

## REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO CONCRETO VIA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

Karla S. Saraiva, Guillermo J. Creus

Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.  
Av. Osvaldo Aranha, 99. Porto Alegre, RS. Brasil.

### RESUMO

O presente trabalho apresenta um modelo de dano contínuo o comportamento instantâneo e dependente do tempo do concreto. O modelo tem caráter anisótropo e está baseado em deformações. Além da apresentação do modelo, comenta-se sua implementação em um programa de elementos finitos. Resultados obtidos são comparados a resultados experimentais encontrados na bibliografia.

### ABSTRACT

This paper presents a continuum damage model for the representation of the instantaneous and time dependent behavior of concrete. The model is anisotropic and strain-based. Besides the model presentation, its implementation on a finite elements program is commented. The results obtained with the model are compared with the experimental results, found in the literature.

### INTRODUÇÃO

O conceito de Mecânica do Dano Contínuo foi formulado originalmente por Kachanov, em 1958 [conforme referência 1]. Sua primeira aplicação foi para simular a fluência terciária em metais.

A partir década de 70, este conceito foi retomado por vários pesquisadores, gerando inúmeras aplicações, como por exemplo: modelos para análise de fadiga, modelos para fluência não-linear e modelos para simulação do comportamento do concreto. Estas aplicações davam-se pela associação de modelos elásticos, plásticos e, mais raramente, viscoelásticos ou viscoplásticos com modelos de dano contínuo.

A Mecânica do Dano Contínuo tem um enfoque fenomenológico, ou seja, preocupa-se em simular os efeitos causados pela formação de microdefeitos sobre o comportamento global do corpo, não considerando a microestrutura do material. Isto traz como vantagem teórica o fato de permanecerem válidas as hipóteses do contínuo. Além disto, para fins de aplicação computacional, o esforço exigido é bastante menor.

A Mecânica do Dano Contínuo baseia-se no conceito de variável de dano. Para expô-lo, veja-se a Fig. 1. Ai encontra-se um elemento retirado do interior de um corpo submetido a uma certa solicitação externa. A superfície total é dada por S e os microdefeitos têm, cada um, uma área  $S_i$ .

Define-se a variável de dano como sendo a área dos microdefeitos sobre a área total.

$$d = \frac{\sum S_i}{S} \quad (1)$$

Deste modo, a variável de dano poderá assumir valores entre 0 (material livre de defeitos) e 1 (a área dos microdefeitos atingem toda superfície). Em geral, a ruptura ocorre para valores inferiores a 1, sendo este valor denominado dano crítico.

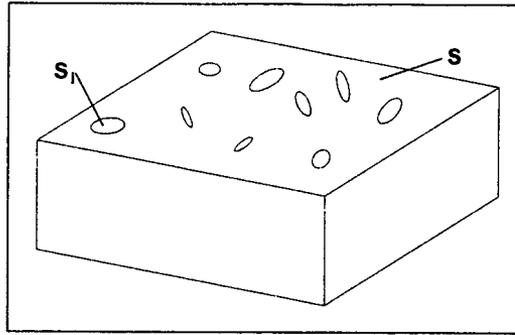


Fig. 1 - Superfície com Microfretos

Conforme este conceito, a área que efetivamente suporta as solicitações será  $(1-d)$ . A variável de dano poderá ter caráter isotrópico, quando os microfretos não têm direção preferencial. Isto acontece em metais dúcteis. Quando os microfretos encontram-se orientados, a variável de dano terá caráter anisótropo. Este caso é característico de materiais frágeis, como concreto.

Relacionando-se os conceitos acima com um material elástico com dano, pode-se escrever, para o caso isotrópico:

$$\sigma_{ij} = (1-d) C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

Para o caso geral de dano anisótropo a variável de dano influenciará cada termo do tensor elástico de forma distinta, passando (2) a ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

Segundo o que foi anteriormente exposto, a Mecânica do Dano Contínuo pressupõe que a existência de microfretos diminui a superfície resistente efetiva. Deste modo, pode-se introduzir o conceito de tensão efetiva. Para o caso isotrópico a tensão efetiva será dada por:

$$\sigma_{ij}^{ef} = \frac{\sigma_{ij}}{(1-d)} \quad (4)$$

Para o caso anisótropo:

$$\sigma_{ij}^{ef} = M_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (5)$$

onde  $M$  é um tensor de quarta ordem, caracterizando o estado de dano, podendo ainda ser expresso como:

$$M_{ijkl} = C_{ijmn} (C_{nmkl}^0)^{-1} \quad (6)$$

Posteriormente, Lemaître [1] introduziu a hipótese da deformação efetiva: "a deformação associada a um estado danificado sujeito a uma tensão aplicada é equivalente àquela associada a um estado não-danificado sujeito à tensão efetiva correspondente". Na Fig. 2 vê-se a representação esquemática deste conceito.

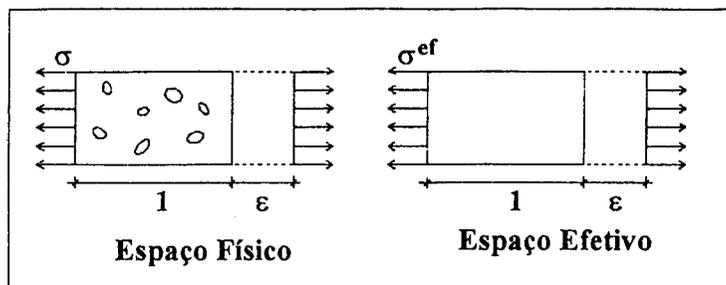


Fig. 2 - Equivalência de Deformações

### MODELO DE DANO CONTÍNUO SEGUNDO MAZARS [2]

O modelo apresentado teve como embasamento inicial o modelo de Mazars. Além disto, este modelo será necessário para apresentação de alguns exemplos.

O modelo de Mazars é isotrópico e baseado em deformações, considerando o material elástico com dano contínuo. Deste modo, a forma da lei constitutiva é dada pela equação (2). O critério de danificação é expresso por:

$$F(\varepsilon^{eq}) = \varepsilon^{eq} - r \geq 0 \quad (7)$$

onde  $\varepsilon^{eq}$  é uma deformação equivalente e  $r$  o limite de danificação, sendo suas expressões apresentadas nas expressões (8) e (9), respectivamente:

$$\varepsilon^{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2} \quad (8)$$

$$r = \max \left\{ r_0, \max_{0 \leq s \leq t} \varepsilon_s^{eq} \right\} \quad (9)$$

onde  $\varepsilon_i$  são as deformações principais e  $r_0$  o limite inicial de danificação. Este limite é tomado como sendo a deformação correspondente à máxima tensão no ensaio de tração uniaxial.

A variável de dano, com caráter escalar, começa por ser definida para os casos de compressão e tração uniaxial:

$$d_c = 1 - \frac{(1 - A_c)r_0}{\varepsilon^{eq}} - A_c \exp[-B_c(\varepsilon^{eq} - r_0)] \quad (10)$$

$$d_t = 1 - \frac{(1 - A_t)r_0}{\varepsilon^{eq}} - A_t \exp[-B_t(\varepsilon^{eq} - r_0)] \quad (11)$$

onde  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $A_t$  e  $B_t$  são parâmetros a serem determinados. A expressão geral fica dada por:

$$d = \alpha_c d_c + \alpha_t d_t \quad (12)$$

onde  $\alpha_c$  e  $\alpha_t$  são fatores de ponderação entre o dano causado por tensões de tração e tensões de compressão, dados por:

$$\alpha_t = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle \langle (\varepsilon_t)_i \rangle}{(\varepsilon^{eq})^2} \quad (\varepsilon_t)_i = C_{ijj}^{-1} \langle \sigma_j \rangle \quad (13)$$

$$\alpha_c = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle \langle (\varepsilon_c)_i \rangle}{(\varepsilon^{eq})^2} \quad (\varepsilon_c)_i = C_{ijj}^{-1} \langle -\sigma_j \rangle \quad (14)$$

Estes fatores de ponderação são definidos apenas na etapa inicial e devem-se manter constantes ao longo do processo. Deste modo, o modelo fica restrito a processos de carregamentos onde a relação entre as tensões não se alterem (carregamento radial).

### MODELO DE DANO ANISÓTROPO

Este modelo constitui-se em contribuição original dos autores. Inicia-se pela definição das relações tensão-deformação:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2 - \nu_{13} \sigma_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu_{12} \sigma_1 - \nu_{23} \sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu_{13} \sigma_1 - \nu_{23} \sigma_2) \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\ \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \\ \gamma_{13} &= \frac{\tau_{13}}{G_{13}} \end{aligned} \quad (15)$$

onde:

$$G_{ij} = \frac{E}{2(1 + \nu_{ij})} \quad i = 1, 2 \quad j = i+1, 3 \quad (16)$$

As propriedades do material afetado por dano serão:

$$\begin{aligned} E &= E_0(1 - d) \\ \nu_{ij} &= \frac{\nu_0}{(1 - a_{ij}d)} \quad i = 1, 2 \quad j = i+1, 3 \end{aligned} \quad (17)$$

sendo  $d$  uma variável representando o dano, com caráter escalar, e  $a_{ij}$  uma variável de dano ligada ao coeficiente de Poisson.

Através da inversão das relações (15) é obtido o tensor elástico:

$$C = \beta \begin{bmatrix} 1 - \nu_{23}^2 & \nu_{12} + \nu_{13}\nu_{23} & \nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{12} + \nu_{13}\nu_{23} & 1 - \nu_{13}^2 & \nu_{23} + \nu_{12}\nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23} & \nu_{23} + \nu_{12}\nu_{13} & 1 - \nu_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}/\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12}/\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12}/\beta \end{bmatrix} \quad (19)$$

sendo  $\beta$ :

$$\beta = \frac{E}{1 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{13} - \nu_{12}^2 - \nu_{23}^2 - \nu_{13}^2} \quad (20)$$

A lei de danificação mantém as definições de Mazars, apresentadas nas expressões (7), (8) e (9). A variável de dano  $d$  permanece com sua definição para o caso geral dada em (12), junto com (13) e (14). A modificação fica por conta das deformações principais evoluírem diferentemente, tendo em vista não ser o modelo isotropo. Modifica-se, também a expressão para o dano no caso uniaxial:

$$d_c = 1 - \frac{1 + A_c(\varepsilon^{eq} - r_0)^{C_c}}{1 + A_c(\varepsilon^{eq} - r_0)^{C_c} + B_c(\varepsilon^{eq} - r_0)^2} \quad (21)$$

$$d_t = 1 - \frac{(1 - A_t)r_0}{\varepsilon^{eq}} - A_t \exp[-B_t(\varepsilon^{eq} - r_0)] \quad (22)$$

Resta, ainda, a definição da variável  $a_{ij}$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - \alpha_j \exp(-100\varepsilon_j) \geq 0 & \text{se } \varepsilon_i < \varepsilon_j \leq 0 \\ \alpha_i \exp(-100\varepsilon_i) \leq 1 & \text{se } \varepsilon_i < 0 \text{ e } \varepsilon_j \geq 0 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (23)$$

Note-se que a variável  $a_{ij}$  dispensa a determinação de parâmetros.

O tensor elástico aqui definido encontra-se referido aos eixos de tensões principais. Para sua aplicação, deve ser rotado para o sistema de eixos globais.

### CONSIDERAÇÃO DE DEFORMAÇÕES IRREVERSÍVEIS

Ao analisarmos o modelo anterior, verifica-se que o coeficiente de Poisson assume valores superiores a 0,5, o que significa módulo de compressibilidade negativo, trazendo, como consequência, a possibilidade de aparecerem matrizes singulares. Fisicamente, como é demonstrado experimentalmente [3], durante a compressão aparece uma inversão na deformação volumétrica. Entretanto, o módulo de compressibilidade do concreto torna-se negativo apenas aparentemente, pois parte da deformação medida não é efetivamente uma deformação do material, mas sim fissuras abertas.

Por outro lado, experimentos mostram que no processo de descarga aparecem deformações residuais [4], fato este que também não fica definido no modelo anterior.

Para contornar estes dois pontos propõe-se a introdução de deformações anelásticas irreversíveis no modelo, ficando o tensor de deformações dado pela soma:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^a \quad (24)$$

A lei tensão-deformação toma, agora, a seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^c \quad (25)$$

Tendo em vista que os resultados para carga monotonicamente crescente foram bons com o modelo anterior, deseja-se que nesta situação os resultados sejam reproduzidos. Deste modo, igualando-se a expressão (25) à expressão (3), tem-se que:

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^c \quad (26)$$

onde o tensor C foi definido no item anterior. Para estabelecer  $C^*$  mantém-se todas as definições anteriores relativas ao tensor C, modificando-se apenas a variável de dano d, que será substituída por uma variável  $d^*$ :

$$d^* = h(\varepsilon^{eq})d \quad (27)$$

Como uma primeira aproximação, toma-se a função  $h(\varepsilon^{eq})$  como constante. Segundo ensaios de Ramtani [4], observa-se que este valor pode-se situar entre 0,5 e 0,6.

Na Tabela 1 compara-se os valores do coeficiente de Poisson para o ensaio de compressão uniaxial considerando-se e não considerando-se as deformações residuais.

d	$\nu_{12}$	$\nu_{12}^*$
0	0,200	0,200
0,4	0,333	0,238
0,6	0,500	0,263
0,8	1,00	0,385
0,9	2,00	0,435
0,95	4,00	0,465

Tabela 1 - Evolução do coeficiente de Poisson

## EXTENSÃO PARA CARGAS DE LONGA DURAÇÃO

Para considera-se o efeito de cargas de longa duração considera-se o concreto como um material viscoelástico com dano e inclui-se deformações por retração.

### MODELO VISCOELÁSTICO COM DANO

Parte-se da relação integral:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{kl}}{C_{ijkl}} + \int_{\tau_0}^t f_{ijkl}(t, \tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (28)$$

sendo C o tensor elástico com dano definido nos itens anteriores e f obtido a partir do tensor função de fluência:

$$f_{ijkl}(t, \tau) = -\frac{\partial F_{ijkl}(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (29)$$

A expressão (28) divide o tensor de deformações em duas parcelas:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^a + \varepsilon_{ij}^v \quad (30)$$

onde  $\varepsilon^e + \varepsilon^a$  é representado pela primeira parcela do termo à direita, podendo ser unificada apenas em  $\varepsilon^e$  para modelos que não considerem deformações anelásticas, e  $\varepsilon^v$ , pela segunda parcela.

Considera-se que a fluência do concreto tem caráter isótropo. Deste modo, passa-se a representar o tensor f como:

$$f_{ijkl}(t, \tau) = \frac{e(t, \tau)}{E^0} (C_{ijkl}^0)^{-1} \quad (30)$$

Pela expressão acima fica estabelecido que a função de fluência fica independente do dano. Deste modo, apenas a deformação elástica e a deformação anelásticas são função do dano. O fenômeno viscoelástico depende apenas da história de tensões e características iniciais do material. Note-se que ao longo do tempo as deformações elásticas e anelásticas também aumentam, tendo em vista a evolução do dano.

As definições do critério de danificação e da função de dano seguem inalteradas em relação ao modelo para cargas instantâneas, podendo-se empregar qualquer modelo desejado, inclusive os apresentados neste trabalho. A progressão do dano com o tempo existe em função do aumento das deformações totais.

### CONSIDERAÇÃO DA RETRAÇÃO DO CONCRETO

A retração será tratada como uma deformação imposta hidrostática, cuja fórmula adotada para sua avaliação é dada por:

$$\varepsilon^s = -A_s [1 - \exp(-B_s t)] \quad (31)$$

A inclusão da retração faz com que o tensor de deformações fique dividido em:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^a + \varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^s \quad (32)$$

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os modelos foram implementados sobre um programa de elementos finitos para estado plano. Para o modelo instantâneo a análise foi feita utilizando-se o Método do Incremento de Deslocamentos, adotado após comparação com o Método do Controle de Trabalho, tendo o primeiro apresentado maior eficiência.

O modelo dependente do tempo foi implementado utilizando o Método das Variáveis de Estado [5,6], que permite a realização da análise levando em conta a história de tensões, porém com reduzida demanda de memória. Este método transforma a função de fluência numa série de Dirichlet-Prony, identificada com o modelo reológico Kelvin generalizado. Para análise dependente do tempo o Método do Incremento de Deslocamentos já não é válido, sendo substituído pelo Método da Rigidez Secante.

### EXEMPLOS

#### COMPORTAMENTO INSTANTÂNEO SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL

A seguir mostra-se o ajuste de uma curva em compressão simples de uma ensaio feito por Kupfer [3]. Utiliza-se como dados iniciais:  $E_0 = 32000$  MPa,  $\nu_0 = 0.175$ ,  $r_0 = 10^{-4}$ .

Com estes dados, ajusta-se os parâmetros da equação (21), através de um programa de regressão não-linear:  $A_c = 9,43.10^7$ ,  $B_c = 2,7556.10^{10}$ ,  $C_c = 1,1936$ .

A Fig. 3(a) mostra a comparação dos resultados.

#### ENVOLTÓRIA DE RUPTURA SOB CARREGAMENTO BIAxIAL

Utiliza-se os dados anteriores para ajuste de  $d_c$ . Como o experimento não traz dados sobre o ramo descendente em tração, estima-se:  $A_t = 0,9$ ,  $B_c = 20000$ .

Analisa-se diversas combinações biaxiais, tomando-se as tensões máximas para cada caso. Com estes dados traça-se uma curva envoltória de ruptura, apresentada na Fig. 3(b), comparando-se com os dados experimentais.

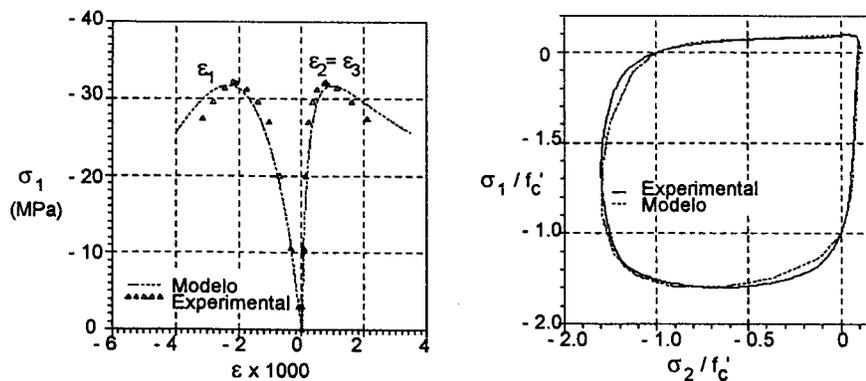


Fig. 3 - Comparação de resultados do modelo com dados experimentais [3].  
(a) Curva de compressão uniaxial (b) Envoltória de ruptura biaxial.

### COMPORTAMENTO NO TEMPO SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL

O modelo para cargas de longa duração será comparados com resultados experimentais de Smadi et al. [7]. Como neste trabalho não existem dados suficientes para ajuste do modelo anisótropo, será utilizado o modelo isotrópico de Mazars para representação do dano.

Os dados iniciais são:  $E_0 = 22000\text{MPa}$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $r_0 = 0,0001$ .

Os coeficientes para a função de dano obtidos foram:  $A_c = 0,936$ ,  $B_c = 1507$ .

Para a fluência tomou-se uma cadeia Kelvin com 3 elementos, tendo sido necessário ajustar-se 6 coeficientes (três constantes de mola e três tempos de retardação). O ajuste também foi feito por regressão não-linear, resultando os valores da Tabela 2.

O ajuste dos parâmetros de retração resultou:  $A_s = 78911,0$ ,  $B_s = 7,40440 \cdot 10^{-5}$ .

i	$E_i$	$\theta_i$
1	697,43	1273,04
2	1703,87	1790,89
3	26190,10	0,78

Tabela 2 - Valores dos parâmetros da função de fluência.

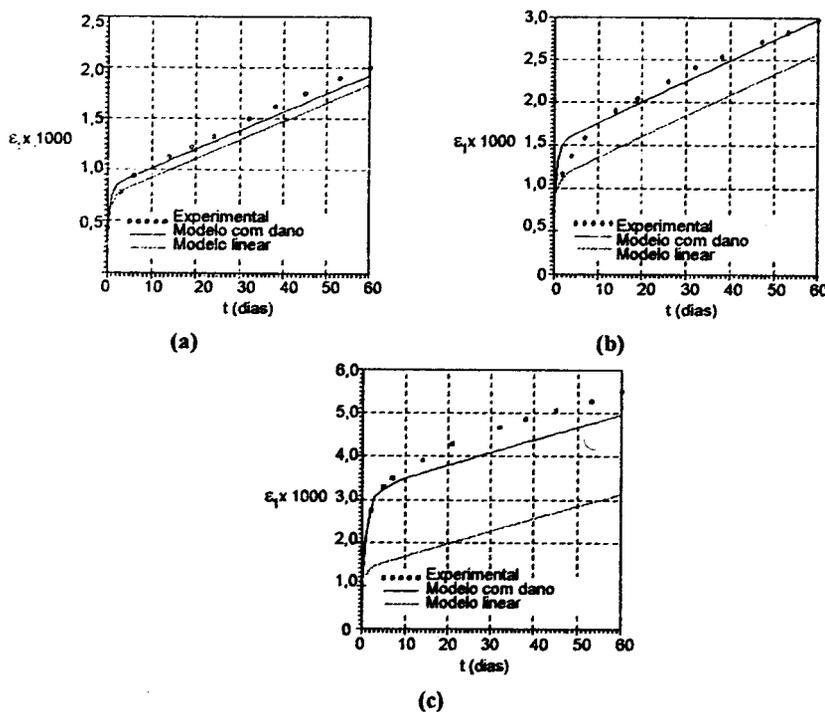


Fig. 4 - Comportamento no tempo em compressão uniaxial. Comparação dos resultados de modelo viscoelástico linear e viscoelástico com dano com dados experimentais [7].

(a)  $\sigma_1 = 0,4f_c'$  (b)  $\sigma_1 = 0,6f_c'$  (c)  $\sigma_1 = 0,75f_c'$

Com estes dados foram geradas curvas para três níveis de tensões: 0,4; 0,6 e 0,75 de  $f'_c$ . Para cada nível foi gerada uma curva considerando o modelo viscoelástico linear e viscoelástico com dano. Os resultados, comparados com o experimento, encontram-se nas Fig. 4(a), (b) e (c). Pode-se, então, contar que a 0,4  $f'_c$  os resultados para o modelo linear e com dano são muito próximos. Entretanto, a medida que a tensão cresce, estes resultados afastam-se gradativamente.

### CONCLUSÕES

O modelo anisótropo para análise instantânea mostra razoável aproximação do comportamento do concreto sob carregamentos uniaxial e biaxial. Apesar de ser um modelo anisótropo, necessita que se estabeleça parâmetros apenas para uma variável de dano escalar, ficando a anisotropia por conta de sua diferente aplicação em cada termo do tensor elástico. Este fato faz com que os ensaios necessários para calibragem do modelo sejam relativamente simples.

A extensão de modelos de dano contínuos para a análise dependente do tempo de concreto mostrou ter, também, um comportamento razoável. Tendo-se a função de dano de ensaios instantâneos e as funções de fluência linear e retração, sua aplicação é imediata, não necessitando de parâmetros extras.

### BIBLIOGRAFIA

1. KRAJČINOVIC, D. e LEMAITRE, J. *Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1990. 294 p.
2. MAZARS, J. *Application de la Mécanique de l'Endommagement au Comportement Non-Linéaire et à la Rupture du Béton de Structure*. Thèse de Doctorat d'Etat. Université Pierre et Marie Curie. Paris IV. Laboratoire de Mécanique et Technologie. 1984. 283p.
3. KUPFER, H. Das Verhalten des Beton unter Mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter Besonderer Berücksichtigung der Zweiachsigen Beanspruchung. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*. pp. 1-105.
4. RAMTANI, S. *Contribution à la Modélisation du Comportement Multiaxial du Béton Endommagé avec Description du Caractère Unilateral*. Thèse de Doctorat d'Etat. Université Pierre et Marie Curie. Paris IV. Laboratoire de Mécanique et Technologie. 1990. 228p.
5. CREUS, G. J. *Viscoelasticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. 169 p.
6. MASUERO, J.R. *Análise de problemas de fratura em materiais viscoelásticos via elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, CPGEC/UFRGS, 1992.
7. SMADI, M.M., SLATE, F.O. e NILSON, A.H. Shrinkage and Creep of High-, Medium- and Low-Strength Concretes, Including Overloads. *ACI Materials Journal*, May-June. 1987.

### AGRADECIMENTOS

Agradece-se à CNPq, CAPES e FAPERS pelo apoio financeiro que tornou possível a realização deste trabalho.

