilatación en este cálculo

Las figuras 2, 3 y 4 muestran la evolución de la tensión circunferencial en la cara caliente, calculada con el modelo analítico (ec.(7) y (9), ver Apéndice). Estas gráficas incluyen el valor de la resistencia a la compresión del refractario de alúmina (55 MPa) [8] que se podría tomar como límite de tensión admisible en el revestimiento.

Para 200  $m^3/h$  y considerando el módulo de Young variable con la temperatura se obtiene un pico de 91 MPa. La utilización de las juntas de dilatación reducen los picos de tensión pero no lo suficiente como para situarlo por debajo de la tensión admisible. Los resultados para el módulo reducido son similares a los que se obtienen para juntas de 1mm.

Para 100  $m^3/h$  y módulo variable la tensión pico es de 84 MPa. En este caso el empleo juntas de 0.5 mm reduce la tensión máxima a 68 MPa y con juntas de 1mm a 52 MPa.

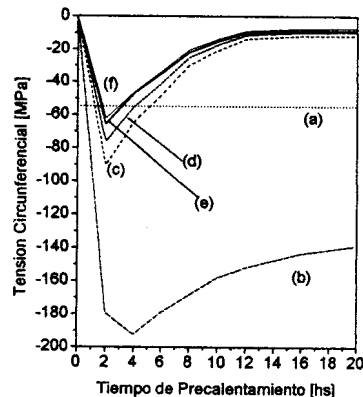


Fig.2: Tension Circunferencial en la cara caliente de la cuchara. Flujo de gas 200 $m^3/h$   
 (a) Resist a la compresion; (b) mod.ultrasonico jd=0mm  
 (c) mod.variable jd=0mm (d) mod.variable jd=0.5mm  
 (e) mod.reducido 30% jd=0mm (f) mod.variable jd=1mm

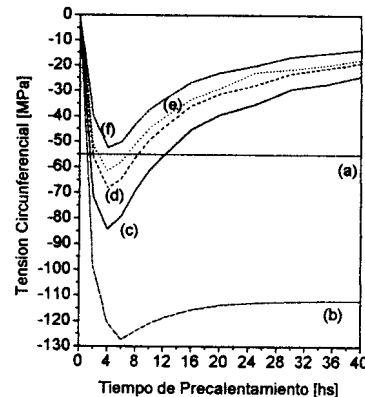


Fig.3: Tension Circunferencial en la cara caliente  
 Flujo de gas: 100  $m^3/h$   
 (a) Resist.a la compresion; (b) mod.ultrasonico jd=0mm  
 (c) mod.variable jd=0.5mm;(d) mod.variable jd=0.5mm  
 (e) mod.reducido 30% jd=0mm; (f) mod.variable jd=1mm

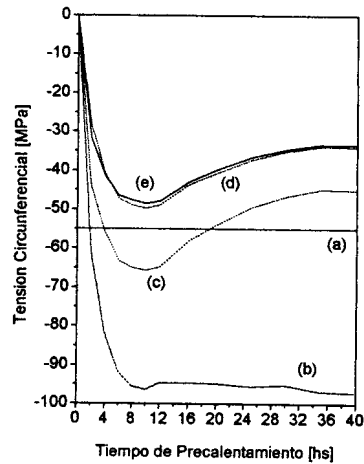


Fig.4: Tension Circunferencial en la cara caliente de la cuchara. Flujo de gas:  $50\text{m}^3/\text{h}$   
 (a) Resist. a la compresion (b) mod.ultrasonico,  $jd=0\text{mm}$   
 (c) mod. variable,  $jd=0\text{mm}$  (d) mod. variable,  $jd=0.5\text{mm}$   
 (e) mod.reducido 30%

El precalentamiento con un ritmo  $50\text{ m}^3/\text{h}$  resulta ser el menos comprometido, ya que en este caso sin juntas de dilatación el máximo se reduce a  $65\text{ MPa}$  y con la utilización de juntas de  $0.5\text{ mm}$  disminuye a  $50\text{ MPa}$ , y con el módulo reducido a  $49\text{ MPa}$ .

Para comparar los resultados de este modelo analítico con un cálculo por elementos finitos mediante el software ALGOR se modelizó un cuarto de sección transversal de la cuchara. Se resolvió un estado de tensión plana. En la figura 5 (a, b y c) se muestran las tensiones circunferenciales obtenidas por los dos métodos para distintas distancias a la cara caliente y para un ritmo de precalentamiento de  $50\text{ m}^3/\text{h}$ . El modelo analítico calcula tensiones menores. Esto se debe a que la discretización por elementos finitos es más fina y las temperaturas y módulo de Young se evalúan con más precisión. No obstante la máxima diferencia entre ambos métodos no supera el 10%.

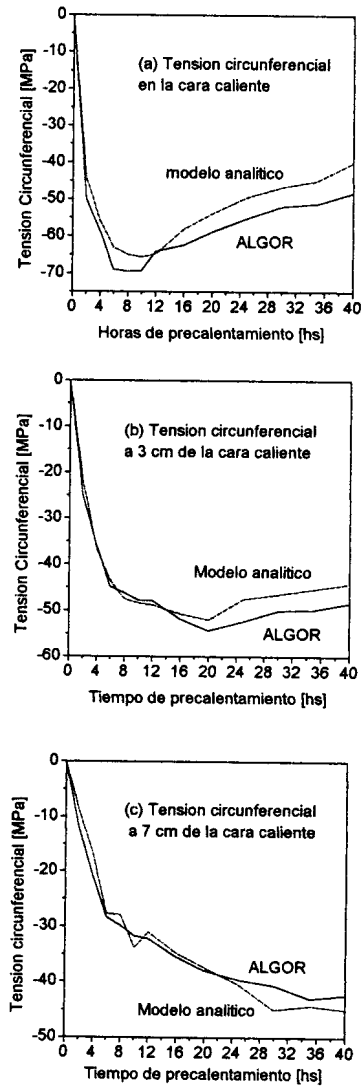


Fig.5: Comparacion del modelo analítico y el modelo numerico (FEM - ALGOR)  
 Flujo de gas:  $50\text{ m}^3/\text{h}$

### CONCLUSIONES

Las tensiones inducidas durante el precalentamiento de las cucharas de acería constituyen uno de los mecanismos principales de desgaste de los revestimientos refractarios .

La prolongación de la vida útil de estos revestimientos es de gran interés ya que su costo representa un porcentaje elevado del costo total del proceso siderúrgicos .En consecuencia la evaluación de las tensiones es imprescindible para alcanzar este objetivo.El modelo descrito en las secciones precedentes permite una buena estimación de las mismas, como también analizar la inclusión de juntas circunferenciales para reducir la magnitud de la tensión circunferencial. Cuando esta excede los valores admisibles pueden producirse fisuras paralelas a la cara caliente con un desprendimiento de capas de material.

Con respecto a los casos analizados , un precalentamiento con  $50\text{m}^3/\text{h}$  es el más adecuado desde el punto de vista termomecánico. No obstante este esquema no es el más indicado para lograr un buen control de la temperatura del acero. Un ritmo con  $100\text{m}^3/\text{h}$  compatibilizaría ambos aspectos ya que con  $200\text{m}^3/\text{h}$  el nivel de tensiones inducidas resulta muy elevado y este esquema no tiene un buen rendimiento, ya que al aumentar tan rápidamente la temperatura de la cara caliente disminuye la energía que los gases de la combustión pueden transferir al revestimiento refractario [1].

Es importante mencionar que existe una gran variedad de configuraciones de cuchara ,con materiales refractarios cuyas propiedades termomecánicas dependen del proceso de manufactura. La cuantificación de las tensiones se hace necesaria para cada caso particular y puede realizarse con este modelo simplificado.

### REFERENCIAS

- [1]Gastón, A. and M. Medina, *Precalentamiento y enfriamiento de cucharas de acería. Abacos de Operación, Mecánica Computacional*, Vol.14, 1994,págs.392-403.
- [2]Schacht,C.A., *Refractory Linings: Thermomechanical Design and Applications*, Marcel Dekker Inc.,New York, 1995.
- [3]Bell, D. and F.T. Palin, *Computer Modelling of mechanical behavior of refractories in iron and steel-making applications*, UNITERC'89 Proceedings,págs.480-485.
- [4]Boley, B. and J. Weiner, *Theory of Thermal Stresses*,Kreiger Publishing Company, Malabar,Florida,1985
- [5]Fung , Y.C. , *Foundations of Solid Mechanics*, Prentince-Hall, Inc.New Jersey,1965.
- [6]Millet, L.W., *Design of refractory lining and steel shell for caster ladles*, Iron and Steel Engineer, April 1986,págs. 58-69.
- [7]Schacht, C.A., *Improved Mechanical Material Property Definition for Predicting the Thermomechanical Behavior of Refractory Linings of Teeming Ladles*,J. Am.Ceram.Soc.76 Vol.1,1993,págs.202-206.
- [8]Schacht, C.A., *Structural behavior of teeming ladles lined with high-alumina refractories*,Iron and Steel Engineer, August 1984,págs.33-40.
- [9]Chen, E. S. *Thermomechanical Studies of Obround Ladles During Preheating and Use*,I&SM,June 1993,págs.37-43.



[10]Rathner, R. Knauder and H. Weissensteiner, *Thermomechanical Behavior of Refractory Linings with Special Emphasis on BOF Vessels*, UNITERC'91 Proceedings, págs.12-16.

[11]Chen E., R. Launtensleger and B. Brezny, *Thermomechanical Analysis of a 225-ton BOF -Vessel*, Iron and Steel Engineer, November 1993, págs.43-51.

[12]Chen E., J.Knauder and R.Rathner, *Geometry Optimization of a BOF Lining*, J. Ceramic Bulletin, vol. 71, N°1, 1992.

[13]Schacht, C.A., Influence of lining restraint and nonlinear material properties in predicting thermal shock fracture of refractory linings, UNITERC'89 Proceedings, págs.1286-1316.

## APENDICE

### Determinación de las presiones de interacción entre capas refractarias y carcaza

Supóngase la estructura cilíndrica dividida en N capas concéntricas La figura A1 muestra tres capas consecutivas. La capa N corresponde a la carcaza de acero y tiene un espesor  $t_s$

La ecuación de compatibilidad de desplazamiento radial en la interfase entre la capa i y la capa i+1, valorizada en  $r = r_{i+1}$  es:

$$\delta_{L_{i+1} p_i p_{i+1}} + \delta_{L_{i+1} ter} + g_i = \delta_{L_i p_i p_{i-1}} + \delta_{L_i ter} \quad (A1)$$

$\delta_{L_{i+1} p_i p_{i+1}}$ : es el desplazamiento radial de la capa  $L = L_{i+1}$  en  $r = r_{i+1}$  debido a las presiones  $p_i$  y  $p_{i+1}$ . Este se calcula con la expresión (10), reemplazando  $a = r_{i+1}$ ,  $b = r_{i+2}$ ,  $p = p_i$  y  $q = p_{i+1}$ .

$\delta_{L_{i+1} ter}$ : expansión térmica de la capa  $L_{i+1}$  Este se calcula con la expresión (4), tomando  $a = r_{i+1}$ ,  $b = r_{i+2}$ ,  $\alpha = \alpha_i$ ,  $T_0 = \Delta T_{i+1} = T_{L_{i+1}} - T_{ref}$

$g_i$ : junta circunferencial de dilatación térmica

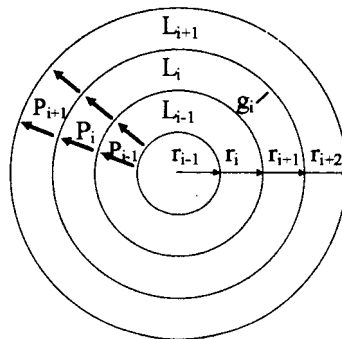


Figura A1

Planteadas las condiciones de compatibilidad para  $r = r_{i+1}$  con  $i=2, \dots, N$  se obtiene un sistema de ecuaciones con (N-1) incógnitas, las presiones  $p_i$  con  $i = 1, \dots, (N-1)$  de la forma  $Ap = F$  donde A es una matriz tridiagonal. Los coeficientes  $A_{ij}$  distintos de cero se evalúan mediante las siguientes expresiones:

$$A_{i, i-1} = -2 \frac{r_{i+1}}{E_i} \left[ \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^2 - 1 \right]^{-1} \quad i=2, \dots, (N-2) \quad (A2)$$

$$A_{i,i} = \frac{r_{i+1}}{E_{i+1}} \left\{ \frac{\left( \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}} \right)^2 + 1}{\left( \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}} \right)^2 - 1} + \nu_{i+1} \right\} + \frac{r_{i+1}}{E_i} \left\{ \frac{\left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^2 + 1}{\left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^2 - 1} - \nu_i \right\} \quad i=1, \dots, (N-2) \quad (A3)$$

$$A_{i,i+1} = -2 \frac{r_{i+1}}{E_{i+1}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{i+1}}{r_{i+2}} \right)^2 \right]^{-1} \quad i=1, \dots, (N-2) \quad (A4)$$

$$A_{N-1,N-1} = \frac{r_N}{E_S} \left\{ \frac{r_N}{t_S} + \nu_S \right\} + \frac{r_N}{E_{N-1}} \left\{ \frac{\left( \frac{r_N}{r_{N-1}} \right)^2 + 1}{\left( \frac{r_N}{r_{N-1}} \right)^2 - 1} - \nu_{N-1} \right\} \quad (A5)$$

Esta última expresión se deduce de (A3), aproximando la carcaza a una cáscara delgada de espesor  $t_s$ .

Los coeficientes del término independiente F se calculan con las siguientes expresiones:

$$F_i = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_i (r_i + r_{i+1}) \Delta T_i - \alpha_{i+1} (r_{i+1} + r_{i+2}) \Delta T_{i+1} \right\} - g_i \quad i=1, \dots, N-2 \quad (A7)$$

$$F_{N-1} = \frac{1}{2} \alpha_{N-1} (r_N + r_{N-1}) \Delta T_{N-1} - \alpha_S r_S \Delta T_S - g_{N-1} \quad (A8)$$

Resuelto el sistema de ecuaciones las tensiones circunferenciales y radiales se calculan con (6), (7), (8), (9), reemplazando  $a = r_i$ ,  $b = r_{i+1}$ ,  $p = p_{i-1}$  y  $q = p_i$ , con  $i = 1, \dots, (N-1)$ :

$$\sigma_{rr}(r) = \sigma'_{rr}(r) + \sigma''_{rr}(r) \quad (A9)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma'_{\theta\theta}(r) + \sigma''_{\theta\theta}(r) \quad (A10)$$