

## MODELACIÓN DE LA EVOLUCIÓN MORFOLÓGICA DE CAUCES CURVOS CON EROSIÓN DE MÁRGENES

Ángel N. Menéndez\*†, Carlos E. Laciana†, Pablo A. García\*†

\*Programa de Hidráulica Computacional, Laboratorio de Hidráulica, INA  
AU Ezeiza-Cañuelas, (1804) Ezeiza, Argentina ([angel.menendez@speedy.com.ar](mailto:angel.menendez@speedy.com.ar))

† Laboratorio de Modelación Matemática, Facultad de Ingeniería, UBA  
Av. Las Heras 2214 – (1127) Ciudad de Buenos Aires, Argentina

**Palabras clave:** Mecánica de Fluidos, vorticidad, corrientes secundarias.

**Resumen.** *Se presenta un modelo matemático para describir la evolución morfológica de la sección transversal de un canal curvo, incluyendo la erosión de sus márgenes. El modelo está constituido por un módulo hidrodinámico, que combina el método de la distribución lateral (LDM) para la componente longitudinal y un modelo paramétrico para la componente transversal, un módulo de transporte de sedimento de fondo, basado en el modelo mecanístico de Kovaks & Parker generalizado para incluir efectos de curvatura, y un módulo morfológico, constituido por la ecuación de Exner para la evolución del fondo y un algoritmo de erosión de la margen. El modelo es validado comparando sus predicciones con datos experimentales para un canal recto y para un canal curvo.*

**Abstract.** *A mathematical model to describe the morphological evolution of the cross-section of a curved channel, including bank erosion, is presented. The model is constituted by a hydrodynamic module, which combines the lateral distribution method (LDM) for the longitudinal component and a parametric model for the transversal component, a module for bottom sediment transport, based on the mechanistic model of Kovaks & Parker generalized to include curvature effects, and a morphologic module, constituted by Exner equation for the bottom evolution and an algorithm for bank erosion. The model is validated by comparing its predictions with experimental data for a straight and a curved channel.*

## 1 INTRODUCCIÓN

Los cursos de agua que se desarrollan sobre material aluvional muestran una morfología que es determinada por la propia acción de la corriente. Estas producen tanto variaciones de profundidad (evolución del lecho) como de ancho (evolución de la margen). La corriente acciona sobre el cauce ejerciendo una tensión de corte, la cual depende de la velocidad. En canales curvos, además de una componente longitudinal la corriente presenta una componente transversal, asociada a las corrientes secundarias.

Para simular numéricamente estos procesos es necesario formular un modelo integrado hidrodinámico/sedimentológico/morfológico. Esta formulación está condicionada por las escalas geométricas del curso y la escala de tiempo del observador. En lo que sigue se presenta un tal modelo, válido para escalas prácticas. Se describe, además, su resolución numérica.

## 2 FORMULACIÓN DEL MODELO

El modelo está integrado por tres módulos: uno hidrodinámico, uno de transporte de sedimentos y uno de evolución morfológica.

### 2.1 Modelo hidrodinámico

Para un problema de flujo en canales, pueden distinguirse localmente tres coordenadas espaciales bien definidas: una a lo largo de la dirección de flujo (longitudinal), una segunda en el plano horizontal y a través de la dirección de flujo (lateral), y una tercera en la dirección vertical (suponiendo una pendiente suave). Se considerará que, como es usual, las escalas características en esas tres direcciones son muy distintas entre sí, lo cual permite algunas simplificaciones.

En primer lugar, se supondrá que la escala longitudinal de interés (la escala del observador) es mucho mayor que las dimensiones transversales de la sección:

$$L_{ox} \gg \hat{B}, \hat{h} \quad (1)$$

donde  $\hat{B}$  es una escala para el ancho del canal,  $\hat{h}$  una escala para la profundidad de agua, y  $L_{ox}$  la escala espacial longitudinal del observador, que puede calcularse como  $L_{ox} \equiv \hat{U}\hat{T}$ , siendo  $\hat{U}$  una escala para la velocidad longitudinal de flujo y  $\hat{T}$  la escala temporal del observador. La condición (1) significa que el problema puede ser tratado por medio de una aproximación unidimensional<sup>1</sup>, es decir, que la variación longitudinal de la velocidad media en la sección transversal puede ser calculada independientemente de la variación transversal de la velocidad de flujo, utilizando un Modelo Longitudinal 1D, tal como las conocidas Ecuaciones de Saint Venant<sup>2</sup>.

En segundo lugar, la sección transversal será considerada poco profunda:

$$\widehat{B} \gg \widehat{h} \quad (2)$$

Como consecuencia de la condición (2), la distribución lateral de la velocidad de flujo puede ser determinada independientemente de la distribución vertical.

En tercer lugar, se supondrá que la escala espacial lateral del observador  $L_{oy}$ , que se calcula como  $L_{oy} \equiv \sqrt{\widehat{\varepsilon}_y \widehat{T}}$ , siendo  $\widehat{\varepsilon}_y$  una escala para la difusividad lateral, es a lo sumo del mismo orden que la dimensión lateral de la sección transversal, es decir

$$L_{oy} \lesssim \widehat{B} \quad (3)$$

Como consecuencia de (3), es pertinente calcular la distribución lateral de la velocidad longitudinal de flujo, que puede ser obtenida de un Modelo Lateral 1D, tal como el Método de la Distribución Lateral (LDM) propuesto por Wark et al.<sup>3</sup>:

$$ghI_x - \frac{B_g f}{8} U^2 + h \frac{d}{dy} \left[ \varepsilon_y \frac{dU}{dy} \right] = 0 \quad (4)$$

donde  $y$  es la coordenada lateral,  $h(y)$  la profundidad local de flujo,  $U(y)$  la velocidad longitudinal del flujo, integrada en la vertical,  $I_x$  la pendiente longitudinal del flujo (obtenida del Modelo Longitudinal 1D),  $f$  el factor de fricción de Darcy-Weisbach,  $B_g$  un factor geométrico que tiene en cuenta la inclinación del fondo:

$$B_g = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \omega} \quad (5)$$

siendo  $\alpha$  el ángulo correspondiente a la pendiente longitudinal del canal y  $\omega$  el ángulo correspondiente a la pendiente lateral, y  $\varepsilon_y$  la viscosidad lateral de torbellino, que usualmente se parametriza como

$$\varepsilon_y = \chi U_* h \quad (6)$$

donde  $\chi$  es el coeficiente adimensional de viscosidad lateral de torbellino, y  $U_* = \sqrt{\tau_b}$  la velocidad de corte, siendo  $\tau_b$  la tensión cinemática de corte en el fondo, la cual se parametriza como<sup>3</sup>

$$\tau_b = \frac{1}{8} f B_g U^2 \quad (7)$$

Como condiciones de contorno para (4) puede imponerse la condición de libre deslizamiento en ambas márgenes:

$$\left. \frac{dU}{dy} \right|_{\text{márgenes}} = 0 \quad (8)$$

que físicamente significa que no se resuelven las capas límites adyacentes a las márgenes.

La ecuación diferencial ordinaria no lineal (4) se ha discretizado utilizando un esquema de diferencias finitas centrado. El sistema algebraico no lineal resultante, se ha resuelto por el método de Newton-Raphson.

Como consecuencia de la curvatura, adicionalmente a la velocidad longitudinal se desarrollan componentes transversales que constituyen la corriente secundaria. En particular, la componente lateral de la velocidad en el fondo,  $u_r(y)$ , es de relevancia para el transporte de sedimentos. Esta se ha determinado en base al modelo paramétrico para el perfil vertical de la velocidad de Kikkawa et al.<sup>4</sup>, que supone que el radio de curvatura del canal es mucho mayor que su ancho. La expresión es la siguiente:

$$u_r = \frac{U^2}{\bar{U}} \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left( 4.167 - 2.640 \frac{1}{\kappa} \frac{\bar{U}_*}{\bar{U}} \right) \quad (9)$$

donde  $\bar{U}$  y  $\bar{U}_*$  son las velocidades longitudinales de flujo y de corte, respectivamente, promediadas sobre la sección transversal:

$$\bar{U} = \frac{1}{B} \int_0^B U dy, \quad \bar{U}_* = \frac{1}{B} \int_0^B U_* dy, \quad (10)$$

siendo  $B$  el ancho del canal,  $r = r(y)$  es el radio de curvatura, y  $\kappa$  la constante de von Karman ( $\approx 0.4$ ).

En las márgenes se cumple la condición de impenetrabilidad:

$$u_r \Big|_{\text{márgenes}} = 0 \quad (11)$$

La transición entre el valor provisto por el modelo paramétrico, ecuación (9), y el valor marginal, ecuación (11), se ha efectuado por medio de una función moduladora, ó ‘máscara’,  $M(y)$ , de la siguiente forma:

$$M(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\delta - y}{y}\right)^{1/2} & \text{si } 0 \leq y \leq \delta \\ 1 & \text{si } \delta \leq y \leq B - \delta \\ 1 - \left(\frac{\delta + y - B}{\delta}\right)^{1/2} & \text{si } B - \delta \leq y \leq B \end{cases} \quad (12)$$

donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite en la margen. Entonces, se tiene que

$$u_r = M(y)u_r|_{\text{modelo}} \quad (13)$$

## 2.2 Modelo de transporte de sedimento

El modelo se plantea en base al balance de las fuerzas que actúan sobre una partícula de sedimento: la fuerza resistiva dinámica de Coulomb (que representa la pérdida de cantidad de movimiento debido a las colisiones), la componente del peso sumergido de la partícula tangencial al plano del lecho, y la fuerza de arrastre debido al fluido en movimiento. De esta manera se llega a la siguiente ecuación<sup>5</sup>:

$$|\vec{u}_\Delta^*| \vec{u}_\Delta^* = a \tau_{C0}^* \left( |\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p} - \frac{\vec{k}_t}{\mu_C} \right) \quad (14)$$

donde  $\vec{u}_\Delta = \vec{u}_b - \vec{v}_p$ , siendo  $\vec{u}_b$  la velocidad del fluido y  $\vec{v}_p$  la de la partícula,  $a \equiv (\vec{u}_b / U_*)^2$ ,  $\tau_{C0}^*$  es la tensión de corte adimensional (parámetro de Shields) para iniciación del movimiento sobre un fondo plano,  $\hat{t}_{v_p} \equiv \vec{v}_p / |\vec{v}_p|$  el versor en la dirección de la velocidad de la partícula,  $\mu_C$  el factor de fricción dinámica de Coulomb, y  $\vec{k}_n$  y  $\vec{k}_t$  las componentes del versor vertical, dirigido hacia abajo, en las direcciones normal y transversal al lecho.

La velocidad del fluido puede expresarse como<sup>6</sup>

$$\vec{u}_b = \varepsilon U \hat{s} + u_r \sqrt{1 + \cos^2 \alpha \tan^2 \omega} \hat{p}' \quad (15)$$

donde  $\hat{s}$  es el versor en la dirección longitudinal de movimiento,  $\hat{p}'$  el versor sobre el plano tangencial al fondo y normal a  $\hat{s}$ , y  $\varepsilon$  la relación entre la componente longitudinal de la velocidad de fondo y la velocidad media vertical  $U$ . A los fines del modelo de transporte de fondo, la velocidad media vertical  $U$  se supone conocida, ya sea de mediciones o proveniente de un modelo hidrodinámico promediado en la vertical.

Para resolver (14), se propone descomponerla en componentes, multiplicándola

alternativamente por los versores  $\hat{s}$  y  $\hat{p}'$ , con lo que se obtiene<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} |\vec{u}_{\Delta}^*| (u_{bs}^* - v_p^* \cos \psi) - a\tau_{c0}^* \left( |\cos \beta| \cos \psi - \frac{\sin \alpha}{\mu_c} \right) &= 0 \\ |\vec{u}_{\Delta}^*| (u_{bp}^* - v_p^* \sin \psi) - a\tau_{c0}^* \left( |\cos \beta| \sin \psi - \frac{1}{\mu_c} \frac{\sin \omega \cos^2 \alpha}{\sqrt{\sin^2 \omega \cos^2 \alpha + \cos^2 \omega}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

donde

$$|\vec{u}_{\Delta}^*| = \left( u_{bs}^{*2} + u_{bp}^{*2} + v_p^{*2} - 2u_b^* v_p^* \cos \psi - 2u_{bp}^* v_p^* \sin \psi \right)^{1/2}, \quad (17)$$

$v_p = |\vec{v}_p|$ ,  $\psi$  es el ángulo entre el vector velocidad y la dirección  $s$ , y el asterisco indica velocidades adimensionales, con la escala  $\sigma \equiv \sqrt{Rgd}$ , siendo  $R$  la densidad relativa del grano, cuyo diámetro medio es  $d$ . El sistema (16) se ha resuelto por medio del método de Newton-Raphson, para obtener las incógnitas  $v_p^*$  y  $\psi$ .

La tasa volumétrica de sedimento transportado, adimensionalizada con la escala  $d\sigma$  y vectorizada, se calcula como<sup>5</sup>:

$$\vec{q}_b^* = \xi^* \vec{v}_p^* \quad (18)$$

donde  $\xi^*$  es el volumen adimensional de partículas que participa en el transporte de fondo. Para obtener este volumen, se efectúa un balance de cantidad de movimiento en la capa de fondo<sup>5</sup>. La generalización de este planteo para incluir los efectos de la curvatura conduce a<sup>6</sup>

$$\xi^* = \frac{\tau_b^* - \tau_c^*}{\left( \mu_c |\vec{k}_n| \hat{t}_{v_p} - \vec{k}_t \right) \cdot \hat{s}'} \quad (19)$$

donde  $\hat{s}' = \cos \alpha_s \hat{s} + \sin \alpha_s \hat{p}'$ ,

$$\tau_b^* = \frac{\varepsilon^2 U^2}{aRgd \cos \alpha_s} \quad (20)$$

es la tensión de corte en el fondo, y  $\tau_c^*$  es la tensión de corte adimensional crítica para inicio del movimiento, que se obtiene especializando (14) para condiciones críticas<sup>5</sup>. Considerando los efectos de curvatura y elevando al cuadrado se llega a<sup>6</sup>

$$\left(\frac{\tau_{Cs}^*}{\tau_{C0}^*}\right)^2 + \frac{2}{\mu_C} \frac{\bar{s}_p \cdot \bar{k}_t}{s_p^2} \frac{\tau_{Cs}^*}{\tau_{C0}^*} + \frac{1}{\mu_C^2} \frac{k_t^2}{s_p^2} - \cos^2 \beta = 0 \quad (21)$$

donde  $\bar{s}_p \equiv \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_s} (\hat{s} + \tan \alpha_s \hat{p}')$ , cuya solución físicamente significativa es

$$\frac{\tau_{Cs}^*}{\tau_{C0}^*} = -\frac{1}{\mu_C} \frac{\bar{s}_p \cdot \bar{k}_t}{s_p^2} + \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{1}{\mu_C^2} \left[ \left( \frac{\bar{s}_p \cdot \bar{k}_t}{s_p^2} \right)^2 - \frac{k_t^2}{s_p^2} \right]} \quad (22)$$

### 2.3 Modelo morfológico

La evolución morfológica del fondo del canal se determina resolviendo la ecuación de Exner, que expresa la conservación de la masa del sedimento<sup>7</sup>:

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} (r q_{by}) + \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} \right] = 0 \quad (23)$$

donde  $z_0$  es la elevación del fondo,  $t$  la coordenada temporal,  $\lambda$  la porosidad del sedimento de fondo,  $q_{bx}$  y  $q_{by}$  el transporte volumétrico longitudinal y lateral, respectivamente, de sedimento por unidad de ancho.

Si se suponen condiciones longitudinales cuasi-uniformes, es decir,  $\partial/\partial x = 0$ , (23) puede ser discretizada con el siguiente esquema explícito centrado de diferencias finitas:

$$\begin{aligned} & \frac{[z_0]_j^{n+1} - (1-\theta)[z_0]_j^n + \theta([z_0]_{j-1}^n + [z_0]_{j+1}^n)}{\Delta t} \\ & + \frac{r_{j+1}[q_{by}]_{j+1}^n - r_{j-1}[q_{by}]_{j-1}^n}{2(1-\lambda)r_j \Delta y} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

donde  $n$  es el índice de nivel de tiempo,  $j$  el índice de nodo espacial, y  $0 \leq \theta \leq 1$  un factor de peso. Incrementando  $\theta$  desde 0 a 1, se produce un incremento de la difusión numérica. Nótese que si  $\theta = 1$ , se obtiene el esquema de Lax<sup>8</sup>.

La erosión de la margen se tiene en cuenta a través del algoritmo siguiente, que supone que el nivel de agua es igual al nivel de las márgenes (condición de cauce lleno):

- Luego de cada paso de cálculo, se determina la pendiente de la margen.

- Si la pendiente de la margen es menor que la pendiente crítica, dada por la condición  $\tan \omega_c = \mu_c$ , no se toma ninguna acción.
- Por el contrario, si la pendiente de la margen es igual o superior al valor crítico, se considera un proceso de deslizamiento local: la elevación del nodo de la margen se disminuye hasta que la pendiente de la margen se haga crítica, y se agrega un nuevo nodo al dominio espacial de cálculo (hacia el exterior del canal), para representar la nueva ubicación de la margen. Para tener en cuenta la conservación de la masa, el volumen deslizado es luego distribuido entre los nodos adyacentes a la margen.

### 3 VALIDACIÓN

Para validar el modelo se efectuaron dos pruebas diferentes, para las cuales existen resultados experimentales y de cálculo. En primer lugar, se consideró un canal recto con márgenes erosivos, para validar el algoritmo de erosión de márgenes. En segundo lugar, se tomó un canal curvo de márgenes fijas, de modo de validar el tratamiento de los efectos de la corriente secundaria. Para ambos problemas, las condiciones son de uniformidad longitudinal, es decir  $\partial/\partial x = 0$ .

El canal recto tiene una forma trapezoidal, con una base de 0,22 m, un ancho superficial de 0,438 m, una profundidad de 61 mm, una pendiente de 0.00215, y fondo y márgenes de arena con diámetro medio 1,3 mm. Para los parámetros del modelo se tomaron los mismos valores que Kovacs & Parker<sup>5</sup>:  $a^{1/2} = 11.9$ ,  $\tau_{c0}^* = 0,0.35$ ,  $\mu_c = 0,84$ ,  $\lambda = 0,35$ ,  $\varepsilon_y / U_* h = 0,13$ . El dominio lateral inicial se discretizó en 100 intervalos. El factor de peso  $\theta$  se tomó nulo, correspondiendo a las condiciones menos difusivas. El paso temporal fue de  $\Delta t = 1$  seg, que produce cambios de elevación del lecho no mayores a 1 mm por paso de tiempo, proveyendo entonces suficiente precisión.

En la figura 1 se presenta la comparación, para la evolución de la (mitad de la) sección transversal normalizada, entre los resultados numéricos presentes, los experimentales y los obtenidos por Kovacs & Parker<sup>5</sup>, identificados como K&P en la figura. Estos autores utilizaron un modelo hidrodinámico transversal 2D. Se observa que el modelo K&P captura con mayor precisión la pendiente de la margen. Las desviaciones observadas en el fondo se deben a la presencia de formas de fondo, no incluidas en la presente teoría.

En la figura 2 se muestra la evolución temporal del ancho superficial y la profundidad en el eje central del canal, relativos a sus valores iniciales. En el caso del ancho superficial, se observa que la respuesta del presente modelo, que es de tipo escalera debido a la naturaleza impulsiva del algoritmo de erosión, sigue la tendencia de la solución de K&P, y en ambos tratamientos se sobrestima la tasa experimental de crecimiento en los instantes iniciales, aunque el acuerdo mejor a medida que pasa el tiempo. Respecto de la profundidad, el presente

modelo provee un mejor acuerdo con los resultados experimentales.

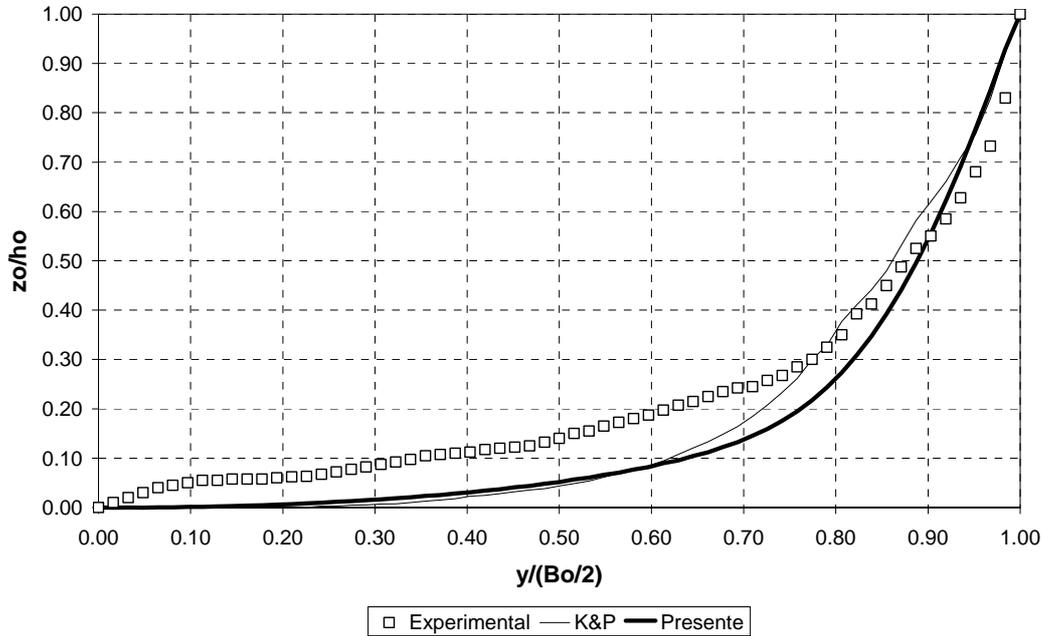


Figura 1: Comparación de resultados del modelo presente y del de K&P con datos experimentales para la forma de la sección transversal del canal recto, luego de 12 horas de iniciado el experimento

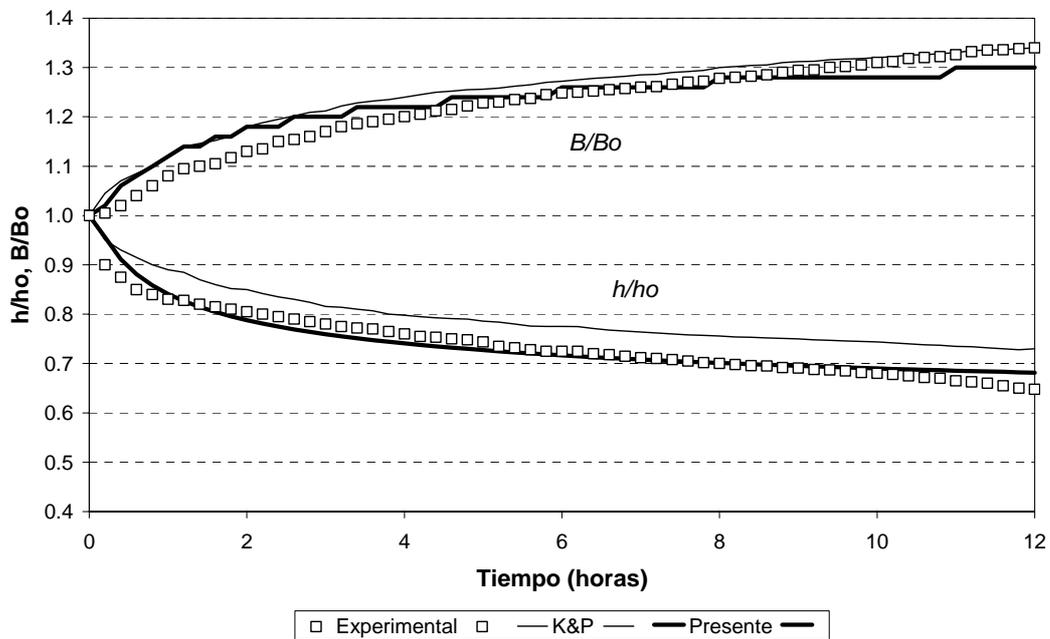


Figura 2: Comparación de resultados del modelo presente y del de K&P con datos experimentales para el ancho superficial y la profundidad del canal recto

Estos resultados muestran que el presente tratamiento, más simple que el de K&P pero físicamente riguroso, es lo suficientemente adecuado como para capturar todos los fenómenos relevantes.

El canal curvo tiene un ancho de 1 m, una pendiente longitudinal de 0,002, una profundidad inicial uniforme de 0,063 m, fondo de arena con diámetro medio 0,9 mm y radio de curvatura de 4,5 m. Se consideró el mismo coeficiente de fricción que para el caso recto, es decir,  $\mu_c = 0,84$ . El caudal es de 30 l/s. El dominio fue discretizado en 100 intervalos. El factor de peso para este caso se tomó en  $\theta = 1$ , lo cual fue necesario para mantener la estabilidad numérica. Esto sugiere que el factor de peso debe elegirse en función del radio de curvatura. El paso temporal fue de  $\Delta t = 1$  seg. El espesor de la capa límite se tomó como  $\delta/B = 0,20$ .

En la figura 3 se muestra la comparación entre las presentes predicciones y los datos experimentales de Kikkawa et al.<sup>4</sup>. El acuerdo se considera satisfactorio, teniendo en cuenta que el modelo representa correctamente la tendencia de evolución y da el orden de magnitud correcto para el cambio de nivel.

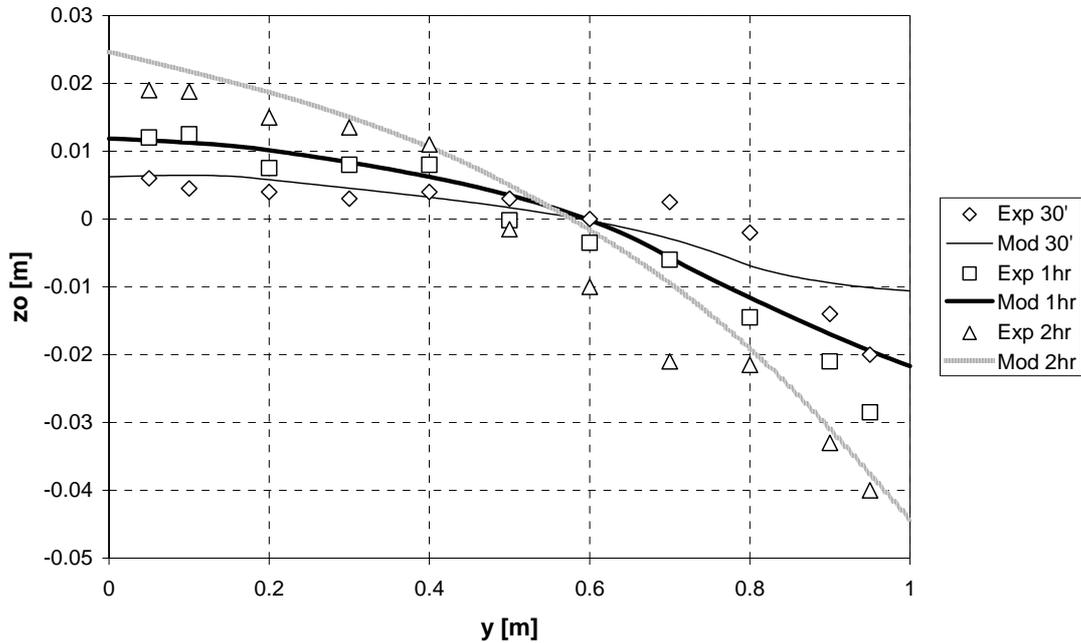


Figura 3: Comparación de resultados del modelo presente con datos experimentales para la sección transversal del canal curvo

#### 4 CONCLUSIONES

La performance del modelo integrado hidrodinámico/sedimentológico/morfológico, incluyendo erosión de márgenes, ha resultado satisfactoria, indicando que la formulación matemática propuesta es adecuada desde el punto de vista físico y que la resolución numérica es precisa. Aún se requiere de un análisis relativo a la resolución de la ecuación morfológica, que culmine en algún criterio de elección para el factor de peso más apropiado.

#### 5 REFERENCIAS

- [1] A.N. Menéndez, "Selection of optima mathematical models for fluvial problems", *Third IAHR Symposium on River, Coastal and Estuarine Morphodynamics*, Barcelona, Spain, September (2003).
- [2] S. C. Jain, *Open-Channel Flow*. John Wiley and Sons, New York (2001).
- [3] J.B. Wark, P.G. Samuels and D.A. Ervine, "A practical method of estimating velocity and discharge in a compound channel", *River Flood Hydraulics*, W.R. White, ed., John Wiley & Sons, Inc., Chichester, UK, 163-172 (1990).
- [4] H. Kikkawa, S. Ikeda, and A. Kitagawa, "Flow and Bed Topography in Curved Open Channels", *Journal of the Hydraulics Division*, **102**, HY9, September, 1327-1343 (1976).
- [5] A. Kovacs, and G. Parker, "A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels", *J. Fluid Mech.*, **267**, 153-183 (1994).
- [6] A.N. Menéndez, C.E. Laciana, and P.A. García, "The Kovacs-Parker bed load transport model generalized to include curvature effects", under preparation (2005).
- [7] A. J. Raudkivi, *Loose Boundary Hydraulics*, 3<sup>rd</sup> Edition, Pergamon Press, New York (1990).
- [8] G. Marshall, *Solución numérica de ecuaciones diferenciales*, Tomo 2, Reverté, Buenos Aires (1985).