

MODELIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE LAS ECUACIONES DE NAVIER - STOKES PARA FLUJO INCOMPRESIBLE MEDIANTE TÉCNICAS GLS

M. A. Cruchaga y E. Oñate

*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports
Universitat Politècnica de Catalunya
Gran Capità s/n, Mòdul C1, 08034 Barcelona, España*

RESUMEN

En este trabajo se propone resolver numéricamente las ecuaciones completas de Navier-Stokes para flujo incompresible haciendo uso de las técnicas conocidas en la literatura sobre el tema como 'Galerkin Least Squares (GLS)'. Esta metodología, inicialmente desarrollada por Hughes *et al.*^[1,2] y Franca *et al.*^[3], permite el uso de igual orden de interpolación para las variables del problema: velocidad y presión. Por la forma adoptada en la formulación para la función de peso^[4], no es necesario utilizar técnicas de penalización para ajustar la condición de incompresibilidad. Estos métodos se presentaron inicialmente para el problema de Stokes^[1,4] y, posteriormente, fueron extendidos por varios autores^[4,5,6,7] al problema completo de Navier-Stokes. Esto es aún hoy campo de discusiones y trabajo.

Se formulan en este trabajo las ecuaciones discretizadas en el espacio según las técnicas convencionales propias del Método de Elementos Finitos mientras que la integración temporal se realiza mediante un típico esquema de Euler. La resolución del sistema algebraico se obtiene por medio de un esquema incremental-iterativo y el criterio de convergencia se escribe en términos del vector residuo.

La formulación implementada se probó en problemas bidimensionales clásicos obteniendo resultados satisfactorios. En las pruebas se utilizaron elementos rectangulares de cuatro nodos y triangulares de tres.

1. INTRODUCCIÓN

En la resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible se presentan serias dificultades. Cuando el termino convectivo adquiere importancia, aparecen oscilaciones en los resultados. En este caso la conocida técnica de SUPG^[8] puede utilizarse para mejorarlos. También se observan inconvenientes para obtener convergencia con números de Reynolds elevados.

Por otro lado, hay requerimientos matemáticos relacionados con condiciones de existencia y unicidad de la solución de dichas ecuaciones que imponen restricciones en la elección de las funciones de aproximación para el problema discreto^[10]. Sin embargo, formulaciones desarrolladas más recientemente evitan estas restricciones^[1,2,3] permitiendo el uso de funciones interpolación de igual orden para las variables del problema: velocidad y presión. Estas metodologías inicialmente implementadas para las ecuaciones de Stokes^[1], fueron más recientemente extendidas al problema completo de Navier-Stokes^[4,5,6,7].

Dentro de este contexto, el objetivo del presente trabajo es desarrollar una formulación del tipo GLS para las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes escrita en forma incremental.

En la Sección 2 se describen las ecuaciones que gobiernan al problema y las condiciones de borde e iniciales adoptadas. La forma débil para dichas ecuaciones, la discretización espacial utilizando elementos finitos y la temporal por medio de diferencias finitas (regla trapezoidal) son descritas en la Sección 3. En la Sección 4 se hace una breve descripción de la estrategia numérica utilizada y, finalmente, en la Sección 5 se presentan ejemplos numéricos para comprobar la solidez del método.

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible escritas en forma local son:

$$\rho \dot{\mathbf{u}} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) = \rho \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad \text{eq. (1)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad \text{eq. (2)}$$

donde: Ω es un dominio arbitrario con contorno Γ , \mathbf{u} es el vector velocidad, p es la presión, μ es la viscosidad dinámica, ρ es la densidad, \mathbf{b} son las fuerzas específicas de masa, y $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ indica el tensor tasa de deformación, es decir, $\epsilon_{ij} = 1/2(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$

El problema formal consiste en hallar \mathbf{u} y p que satisfagan al sistema formado por (1) y (2) juntamente con las condiciones de borde e iniciales dadas por:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_u \times [0, T] \quad \text{eq. (3)}$$

$$p = \bar{p}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_p \times [0, T] \quad \text{eq. (4)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Gamma_{\sigma_n} \times [0, T] \quad \text{eq. (5)}$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \quad \text{en } \Omega \quad \text{eq. (6)}$$

siendo Γ_u , Γ_p y Γ_{σ_n} partes de Γ (ver Figura 1) donde la velocidad, la presión y la parte desviadora del tensor de tensiones ($2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$) son prescritos, respectivamente. Estas partes del contorno satisfacen las siguientes relaciones: $\Gamma_u \cup \Gamma_{\sigma_n} = \Gamma$, $\Gamma_u \cap \Gamma_{\sigma_n} = \emptyset$, $\Gamma_p \cup \Gamma_p^c = \Gamma$, $\Gamma_p \cap \Gamma_p^c = \emptyset$.

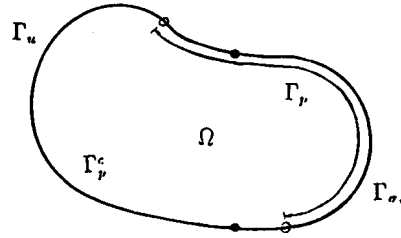


Figura 1: Dominio arbitrario de análisis y sus fronteras.

3. FORMULACION EN ELEMENTOS FINITOS

En el marco del Método de Elementos Finitos^[11](MEF), los campos continuos de velocidades y presiones son aproximados por polinomios de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \Phi \hat{\mathbf{u}} \\ p_h &= \Psi \hat{p} \end{aligned} \quad \text{eq. (7)}$$

donde: \mathbf{u}_h es la aproximación de \mathbf{u} , p_h es la aproximación de p , $\hat{\mathbf{u}}$ es el vector de velocidades nodales y \hat{p} es el vector de presiones nodales, siendo Φ y Ψ las típicas funciones de forma^[11] usadas en el MEF. En la presente formulación, debido a que velocidades y presiones son interpoladas con polinomios de igual orden, resulta $\Phi = \Psi$. Sin embargo, se mantiene la notación diferente para mayor claridad en la descripción siguiente.

Como es común en el MEF, se discretiza el dominio espacial que se quiere modelar utilizando una colección de n_{el} elementos disjuntos cuya unión es el dominio original. De esta forma, el problema continuo puede ser reemplazado por otro discreto^[1,2,8,11] que se expresa como: hallar \mathbf{u}_h y p_h que verifiquen la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} &\langle \Phi; \rho \dot{\mathbf{u}}_h \rangle_{\Omega} + \langle \Phi; \rho (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \rangle_{\Omega} - \langle \nabla \Phi; p_h \rangle_{\Omega} + \langle \epsilon(\Phi); 2\mu \epsilon(\mathbf{u}_h) \rangle_{\Omega} - \langle \Phi; \rho \mathbf{b} \rangle_{\Omega} + \\ &+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \langle \Phi_{r,e}; \rho \dot{\mathbf{u}}_h + \rho (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \nabla \cdot (2\mu \epsilon(\mathbf{u}_h)) - \rho \mathbf{b} \rangle_{\Omega_e} + \\ &+ \langle \Phi; p_h \rangle_{\Gamma_p^c} - \langle \Phi; 2\mu \epsilon(\mathbf{u}_h) \rangle_{\Gamma_u} + \langle \Phi; \bar{\sigma}_u \rangle_{\Gamma_{\sigma_u}} + \langle \Phi; \nabla \cdot \mathbf{u}_h \rangle_{\Omega} = 0 \end{aligned} \quad \text{eq. (8)}$$

en la cual las ecuaciones (1), (2) y las condiciones de borde han sido incluidas. La ecuación (8) es la forma débil del problema que permite resolver el problema diferencial original.

Además se define a la perturbación de la función de peso como:

$$\Phi_{r,e} = \tau_1^e (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \Phi + \tau_2^e \nabla \Psi - \tau_3^e \nabla^2 \Phi \quad \text{eq. (9)}$$

siendo \mathbf{u}^* una velocidad característica del flujo^[1,2]. La selección de los parámetros τ_i^e es motivo de discusiones y estudios^[4,5,6,9]. Estos parámetros son función del número de Reynolds elemental definido como $\Re \doteq (|\bar{\mathbf{u}}| h_e)/\nu$, donde $\bar{\mathbf{u}}$ es una velocidad característica del flujo, h_e es una longitud característica del elemento, $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática, y dependen del tipo de elemento a través de los coeficientes α^e . En este trabajo, se adopta para τ_1^e la conocida expresión utilizada en métodos SUPG^[8], mientras que para τ_2^e se emplea la definición dada por Hughes *et al.*^[1] en flujo de Stokes y se propone una extensión para \Re no nulos^[17] de manera de interpolar el valor para $\Re = 0$ y un coeficiente similar al utilizado en SUPG para $\Re > 0$. Estos parámetros quedan entonces definidos por:

$$\tau_1^e = \begin{cases} 0 & \text{if } \Re = 0, \\ \frac{\alpha_1^e h_e}{2|\mathbf{u}^*|} F(\Re) & \text{if } \Re > 0. \end{cases} \quad \text{eq. (10)}$$

$$\tau_2^e = \begin{cases} \frac{\alpha_2^e h_e^2}{2\mu} & \text{if } \Re = 0, \\ \frac{\alpha_2^e h_e^2}{2\mu} - \left(\frac{\alpha_2^e h_e^2}{2\mu} - \frac{\alpha_1^e h_e}{2|\mathbf{u}^*| \rho} \right) F(\Re) & \text{if } \Re > 0. \end{cases} \quad \text{eq. (11)}$$

donde $F(\Re)$ puede considerarse como la función óptima para la ponderación a contracorriente propuesta para casos unidimensionales^[11] o tomar una aproximación de la misma como $\min(\frac{\Re}{6}; 1)$ ^[2].

Puede notarse que no se hace intervenir al término en derivadas segundas de la función de forma de las velocidades presente en $\Phi_{,2}$, por considerarlo despreciable, en particular tratándose de elementos bilineales^[8].

Por último, la integración temporal de la ecuación (8) se hace utilizando un método implícito tradicional con $\theta = 1$ en el esquema conocido como 'Euler-backward'^[11] aplicado a la ecuación de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \theta {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}(\mathbf{u}) + (1-\theta) {}^t \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad \text{eq. (12)}$$

4. ESTRATEGIA NUMÉRICA DE SOLUCIÓN

Para la resolución numérica de la ecuación (8), se aplica una estrategia iterativa utilizando la conocida metodología de Newton-Raphson^[11]. Como resultado, se obtiene el siguiente sistema no lineal de ecuaciones algebraicas para el tiempo $t + \Delta t$ (conocida la solución para el tiempo t):

$$\begin{pmatrix} {}^{t+\Delta t}J_{UU}^{j-1} & {}^{t+\Delta t}J_{UP}^{j-1} \\ {}^{t+\Delta t}J_{PU}^{j-1} & {}^{t+\Delta t}J_{PP}^{j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U^j \\ \Delta P^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{t+\Delta t}R_U^{j-1} \\ {}^{t+\Delta t}R_P^{j-1} \end{pmatrix} \quad \text{eq. (13)}$$

donde: J_{UU} , J_{UP} , J_{PU} y J_{PP} son las matrices jacobianas tangentes, R es el vector residuo, ΔU y ΔP son los incrementos nodales de las variables, y j es la iteración que se resuelve. Las expresiones de dichas matrices y vectores se encuentran en [19]. Las incógnitas nodales son actualizadas como:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^j &= {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{j-1} + \Delta U^j \\ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^j &= {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{j-1} + \Delta P^j \end{aligned} \quad \text{eq. (14)}$$

con $j = 1, \dots, n_{iter}$ y lo valores iniciales son:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^0 &= {}^t\hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^0 &= {}^t\hat{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad \text{eq. (15)}$$

El valor de la velocidad característica \mathbf{u}^* que aparece en (9) se elige como ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{j-1}$.

La convergencia del sistema se verifica en normas de residuos de la siguiente forma:

$$\frac{\|R\|_{L_2}}{\|R^*\|_{L_2}} < \varepsilon_r \quad \text{eq. (16)}$$

donde ε_r es la tolerancia admisible, $R^* = R_{\Gamma_U \cup \Gamma_P}$, es decir, el residuo en lo grados de libertad prescritos o, en el caso de existir la fuerza específica de masa \mathbf{b} , puede tomarse $R^* = \langle \Phi; \rho \mathbf{b} \rangle_\Omega$.

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 Flujo confinado en una cavidad

Este problema conocido como 'driven cavity flow' es extensivamente analizado por diversos investigadores en el área de métodos numéricos [6,12] y se lo considera como prueba calificada para comprobar el buen comportamiento de los algoritmos. En este trabajo se analizarán los resultados para diferentes números de Reynolds comparándolos con otras contribuciones, tanto para la solución estacionaria como transitoria. Se presentarán estudios realizados con

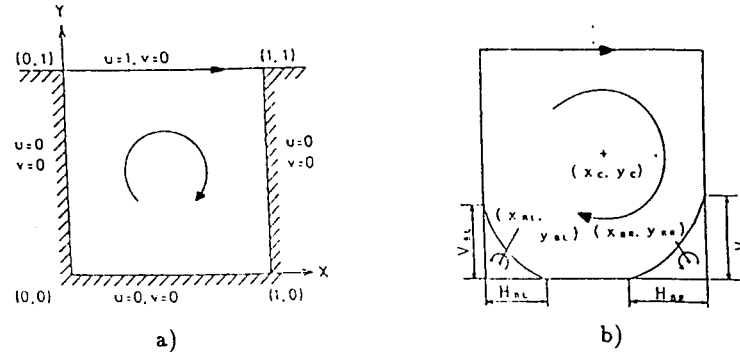


Figura 2: Flujo confinado en una cavidad: a) Geometría y condiciones de borde; b) Longitudes características de los vórtices.

diferentes tipos de mallas y los análisis transitorios se realizan para dos Δt distintos.

La geometría y las condiciones de borde utilizadas para este problema son las conocidas ^[6,12,19](ver Figura 2). El dominio cuadrado tiene lado h de longitud unitaria y la velocidad es impuesta igual a uno (U) en la dirección x en la superficie y es nula en los lados restantes. La presión se prescribe igual a cero en la mitad del lado inferior del dominio^[6]. El número de Reynolds global se expresa $Re = Uh/\nu$ y se obtienen diferentes valores del mismo modificando ν . La condición inicial es velocidad nula en todo el dominio para todos los casos presentados.

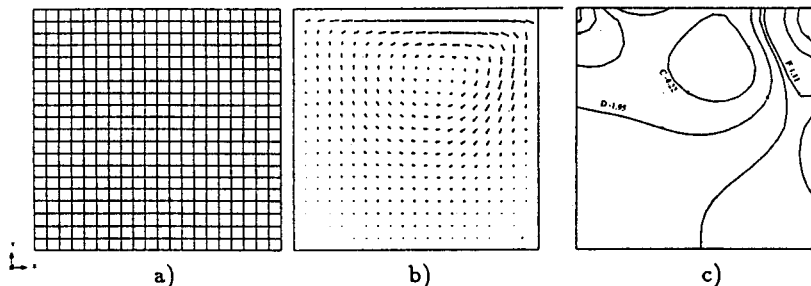


Figura 3: Flujo confinado en una cavidad - $Re = 100$ - a) malla de elementos finitos, b) campo de velocidades, c) isobaras.

1 El primer resultado es para $Re = 100$ obtenido con un cálculo estacionario. En la Figura 3, pueden verse la malla uniforme de elementos de cuatro nodos utilizada, el campo de velocidades y los contornos de presión en buen acuerdo cualitativo y cuantitativo con [6].

Para $Re = 400$ estacionario se utilizó la malla a) de la Figura 4 y para $Re = 1000$ también analizado en forma estacionaria se obtuvieron soluciones para las mallas a), b) y c) de la misma figura.

El perfil de velocidades horizontales a lo largo de la línea vertical media ($x = 0.5$) para los Re indicados se presentan en la Figura 5 junto a resultados de otros autores mostrando una muy buena concordancia. Además, en la

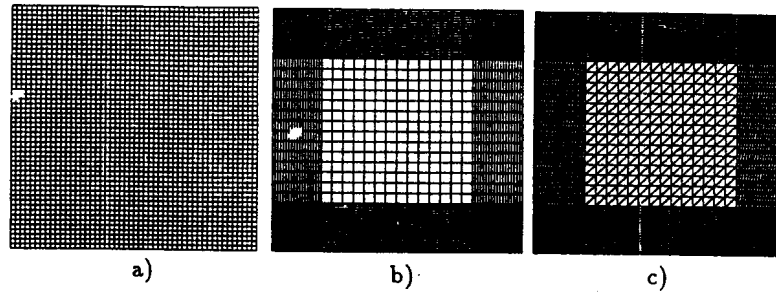


Figura 4: Diferentes mallas de elementos finitos utilizadas para $Re = 400$ y $Re = 1000$.

Figura 6 se grafica para $Re = 1000$ la componente vertical de la velocidad en la línea horizontal media ($y = 0.5$).

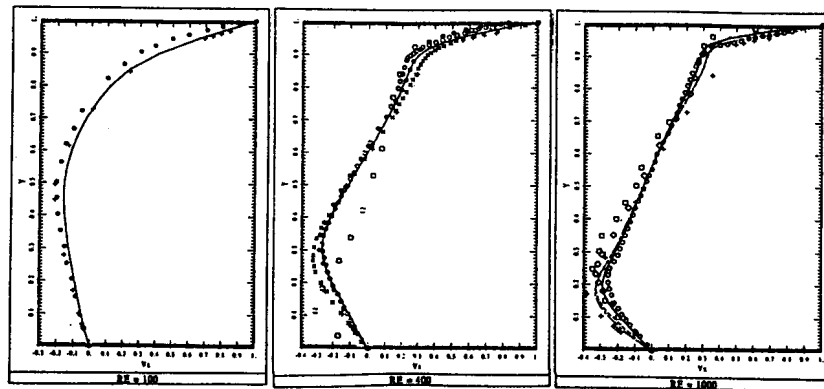


Figura 5: Flujo confinado en una cavidad - Velocidad horizontal a lo largo de la línea $x = 0.5$: • Burggraf^[13]; + Ghia *et al.*^[14]; o Bercovier & Engelman^[13]; x Tezduyar^[13]; Fortin & Thomasset^[13]; o Kondo *et al.*^[15]; ... Nallasamy^[13]. Este trabajo: — malla a); - - - malla b); - · - malla c).

Las presiones se grafican en la Figura 7 a lo largo de las líneas medias horizontal y vertical para $Re = 1000$. Los perfiles de presión no presentan oscilaciones en ninguno de los casos analizados.

Por otro lado se verificaron las coordenadas de los centros del vórtice principal y de los secundarios así como ciertas longitudes características indicadas esquemáticamente en la Figura 2. Los resultados se exponen en la Tabla 1 para $Re = 400$ y en Tabla 2 para $Re = 1000$.

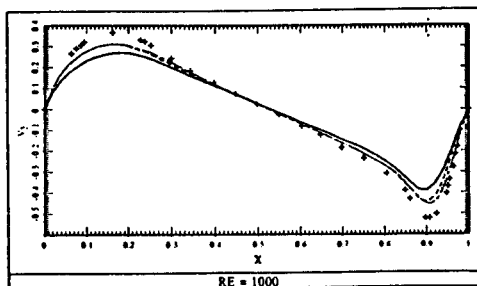


Figura 6: Componente y de la velocidad para $Re = 1000$ en la línea $y = 0.5$: + Ghia *et al.*^[14]. Este trabajo: — malla a); - - - malla b); - - - malla c).

TABLA 1. $Re = 400$ - Análisis estacionario.

	<i>Tanahashi et al.</i> ^[18]	<i>Ghia et al.</i> ^[14]	Este trabajo
x_c	0.5967	0.5547	0.5585
y_c	0.6211	0.6055	0.6014
x_{DR}	0.8926	0.8906	0.8836
y_{DR}	0.1137	0.1256	0.1196
H_{DR}	0.2540	0.2167	0.2473
V_{DR}	0.2528	0.3203	0.3249

TABLA 2. $Re = 1000$ - Análisis estacionario.

	<i>Tanahashi et al.</i> ^[18]	<i>Ghia et al.</i> ^[14]	Este trabajo
x_c	0.5335	0.5313	0.5418
y_c	0.5653	0.5625	0.5848
H_{DR}	0.3091	0.3034	0.3054
V_{DR}	0.3410	0.3536	0.3782
H_{BL}	0.2045	0.2188	0.2182
V_{BL}	0.1523	0.1680	0.1588

Se realizó un análisis transitorio para $Re = 400$. Se utilizaron dos pasos de tiempo diferentes, $\Delta t = 1$. y $\Delta t = 0.5$, el cálculo adoptado es implícito. Los resultados para ambos Δt son casi idénticos. En la Figura 8 se presenta la componente de la velocidad según x a lo largo de la línea vertical media para distintos tiempos de cálculo, igual descripción se adoptó en la Figura 9 para la componente según y de la velocidad a lo largo de la línea horizontal media. El régimen estacionario se obtiene alrededor del paso 30 y los resultados concuerdan con los obtenidos para el análisis estacionario.

Asimismo, una vez alcanzado el régimen estacionario de esta manera, se calcularon las coordenadas de los vórtices y sus longitudes. Los valores son coincidentes con los obtenidos en el análisis estacionario (ver Tabla 1).

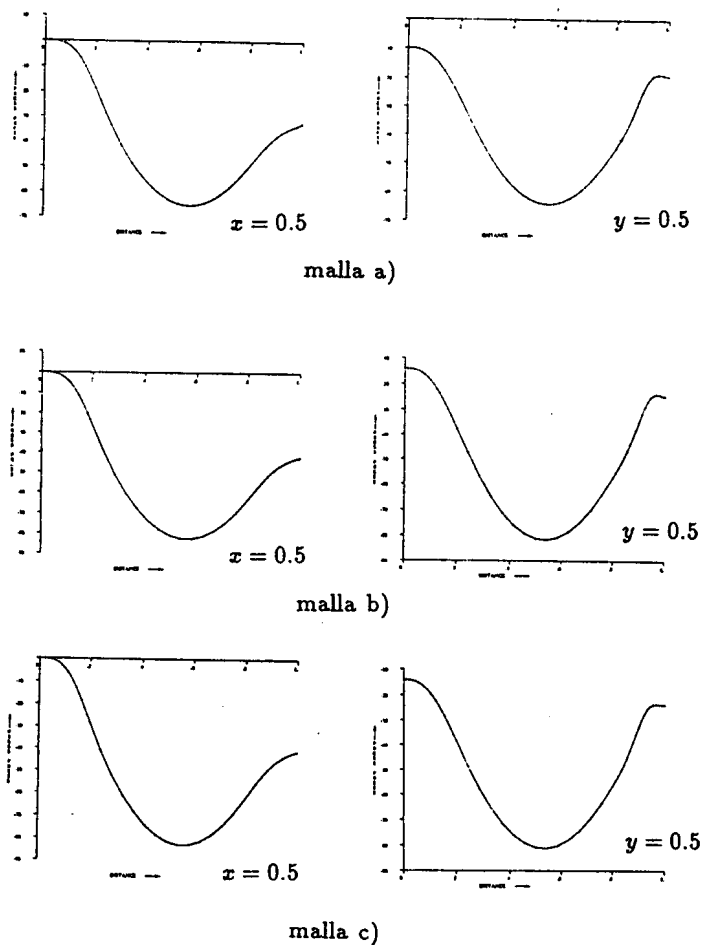


Figura 7: Gráfica de las presiones en las líneas $x = 0.5$ e $y = 0.5$ para $Re = 1000$ obtenidas con distintas mallas.

5.2 Flujo en un escalón en ensanchamiento

El principal objetivo de este ejemplo es comparar los resultados de la presente formulación con los resultados experimentales obtenidos por Armaly *et al.*^[16].

La geometría del problema se adopta tal cual la descrita para la experiencia (ver Figura 10) y el fluido es aire con propiedades $\rho = 1.2$ y $\mu = 0.000018$ en el Sistema de Unidades Internacionales. Se realiza un análisis estacionario donde se considera el efecto gravitatorio. El dominio se encuentra inicialmente con velocidades y presiones nulas, se prescribe velocidad nula en las paredes y a la entrada se fija la velocidad con una distribución parabólica con valor máximo V_{max} . La presión es impuesta nula en la esquina superior derecha. El número

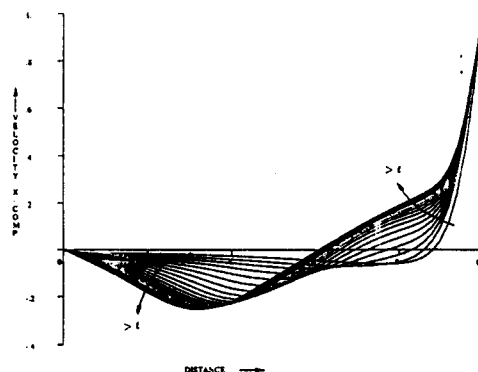


Figura 8: Flujo confinado en una cavidad a $Re = 400$, análisis transitorio - Componente x de la velocidad en la línea $x = 0.5$.

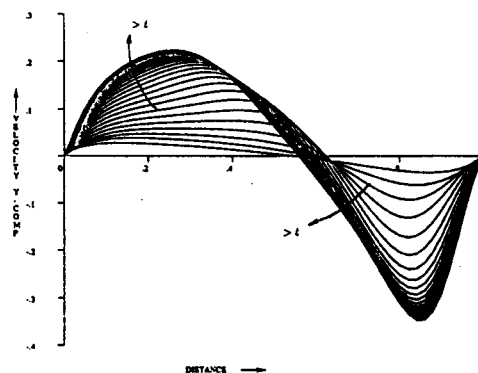


Figura 9: Flujo confinado en una cavidad a $Re = 400$, análisis transitorio - Componente y de la velocidad en la línea $y = 0.5$.

de Reynolds global se obtiene como $Re = 2V_{max}D/(3\nu)$, siendo $D = 2h$ el radio hidráulico, se varía V_{max} en los distintos ejemplos para obtener los diferentes Reynolds^[16].

Se discretizó el dominio con una malla uniforme de aproximadamente 9000 elementos de cuatro nodos.

El análisis se realizó para $Re = 100$, $Re = 500$ y $Re = 830$. En la Figura 11 se presentan el campo de velocidades y las funciones de corriente para los casos estudiados. En la Tabla 3 se comparan, para cada uno de los números de Reynolds indicados, los valores numéricos obtenidos en el presente trabajo y experimentales de Armaly *et al.* ^[16] de las longitudes características que indican principio y fin de los vórtices primario y secundario como puede verse en la Figura 10.

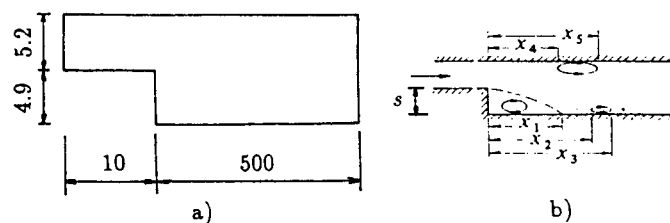


Figura 10: Flujo en un escalón en ensanchamiento: Geometría en mm. y longitudes características.

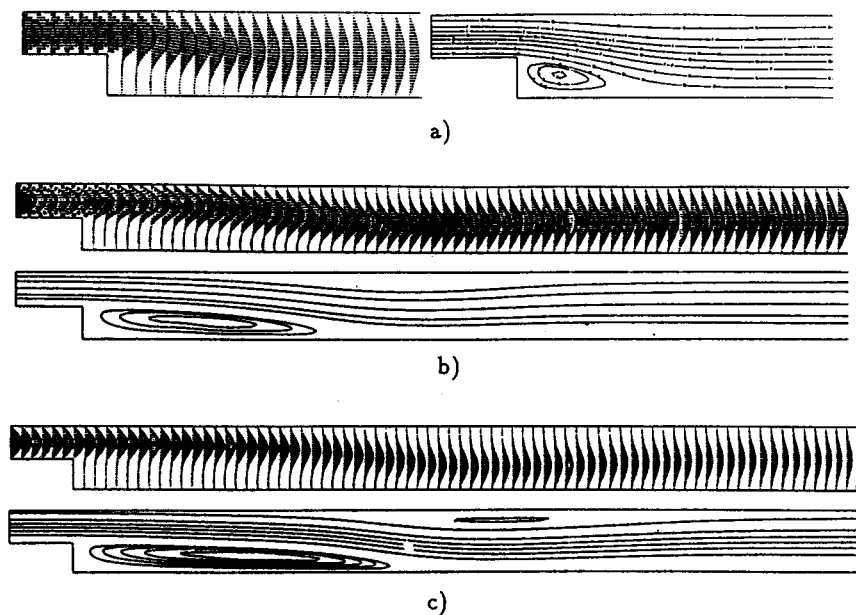


Figura 11: Campo de velocidades y líneas de corriente en un escalón en ensanchamiento para: a) $Re = 100$, b) $Re = 500$, c) $Re = 830$.

TABLA 3.

	Re	x_1/s	x_4/s	x_5/s
Este trabajo	100	3.0		
Armaly et al. ^[16]	100	3.0		
Este trabajo	500	8.5	7.82	11.9
Armaly et al. ^[16]	500	10.0	8.0	13.5
Este trabajo	830	11.0	9.52	19.0
Armaly et al. ^[16]	830	14.0	11.25	20.0

6. CONCLUSIONES

Una formulación del tipo GLS fue implementada para resolver la ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes en un esquema numérico incremental-iterativo. Los resultados expuestos en el apartado anterior son satisfactorios y muestran una buena concordancia con lo obtenidos por otros autores para números de Reynolds moderados. Esto parece indicar que los parámetros adoptados y la inclusión en la forma débil de las condiciones de contorno son apropiadas. Otros trabajos que se están realizando son diferentes estudios del comportamiento del fluido a números de Reynolds mayores y verificaciones numéricas en casos 3D.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte económico proporcionado por el contrato BRITE/EURAM n° BREU-0443.

REFERENCIAS

- [1]- Hughes J.R., Franca L.P. and Balestra M. - A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accomodating equal-order interpolations. -*Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 59, 85-99, 1986.
- [2]- Hughes J.R., Franca L.P. and Hulbert G.M. - A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. -*Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 73, 173-189, 1989.
- [3]- Franca L.P. and Stenberg R. - Error analysis of some Galerkin-Least-Squares methods for the elasticity equations. -*Report INRIA N° 1054, July 1989.*
- [4]- Franca L.P. and Hughes T.J.R. - Convergence analyses of Galerkin least-squares methods for symmetric advective- diffusive forms of the Stokes and incompressible Navier-Stokes equations. -*Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 105, 285-298, 1993.
- [5]- Tezduyar T.E., Behr M. and Liou J. - A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - The deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. -*Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 94, 339-351, 1992.
- [6]- De Sampaio P.A.B. - A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure. -*Int. J. Num. Met. Eng.*, Vol. 31, 1135-1149, 1991.
- [7]- Storti M., Nigro N. and Idelsohn S. - Stabilizing equal-order interpolations for mixed formulations of Navier-Stokes equations via SUPG method. -*Reporte interno, 1994.*

- [8]- Brooks A. N. and Hughes T. J. R. - Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32, 199-259 (1982).
- [9]- Franca L.P., Frey S.L. and Hughes T.J.R. - Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 95, 253-276, 1992.
- [10]- Brezzi F. and Bathe K.J. - A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations. - *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 82, 27-57 (1990).
- [11]- Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. - The Finite Element Method. - *McGraw-Hill Book Company. Fourth edition.*
- [12]- Tezduyar T. E., Liou J., Ganjoo D. K. and Behr M. - Solution techniques for the vorticity-streamfunction formulation of two-dimensional unsteady incompressible flows. - *Int. J. Num. Met. in Fluids*, Vol. 11, 515-539, 1990.
- [13]- Thomasset F. - Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. - *Springer-Verlag, 1981.*
- [14]- Ghia U., Ghia K.N Shin C.T. - High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and multigrid method. - *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, 387-411, 1982.
- [15]- Kondo N., Tosaka T. and Nishimura T. - High Reynolds solutions of the Navier-Stokes equations using the third-order upwind finite element method. - *Proc. Computational methods in Flow Analysis, 984-911, Okayama 1988.*
- [16]- Armaly B. F., Durst F., Pereira J. C. F. and Schönung B. - Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. - *J. Fluid Mech.*, Vol. 127, 473-496, 1983.
- [17]- Cruchaga M.A. and Oñate E. - A numerical solution strategy for the incompressible Navier-Stokes equations. - *Modeling and simulation - Proceedings of the 1994 European Simulation Multiconference, 699-703, 1984.*
- [18]- Tanahashi T., Okanaga H. and Saito T. - GSMAC Finite Element Method for unsteady incompressible Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers. - *Int. J. Num. Met. in Fluids*, Vol. 11, 479-499, 1990.
- [18]- Cruchaga M. - Una estrategia de resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible mediante técnicas GLS. - *CIMNE - Reporte interno.*