

MODELO DE DAÑO Y PLASTICIDAD ACOPLADOS

Bibiana M. Luccioni, Sergio H. Oller, Rodolfo F. Danesi
Laboratorio de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán -- Av. Roca 1800,
4000 S.M. de Tucumán, Argentina

RESUMEN

Se presenta en este trabajo un modelo constitutivo que acopla la plasticidad y el daño. El modelo es termodinámicamente consistente y surge de una generalización de la teoría clásica de plasticidad y de la teoría de daño isotrópico de Kachanov. El acoplamiento entre la plasticidad y el daño se logra mediante la solución simultánea de los problemas plástico y de daño. Después de una descripción del modelo, se presenta un algoritmo numérico para la integración de las ecuaciones constitutivas resultantes. Se trata de un algoritmo de tipo Euler-Backward que resulta particularmente apropiado para la solución de problemas no lineales de tensión plana con programas de elementos finitos 2D. Se deriva además la matriz de rigidez consistente correspondiente. El trabajo se completa con algunos ejemplos de aplicación que muestran que el modelo propuesto reproduce ajustadamente el comportamiento de materiales elasto-plástico-degradables.

ABSTRACT

A constitutive model that couples plasticity and damage is presented. The model is thermodynamically consistent and comes from a generalization of classical plasticity theory and isotropic damage theory of Kachanov. Coupling between plasticity and damage is achieved through a simultaneous solution of the plastic and the damage problem. After a description of the model, a numerical algorithm for the integration of the resulting constitutive equations is presented. It is an Euler Backward type of algorithm that is particularly suitable to solve plain stress non linear problems with a 2D finite element program. The consistent stiffness matrix is also derived. The paper is completed with some application examples that show that the model presented accurately reproduces the behaviour of elastic-plastic-damaged materials.

INTRODUCCION

La mayor parte de los materiales, en particular los geomateriales, presentan un comportamiento no lineal acompañado de deformaciones permanentes y degradación de rigidez cuando son sometidos a fuerzas mecánicas.

En los geomateriales las deformaciones permanentes son causadas por la microfisuración. La teoría de plasticidad puede ser usada como un marco matemático para tratar el problema de deformaciones permanentes si se asimilan las mismas a deformaciones plásticas [1].

El daño o la degradación de rigidez está asociado a la iniciación, crecimiento e interconexión de microfisuras y microporos. Se han propuesto un gran número de enfoques para simular este fenómeno, ver [2,3]. Entre ellos, la mecánica de daño continuo ha sido introducida y utilizada ampliamente para simular la degradación progresiva de las propiedades mecánicas de los materiales antes de la iniciación de la macrofisuración. Kachanov [4] fue el primero en introducir el concepto de *tensión efectiva* para modelar ruptura por creep. Más tarde, la mecánica del daño continuo fue extendida para simular fatiga, creep, interacción creep-fatiga y daño dúctil-plástico. Recientemente ha sido aplicada a materiales frágiles como hormigón o rocas.

Las mecánica del daño continuo está basada en la termodinámica de los procesos irreversibles. Para modelar el daño isotrópico se necesita una única variable escalar mientras que para modelar la anisotropía del daño son necesarias

variables tensoriales. Por simplicidad, eficiencia y adaptación a diferentes aplicaciones prácticas, las formulaciones isotropas son ampliamente usadas [2].

Existe cierta evidencia experimental de que el daño está ligado a las deformaciones plásticas [2]. Los mecanismos de interacción entre el daño y la plasticidad son de naturaleza complicada y no pueden ser modelados mediante un sólo enfoque fenomenológico. Se sabe muy poco sobre los efectos de la temperatura, velocidad de deformación, localización o microestructura en estas interacciones. Algunos autores han realizado un gran esfuerzo para lograr reproducir el acoplamiento entre los procesos plásticos y de daño. Ju [2] propuso un modelo elastoplástico-degradable isotrópico basado en conceptos energéticos que es capaz de reproducir la respuesta elástica no lineal y el proceso plástico general. El modelo puede reproducir degradación tanto en las respuestas elásticas como plásticas. Este enfoque fue luego extendido para desarrollar un modelo anisótropo de cuarto orden para materiales frágiles. Voyiadjis [3] presentó un modelo acoplado de mecánica de daño continuo y plasticidad finita (con pequeñas deformaciones elásticas). Derivó una representación matricial explícita para el tensor de daño para un estado general de daño y deformación. Edlun [5] presentó un modelo acoplado de daño y plasticidad para adhesivos de tipo goma. Se trata de un modelo fenomenológico derivado a partir de un marco matemático basado en consideraciones termodinámicas donde los procesos micromecánicos son tenidos en cuenta a través de un conjunto de variables internas.

El modelo que se presenta en este trabajo es termodinámicamente consistente y surge de una generalización de la teoría de plasticidad clásica y de la teoría de daño isotrópico. El acoplamiento entre el daño y las deformaciones permanentes se logra mediante la solución simultánea de ambos problemas [6]. De esta forma, se asegura una correcta disipación de energía.

BASES TERMODINAMICAS

El modelo constitutivo propuesto está basado en la hipótesis de *elasticidad desacoplada* [7]. De acuerdo a esta hipótesis, la energía libre total Ψ puede suponerse formada por dos partes independientes: una parte elástica Ψ^e y una parte plástica Ψ^p , correspondientes a los procesos elástico y plástico respectivamente:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e; \alpha; \beta) = \Psi^e(\varepsilon_{ij}^e; \beta) + \Psi^p(\alpha) \quad (1)$$

Donde ε_{ij}^e es el tensor de deformación elástica y α y β representan grupos de variables internas plásticas y no plásticas respectivamente.

Para pequeñas deformaciones y problemas térmicamente estables, la parte elástica de la energía libre puede escribirse como una función cuadrática como sigue [8]:

$$\Psi^e(\varepsilon_{ij}^e; \beta) = \frac{1}{2m_0} [\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^e(\beta) \varepsilon_{kl}^e] \quad (2)$$

donde m_0 es la densidad del material y $C_{ijkl}^e(\beta)$ el tensor constitutivo secante afectado por la evolución de las variables internas no plásticas que puede ser escrito como [8]:

$$C_{ijkl}^e(\beta) = f(\beta) C_{ijkl}^0 \quad (3)$$

Donde C_{ijkl}^0 es el tensor constitutivo secante inicial del material virgen y $f(\beta)$ una función de transformación tensorial de un espacio no dañado equivalente al espacio dañado real. La forma más simple para esta función de transformación es aquella coincidente con la teoría de daño isotrópico de Kachanov [4].

$$f(\beta) = (1-d) \quad (4)$$

Donde $\beta=d$ es la variable de daño interno tal que:

$$\begin{cases} d = 0 \text{ para el material virgen} \\ d = 1 \text{ para el material completamente dañado} \end{cases}$$

Para este caso particular, la parte elástica de la energía libre puede ser escrita como:

$$\Psi^e = (1-d) \Psi^0 = (1-d) \frac{1}{2m_0} [\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e] \quad (5)$$

donde Ψ^0 representa la energía libre elástica del material virgen.

La disipación mecánica puede escribirse como:

$$\dot{\Xi}_m = \overbrace{\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - m_0 \frac{\partial \Psi^p}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i}^{\Xi_m^p: \text{Disipación plástica}} - \overbrace{m_0 \frac{\partial \Psi^p}{\partial d} \dot{d}}^{\Xi_m^d: \text{Disipación por daño}} \geq 0 \quad (6)$$

La relación constitutiva secante resulta:

$$\sigma_{ij} = m_0 \frac{\partial \Psi^p}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (7)$$

PROCESO PLASTICO

El proceso plástico se describe a través de una generalización de la teoría de plasticidad clásica que tiene en cuenta algunos aspectos fundamentales del comportamiento de los geomateriales.

El umbral de comportamiento elástico se define mediante una función de fluencia:

$$F(\sigma_{ij}; \alpha_k) = f(\sigma_{ij}) - K = 0 \quad (8)$$

donde $f(\sigma_{ij})$ es la tensión equivalente definida en el espacio de tensiones dañadas, K es el umbral de fluencia

equivalente y α_k un conjunto de variables internas plásticas definido, por ejemplo, como $\alpha_k = \{\kappa^p; \varphi; K\}$,

donde κ^p es la variable de daño plástico [1] y φ el ángulo de fricción interna.

La evolución de las deformaciones plásticas $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ y de las variables internas plásticas se define a través de las siguientes reglas de flujo:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G(\sigma_{mn}; \alpha_k)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9)$$

$$\dot{\alpha}_k = \lambda H_k(\sigma_{ij}; \alpha_m) = \lambda (h_k)_{ij} \frac{\partial G(\sigma_{mn}; \alpha_l)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10)$$

donde λ es el parámetro de consistencia plástica, G la función de potencial y $(h_k)_{ij}$ un tensor a definir para cada una de las variables internas [1].

La variable de daño plástico κ^p se obtiene normalizando la energía disipada plásticamente a la unidad [6] y varía desde 0, para el material virgen, hasta 1 cuando se disipa la máxima energía plásticamente.

$$\dot{\kappa}^d = \left[\frac{r}{g_f^p} + \frac{(1-r)}{g_c^p} \right] \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (11)$$

$$\text{donde: } r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}, \quad \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{2} [\sigma_i + |\sigma_i|], \quad g_f^p = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{op}}{f} g_f^p, \quad g_c^p = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f} g_c^p, \quad (12)$$

σ_i son las tensiones principales, R^{op} es la relación entre el umbral de fluencia en compresión uniaxial y el correspondiente a tracción uniaxial, g_f^p y g_c^p son las máximas densidades de energía disipadas plásticamente en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente. En el caso de un proceso mecánico sin degradación de rigidez, pueden evaluarse como sigue:

$$g_f^p = G_f/l_c, \quad g_c^p = G_c/l_c \quad (13)$$

donde G_f y G_c son las energías de fractura y aplastamiento respectivamente y l_c es un parámetro externo que depende de la longitud característica de la malla de elementos finitos y que se introduce para lograr objetividad de la respuesta respecto del tamaño de la malla [9].

Se propone la siguiente ecuación de evolución para el umbral de fluencia equivalente [6]:

$$\dot{\kappa}^p = \left[r \frac{\partial \sigma_t(\kappa^p)}{\partial \kappa^p} + (1-r) \frac{\partial \sigma_c(\kappa^p)}{\partial \kappa^p} \right] \dot{\kappa}^p \quad (14)$$

donde $\sigma_t(\kappa^p)$ y $\sigma_c(\kappa^p)$ representan la evolución de los umbrales de fluencia en tracción y compresión uniaxial respectivamente.

Las condiciones de carga/descarga se derivan de las relaciones de Kuhn-Tucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales:

$$\begin{cases} a) \lambda = 0 \\ b) F \leq 0 \\ c) \lambda F = 0 \end{cases} \quad (15)$$

PROCESO DE DAÑO

El umbral de comportamiento no dañado se describe mediante la siguiente función de daño [6]:

$$\hat{G}^D = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}) - f_c = 0 \quad (16)$$

donde $\bar{\sigma}(\sigma_{ij})$ es la tensión equivalente definida en el espacio dañado y f_c el umbral de daño equivalente.

La tensión equivalente $\bar{\sigma}(\sigma_{ij})$ puede evaluarse usando cualquiera de las funciones de fluencia conocidas (Tresca, Von-Mises, Mohr-Coulomb o Drucker-Prager) o cualquier otra función especialmente desarrollada para daño.

Se propone la siguiente ecuación de evolución para el umbral de daño equivalente:

$$\dot{f}_c = \left[r \frac{\partial \sigma_t(\kappa^d)}{\partial \kappa^d} + (1-r) \frac{\partial \sigma_c(\kappa^d)}{\partial \kappa^d} \right] \dot{\kappa}^d \quad (17)$$

donde $\sigma_t(\kappa^d)$ y $\sigma_c(\kappa^d)$ representan la evolución de los umbrales de daño en ensayos de tracción y compresión uniaxial respectivamente y κ^d es la variable de degradación de rigidez que varía desde 0, para el material virgen hasta 1, para el material completamente dañado y se obtiene normalizando a la unidad la energía disipada por daño [6]:

$$\kappa^d = \left[\frac{r}{g_f^d} + \frac{(1-r)}{g_c^d} \right] m_o \Psi^o \dot{d} \quad (18)$$

donde :

$$g_f^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{od}}{\bar{\sigma}} g_f^d \quad g_c^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{\bar{\sigma}} g_c^d, \quad (19)$$

R^{od} es la relación entre el umbral de daño en compresión uniaxial y el correspondiente a tracción uniaxial y g_f^d y g_c^d son las máximas densidades de energía disipadas por daño en tracción y compresión uniaxial respectivamente.

Las condiciones de carga/descarga se derivan de las relaciones de Khun-Tucker y resultan análogas a las correspondientes al proceso plástico:

$$\begin{cases} a) \dot{d} = 0 \\ b) \hat{G}^D \leq 0 \\ c) \dot{d} \hat{G}^D = 0 \end{cases} \quad (20)$$

RESPUESTA PLASTICA-DAÑADA ACOPLADA

La evolución de las deformaciones permanentes y del daño se obtiene de la solución simultánea de las denominadas *condiciones de consistencia* del problema [6] que constituyen dos ecuaciones lineales en $\dot{\lambda}$ y \dot{d} :

$$\begin{cases} \dot{F} = 0 \\ \dot{\hat{G}}^D = 0 \end{cases} \quad (21)$$

La relación constitutiva secante resulta:

$$\sigma_{ij} = m_o \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^p = (1-d) C_{ijkl}^o (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) = (1-d) \sigma_{ij}^o \quad (22)$$

donde σ_{ij}^o es el tensor de tensiones de un sólido ficticio no dañado. La ecuación (22) puede interpretarse como una

transformación entre un espacio real dañado y un espacio ficticio no dañado.

La ley constitutiva tangente se obtiene a partir de las ecuaciones (21) y (22) y resulta:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl} \quad (23)$$

donde:

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijrs}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnkl}^s}{\frac{\partial F}{\partial \alpha_p} (h_p)_{lu} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{lu}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr3}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \quad y \quad (24)$$

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl}^s - \frac{\sigma_{ij}^p \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tu}} \left(-\frac{\partial F}{\partial \alpha_p} (h_p)_{mn} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr3}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) - \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr3}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{tu}} \right] C_{tuhk}^s}{\left(-\frac{\partial F}{\partial \alpha_p} (h_p)_{mn} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr3}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \left(\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tu}} \sigma_{tu}^p \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr3}^s \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{tu}} \sigma_{tu}^p} \quad (25)$$

ALGORITMO PARA LA IMPLEMENTACION NUMERICA DEL MODELO PLASTICO-DAÑADO

La capacidad de un modelo constitutivo para predecir la respuesta de un sólido depende, no sólo del modelo mismo, sino también de la integración numérica del modelo. La precisión con que se integran las ecuaciones constitutivas tiene un impacto directo en la exactitud de los resultados [10] [11].

En el modelo propuesto las ecuaciones plásticas y de daño deben ser integradas simultáneamente. En lo que sigue se presenta un algoritmo de tipo Euler-Backward [6][12][13] desarrollado con ese propósito. La solución de problemas de tensión plana con este tipo de método es directa. Entre dos configuraciones de equilibrio $n-1$ y n las variables del problema se actualizan como sigue:

$$(\varepsilon_{ij}^p)_n = (\varepsilon_{ij}^p)_{n-1} + \Delta \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_n, \quad (\alpha_i)_n = (\alpha_i)_{n-1} + \Delta \lambda (H_i)_n \quad (26)$$

$$d_n = d_{n-1} + \Delta d_n, \quad (\sigma_{ij})_n = (1 - d_n) C_{ijkl}^e [(\varepsilon_{kl})_n - (\varepsilon_{kl}^p)_n] \quad (27)$$

Reemplazando estas ecuaciones en las ecuaciones (8) y (16), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} H^P(\Delta \lambda_n, \Delta d_n) = F((\sigma_{ij})_n; (\alpha_k)_n) = 0 \\ H^d(\Delta \lambda_n, \Delta d_n) = \hat{G}^D((\sigma_{ij})_n; (\kappa^d)_n) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Este sistema puede resolverse, por ejemplo, mediante el método de Newton Raphson method. El algoritmo se esquematiza en la Tabla I.

TABLA I. Algoritmo para la Integración Numérica de las Ecuaciones Constitutivas

- 1) Inicialización: $k=0$; $\Delta \lambda_n^0 = 0$; $\Delta d_n^0 = 0$
- 2) Actualización de la deformación plástica: $(\varepsilon_{ij})_n^k = (\varepsilon_{ij})_{n-1} + \Delta \lambda_n^k \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_n^{k-1}$
- 3) Actualización de la variable de daño: $d_n^k = d_{n-1} + \Delta d_n^k$
- 4) Actualización de la tensión no dañada: $(\sigma_{ij}^p)_n^k = C_{ijkl} [(\varepsilon_{kl})_n - (\varepsilon_{kl}^d)_n^k]$
- 5) Actualización de la tensión dañada: $(\sigma_{ij})_n^k = (1 - d_n^k)(\sigma_{ij}^p)_n^k$
- 6) Actualización del resto de las variables internas: $(\alpha_i)_n^k = (\alpha_i)_{n-1} + \Delta \lambda_n^k (H_i)_n^k$
 $(\Delta \kappa^d)_n^k = H_{\kappa^d} (\Psi^p)_n^k \Delta d_n^k$; $(\kappa^d)_n^k = (\kappa^d)_{n-1} + (\Delta \kappa^d)_n^k$
- 7) Condiciones de fluencia y daño: Si $(H^p)_n^k \leq 0$ y $(H^d)_n^k \leq 0$ vaya a (13)
- 8) Si $(H^p)_n^k \geq 0$ vaya a (10)
- 9) $(\partial H^p / \partial \Delta d)_n^k = 0$ vaya a (12)
- 10) Si $(H^d)_n^k \geq 0$ vaya a (12)
- 11) $(\partial H^d / \partial \Delta \lambda)_n^k = 0$
- 12) $\Delta \lambda_n^{k+1} = \Delta \lambda_n^k - \frac{\langle H^p(\Delta \lambda_n^k, \Delta d_n^k) \rangle (\partial H^d / \partial \Delta d)_n^k - \langle H^d(\Delta \lambda_n^k, \Delta d_n^k) \rangle (\partial H^p / \partial \Delta d)_n^k}{(\partial H^p / \partial \Delta \lambda)_n^k (\partial H^d / \partial \Delta d)_n^k - (\partial H^d / \partial \Delta \lambda)_n^k (\partial H^p / \partial \Delta d)_n^k}$
 $\Delta d_n^{k+1} = \Delta d_n^k - \frac{\langle H^d(\Delta \lambda_n^k, \Delta d_n^k) \rangle (\partial H^p / \partial \Delta \lambda)_n^k - \langle H^p(\Delta \lambda_n^k, \Delta d_n^k) \rangle (\partial H^d / \partial \Delta \lambda)_n^k}{(\partial H^p / \partial \Delta \lambda)_n^k (\partial H^d / \partial \Delta d)_n^k - (\partial H^d / \partial \Delta \lambda)_n^k (\partial H^p / \partial \Delta d)_n^k}$
 $k = k + 1$, vaya a (2)
- 13) $d_n = d_n^k$; $(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_n^k$; $(\kappa^d)_n = (\kappa^d)_n^k$; $(f_c)_n = (f_c)_n^k$; $(\varepsilon_{ij}^p)_n = (\varepsilon_{ij}^p)_n^k$; $(\alpha_i)_n = (\alpha_i)_n^k$
- 14) FIN

Algunas publicaciones recientes [13],[14] señalan la ventaja de utilizar una matriz de rigidez consistente cuando se resuelve problemas elastoplásticos. Ha sido probado que la tasa de convergencia cuadrática de una solución incremental basada en el método de Newton Raphson sólo puede asegurarse si el módulo tangente se deriva de una manera consistente con el algoritmo de integración.

En lo que sigue se deriva el módulo tangente consistente correspondiente al modelo de plástico-dañado y el algoritmo de integración propuesto.

Diferenciando la ecuación (27b) y teniendo en cuenta las ecuaciones (26a) y (27a), resulta:

$$(d\sigma_{ij})_n = -d(d_n)C_{ijkl}^o \left[(\varepsilon_{kl})_n - (\varepsilon_{kl}^p)_{n-1} - \Delta\lambda_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right)_n \right] + (C_{ijkl}^s)_n (d\varepsilon_{kl})_n - d\lambda_n (C_{ijkl}^s)_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right)_n + \Delta\lambda_n (C_{ijkl}^s)_n \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{pq}} \right)_n (d\sigma_{pq})_n \quad (29)$$

$$(d\sigma_{ij})_n = (C_{ijkl}^{e*})_n (d\varepsilon_{kl})_n - (C_{ijkl}^{s*})_n d\lambda_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right)_n \quad (30)$$

donde:

$$(C_{ijkl}^{e*}) = \left[\delta_{ip} \delta_{jq} + \Delta \lambda_n (C_{ijrs}^s)_n \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{rs} \partial \sigma_{pq}} \right)_n \right]^{-1} C_{pqkl}^e \quad (31)$$

$$(C_{ijkl}^{s*}) = \left[\delta_{ip} \delta_{jq} + \Delta \lambda_n (C_{ijrs}^s)_n \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{rs} \partial \sigma_{pq}} \right)_n \right]^{-1} C_{pqkl}^s \quad (32)$$

El módulo tangente consistente resulta:

$$(\hat{C}_{ijkl})_n = (C_{ijkl}^{e*})_n - \frac{(C_{ijpq}^{s*})_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \right)_n \left(\frac{\partial r}{\partial \sigma_{rs}} \right)_n (C_{rskl}^{e*})_n}{\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha_p} \right)_n [(h_p)_{nw}]_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{nw}} \right)_n + \left(\frac{\partial r}{\partial \sigma_{rs}} \right)_n (C_{rspq}^{s*})_n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \right)_n} \quad (33)$$

EJEMPLOS DE APLICACION

Hormigón bajo Compresión Biaxial

En este ejemplo se estudia el comportamiento del hormigón bajo compresión biaxial [15]. El hormigón fue modelado como un material elastoplástico-dañado con las propiedades mecánicas que se han resumido en la Tabla II. La malla de elementos finitos y las condiciones de carga han sido representadas en la Figura 1. El problema fue resuelto mediante un programa de elementos finitos 2D y el algoritmo previamente descritos. Se utilizó un módulo tangente consistente siendo necesarias solo dos iteraciones para cada escalón de carga.

Las curvas tensión-deformación correspondientes al plano de carga y a la dirección normal al plano han sido representadas en la Figura 1. Puede verse un buen ajuste entre los resultados numéricos y experimentales.

Hormigón bajo Compresión Uniaxial Cíclica

Este ejemplo fue usado para probar la habilidad del modelo y del algoritmo propuesto para reproducir el comportamiento cíclico de un material elasto-plástico-dañado como el hormigón. Se estudió el comportamiento del hormigón bajo compresión uniaxial cíclica [18]. En la Fig.2 se representan la malla de elementos finitos y las condiciones de carga. El hormigón fue modelado como un material elasto-plástico-dañado con las características mecánicas que se han resumido en la Tabla III.

En la Figura 2 se han representado las curvas tensión-deformación numéricas y experimentales. Puede verse que el

modelo reproduce ajustadamente el comportamiento de hormigón. Las ramas de descarga tiene prácticamente el mismo módulo promedio. Obviamente, el modelo es incapaz de reproducir los lazos de histéresis que aparecen en los resultados experimentales ya que se supuso que la descarga era elástica.

TABLA II. Propiedades Mecánicas del Hormigón

$E = 30000 \text{ MPa}$
$\nu = 0.24$
$\sigma_{oc} = 22.9 \text{ MPa}$
$\sigma_{pico} = 32.8 \text{ MPa}$
$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{ot}} = 10$
$\kappa_{pico}^p = 0.38$
$G_f^p = 0.08 \text{ N/mm}$
$G_c^p = 8.0 \text{ N/mm}$
Crit. de Fluencia: Lubliner-Oller [1] ($\alpha=0.12$; $\gamma=3.0$; $p=0.0$)
Func. Potencial: Mohr-Coulomb: $\psi = 15^\circ$
$G_f^d = 0.08 \text{ N/mm}$
$G_c^d = 8.0 \text{ N/mm}$
Crit. de Daño: Lubliner-Oller [1] ($\alpha=0.12$; $\gamma=3.0$; $p=0.0$)

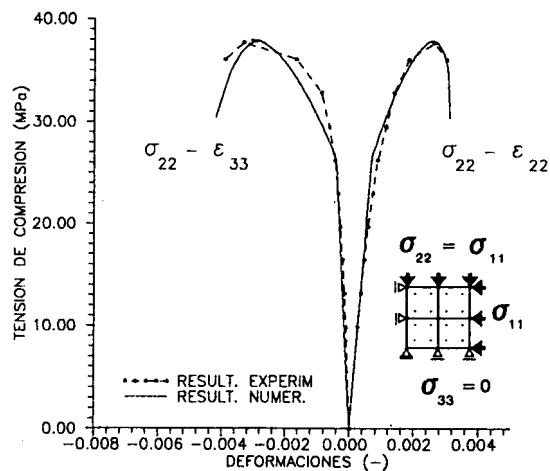


Figura 1. Hormigón bajo Compresión Biaxial

TABLA III. Propiedades Mecánicas del Hormigón

$E = 19324.4 \text{ MPa}$
$\nu = 0.24$
$\sigma_{oc} = 22.0 \text{ MPa}$
$\sigma_{pico} = 26.5 \text{ MPa}$
$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{ot}} = 10$
$\kappa_{pico}^p = 0.12$
$G_f^p = 0.08 \text{ N/mm}$
$G_c^p = 30.0 \text{ N/mm}$
Crit. de Fluencia: Lubliner-Oller [1] ($\alpha=0.12$; $\gamma=3.0$; $p=0.0$)
Flujo asociado
$\kappa_{pico}^d = 0.12$
$G_f^d = 0.08 \text{ N/mm}$
$G_c^d = 10.0 \text{ N/mm}$
Crit. de Daño: Lubliner-Oller [1] ($\alpha=0.12$; $\gamma=3.0$; $p=0.0$)

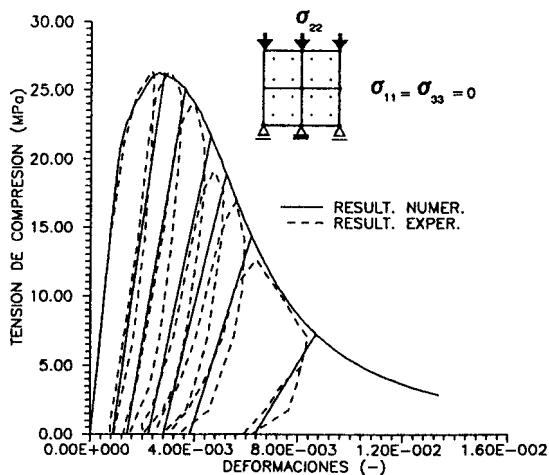


Figura 2. Hormigón bajo Compresión Uniaxial Cíclica

CONCLUSIONES

El modelo constitutivo presentado resuelve simultáneamente los problemas de evolución de deformaciones permanentes y degradación de rigidez. En cada escalón de carga se satisfacen simultáneamente las condiciones de consistencia plástica y de daño. De esta manera, utilizando variables de endurecimiento relacionadas con la energía disipada en ambos procesos, se puede lograr que la energía total disipada sea la correcta.

El modelo es simple y presenta una analogía total con otros modelos elasto-plásticos utilizados para reproducir el comportamiento de materiales friccionales.

El algoritmo presentado para la implementación numérica del modelo es una generalización de los algoritmos de tipo Euler Backward, comunmente utilizados en plasticidad, al caso de plasticidad acoplada con daño. Es particularmente apropiado para la solución de problemas de tensiones planas. El módulo tangente consistente desarrollado preserva la tasa de convergencia cuadrática del método de Newton Raphson.

REFERENCIAS

1. Oller, S., "Un Modelo de Daño Continuo para Materiales Friccionales", Ph.D. Thesis, Universitat Politecnica de Catalunya, Escola Tecnica Superior D'Enginyers De Camins, Canals I Ports , Spain , 1988.
2. Ju, J.W., "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects", Int. Journal Solids Structures Vol.25, No.7, 1989, págs. 803-833.
3. Voyiadjis, G. Z. and Kattan, P. I., "A Plasticity-Damage Theory for Large Deformation of Solids-I. Theoretical Formulation", Int. Journal Engng Sci. Vol.30, No.9, 1992, págs. 1089-1108.
4. Kachanov, L.M., "Time of the rupture process under creep conditions". IVZ Akad Nauk - S.S.R. - Otd Tech Nauk 8, 1958.
5. Edlund, U. and Klarbring, A., "A Coupled Elastic-Plastic Damage Model for Rubber-Modified Epoxy Adhesives", Int. J. Solids Structures Vol.30, No.19, 1993, págs. 2693-2708.
6. Luccioni, B.M., "Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos", Ph.D. Thesis-Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, 1993.
7. Lubliner, J., "On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Mechanics", Int. Journal Non Linear Mechanics, Vol.7, 1972, págs.237-254.
8. Oller, S., Oliver, J., Cervera, M. and Oñate, J., "Simulación de Procesos de Localización en Mecánica de Sólidos, mediante un Modelo Plástico", Memorias del I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, SEMNI 1990 1990, págs. 423-431.
9. Oliver, J. , "A Consistent Characteristic Length for Smeared Cracking Models", Applied Numerical Methods, 1988.
10. Ortiz, M. and Popov, E.P., "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vo.21, 1985, pages. 1561-1576.
11. Ortiz, M. and Simo, J.C., "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elasto-Plastic Constitutive Relations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.83, 1986, pages.353-366.
12. Simo, J.C. and Hughes, T. J. R., "Elastoplasticity and Viscoplasticity. Computational Aspects", 1988.
13. Crisfield, M.A., "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", John Wiley & Sons Ltd., England, 1991.
14. Simo, J.C. and Taylor, R.L., "Consistent Tangent Operators for Rate Independent Elastoplasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering", 48, 1985, pages. 101-118.
15. Kupfer, H., Hidsford, H. and Rusch H., "Behaviour of Concrete under Biaxial Stresscs", Journal of the ACI, Vol.66, No.8, 1969, pages. 656-666.
16. Sinha, B.P., Gerstle, K.H. and Tulin, L.G., "Stress-Strain Relations for Concrete under Cyclic Loading". Journal of the ACI, Vol.62, No.2, 1964, pages. 195-210.