

ANÁLISIS TEÓRICO DE UN MODELO FLUVIAL CINEMÁTICO

Pablo M. Jacovkis

Instituto de Cálculo y Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina

Esteban G. Tabak

Department of Mathematics, Princeton University
Princeton, NJ 08544, Estados Unidos

RESUMEN

En este trabajo se analiza un modelo fluvial cinemático general dado en forma de ley no lineal de conservación, y se observan sus características según diversas geometrías de la sección transversal del cauce.

ABSTRACT

In this paper a general fluvial kinematic model given in the form of a nonlinear conservation law is analysed, and its characteristics are observed according to different cross-sectional geometries.

INTRODUCCION

El flujo unidimensional gradualmente variado del agua en un canal abierto o cauce fluvial sobre un lecho fijo se representa mediante las ecuaciones de Saint-Venant de la hidrodinámica

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{S} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{S} \right)^2 + g \frac{\partial Z}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{D^2} = 0, \quad (2)$$

donde x es la variable espacial, t el tiempo, $Q=Q(x,t)$ el caudal, $S=S(Z(x,t),x)$ el área transversal mojada, $Z=Z(x,t)$ la cota desde un plano fijo de referencia, g la aceleración de la gravedad, y $D=D(Z(x,t),x)$ el coeficiente de conducción, convenientemente relacionado con la resistencia por fricción al flujo (ver figuras 1 y 2).

Las ecuaciones (1) y (2) corresponden a la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, respectivamente. Cuando se dan condiciones iniciales y de contorno apropiadas forman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico casilineal, que debe ser resuelto numéricamente. La deducción de las ecuaciones (1) y (2) puede verse en [1]; en [2], por ejemplo, se introducen y explican varios métodos numéricos.

Desde el punto de vista práctico el principal problema que se presenta cuando se modeliza un tramo de río es el ajuste de los coeficientes de conducción $D(Z(x,t),x)$, que usualmente, a diferencia de las áreas de las secciones transversales mojadas, no pueden ser medidos. Para ríos con secciones transversales muy

irregulares es difícil representar los coeficientes de conducción mediante funciones simples; por consiguiente, en general es necesario usar tablas e interpolarlas. El resultado concreto es que es necesario ajustar un gran número de parámetros, una tarea compleja y lenta en la cual interviene la experiencia e intuición del modelista, ya que plantear el ajuste como la solución de un problema inverso y aplicar la teoría correspondiente suele ser absolutamente impracticable con tal cantidad de parámetros. Por otra parte, se necesita previamente recolectar una cantidad significativa de datos de campo, que pueden no estar disponibles. Por tales motivos, a veces se modelizan con éxito ríos mediante la introducción de la hipótesis simplificatoria de que en cada punto del cauce existe una ley unívoca cota/caudal. Con esta hipótesis, y dado que S es una función unívoca de Z , se tiene $Q(x,t)=Q(S(x,t),x)$, y la ecuación (1) se transforma en

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q(S(x,t),x)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Desde el punto de vista teórico, esta ecuación fue estudiada hace más de cuarenta años por Lighthill y Whitham (ver [3]). Es una ecuación diferencial hiperbólica no lineal (salvo en el -improbable- caso en que dQ/dS es constante), que tiene muchas ventajas respecto del sistema completo (1), (2) si se pretende un modelo fluvial no demasiado detallado; es muy fácil preparar un modelo computacional usando (3), y el número de parámetros a ajustar es relativamente pequeño.

Por supuesto, los resultados obtenidos tienen mucho menos precisión que los obtenidos con el sistema completo (1), (2), pero de todos modos muchas veces uno no tiene los datos de campo para alimentar el modelo completo, con lo cual el modelo (3), con condición inicial

$$S(x, t_0) = S_0(x), \quad (4)$$

y condición de contorno en el extremo aguas arriba del intervalo de cálculo $x_0 \leq x \leq x_1$

$$S(x_0, t) = f(t) \quad (5)$$

es suficiente para muchos propósitos. (3), (4), (5) es un problema diferencial mixto con condición inicial y de contorno.

Obsérvese que con este modelo, llamado cinemático, se pueden modelizar no solamente tramos de ríos o canales sino también cuencas fluviales con estructura arborescente (ver figura 3). Es necesario solamente resolver numéricamente cada rama afluente por su cuenta y, en los puntos de confluencia, usar conservación de masa:

$$Q_i + Q_j = Q_k,$$

donde Q_i y Q_j son los valores calculados de caudal aguas abajo de los tramos i y j y Q_k es el valor del caudal aguas arriba del tramo k , que funciona como condición de contorno para esa rama. Se necesitan condiciones de contorno externas en cada extremo abierto aguas arriba de la cuenca fluvial. Para tratar el caso arborescente con el sistema completo (1), (2) es necesario un procedimiento más complejo, como puede verse en [4].

Si suponemos ahora que la función cota/caudal es la misma para todos los puntos del tramo fluvial modelizado, es decir, que $Q=Q(S)$ (éste sería el caso de un canal aproximadamente prismático), y esta función es continuamente diferenciable, podemos escribir (1) como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q(S)}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

donde ahora tenemos una ley de conservación escalar en el sentido dado, por ejemplo, por Lax [5] con una función de flujo (posiblemente no lineal) Q ; podemos entonces analizar bajo qué condiciones se pueden aplicar los resultados teóricos que nos ofrece la teoría y qué conclusiones podemos inferir de ellos.

Este modelo de onda cinemática o, usando terminología de ingeniería, hidrológico, se usa en modelización fluvial desde hace muchos años. Lo habitual es ajustar $c=dQ/dS$ o algún parámetro equivalente para cada intervalo espacial de discretización y resolver numéricamente la ecuación

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Más aún, el conocido método numérico de Muskingum, por ejemplo, (ver [6]) es aplicado desde 1934, mucho antes de que se estudiaran las características teóricas de la ecuación.

En este trabajo supondremos que la función de flujo $Q(S)$ se puede caracterizar teóricamente siguiendo el enfoque de Lighthill y Whitham. Con esas condiciones, mostraremos que, de acuerdo a la geometría de las secciones transversales del río o canal, Q es una función convexa genuinamente no lineal o su derivada se anula en un número finito de puntos y cambia de signo en esos puntos. La función de flujo Q puede incluso aproximarse a una función no diferenciable en un número finito de puntos, en el sentido de que es continuamente diferenciable excepto en esos puntos, en los que dQ/dS tiene límites (distintos) a derecha e izquierda. Esto ocurre cuando las secciones transversales aproximan una poligonal.

UN MODELO DE ONDA CINEMATICA PARA CANALES PRISMATICOS

Llamaremos canal prismático a un canal con sección transversal constante. Si suponemos que el material del lecho es el mismo para todos los niveles de agua y todos los puntos espaciales x , podemos calcular una función unívoca $Q(S)$ usando la hipótesis de Chézy, que dice que la resistencia por fricción τ es proporcional al cuadrado de la velocidad media $V=Q/S$:

$$\tau = f\rho V^2$$

donde f es un coeficiente de fricción, ρ la densidad del agua, y P el perímetro mojado.

Siguiendo a Lighthill y Whitham igualamos la resistencia τ a la componente F_x de la gravedad según el eje x , la cual, para pendientes pequeñas i , puede ser escrito como

$$F_x = ig\rho S.$$

Entonces tenemos

$$V = (igS/f\rho)^{1/2} = M(S/P)^{1/2}$$

donde $M = (ig/f)^{1/2}$, de modo que

$$Q = VS = MS^{3/2}/P^{1/2}. \quad (7)$$

Obsérvese que en este modelo tenemos solamente un parámetro para ajustar, a saber f o, lo que es lo mismo, M . La ecuación (7) nos muestra que si P es una función dos veces diferenciable de S , Q también lo es.

Analicemos ahora la expresión para $c = dQ/dS$ y para d^2Q/dS^2 . Tenemos

$$\frac{dQ}{dS} = M \left(\frac{3}{2} \left(\frac{S}{P} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{S}{P} \right)^{3/2} \frac{dP}{dS} \right), \quad (8)$$

$$\frac{d^2Q}{dS^2} = \frac{3M}{4(S/P)^{1/2}} \left(\left(1 - \frac{SdP}{PdS} \right)^2 - \frac{2S^2 d^2P}{3P dP^2} \right). \quad (9)$$

De (9) obtenemos inmediatamente el

Teorema 1: Para Q dada por (7), si $d^2P/dS^2 < 0$, entonces Q es una función de S convexa, estrictamente no lineal, y dos veces diferenciable.

Demostración: M , S y P son positivas, de modo que si d^2P/dS^2 es negativa, (9) es estrictamente positiva.

Estamos entonces en condiciones de aplicar el teorema de existencia y unicidad de leyes de conservación escalares genuinamente no lineales (ver por ejemplo [7]), y obtener así el

Teorema 2: Para Q dada por (7), si $d^2P/dS^2 < 0$, la ley escalar de conservación (7), con condición inicial (4) dada por una función medible acotada $Q_0(x)$ tiene una única solución débil que cumple la condición de entropía: para todo $a > 0$, $t > 0$, y x real, existe una constante $E > 0$, independiente de a , x y t , tal que

$$\frac{S(x+a, t) - S(x, t)}{a} < \frac{E}{t}.$$

Analizaremos ahora la geometría de las secciones transversales para ver cuándo podemos aplicar el Teorema 1.

ALGUNAS SECCIONES TRANSVERSALES SIMPLES TÍPICAS

Veremos ahora que para secciones transversales "normales" vale que $dP^2/dS^2 < 0$, y, por consiguiente, $Q(S)$ es una función convexa. En efecto, supongamos una sección transversal simétrica respecto de un eje vertical, y representemos el contorno derecho de la sección transversal en el plano (b, h) , donde b es la coordenada transversal con origen en el eje de simetría de la sección y $h=h(b)$ es la altura desde el fondo, tal como se puede ver en la figura 4, de modo que 2β es el ancho de la superficie libre de la sección transversal para la altura $h=h(\beta)$. Para secciones transversales "normales" h debería ser convexa; en efecto

Teorema 3: Si $h(b)$ es una función C^2 convexa, también lo es $Q(S)$.

Demostración: Sólo necesitamos probar que $d^2P/dS^2 < 0$. Tenemos que $d^2h/db^2 > 0$, y por consiguiente $d^2b/dh^2 < 0$, pues $h(b)$ es creciente. Entonces, suponiendo que $b(0) = 0$ sin pérdida de generalidad

$$S(h) = 2 \int_0^h b(\eta) d\eta ,$$

$$P(h) = 2 \int_0^h \left(\left(\frac{db}{d\eta} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} d\eta ,$$

$$\frac{dP}{dS} = \frac{dP/dh}{dS/dh} = \frac{\left(\left(\frac{db}{dh} \right)^2 + 1 \right)^{1/2}}{b} ,$$

$$\begin{aligned} d^2P/dS^2 &= \frac{d}{dS} \frac{dP}{dS} = \frac{d}{dS} \frac{\left(\left(\frac{db}{dh} \right)^2 + 1 \right)^{1/2}}{b} \\ &= \frac{db/dh}{2b^2} \left[\frac{d^2b/dh^2}{\left(\left(\frac{db}{dh} \right)^2 + 1 \right)^{1/2}} - \frac{\left(\left(\frac{db}{dh} \right)^2 + 1 \right)^{1/2}}{b} \right] < 0 , \end{aligned} \quad (10)$$

porque b es una función creciente de h y $d^2b/dh^2 < 0$.

Obsérvese que (10) cubre los casos simples en los que $b(h) = kh^r$, no solamente para los casos cóncavos en que $r \leq 1$ (para los cuales se aplica el teorema 3), sino también para todos los r positivos, que incluyen una abundante familia de funciones no cóncavas.

En particular, veamos qué sucede para secciones transversales trapezoidales, como se muestra en la figura 5. Si α es el ángulo entre la pared lateral de la sección transversal y el eje transversal horizontal, con $0 < \alpha \leq \pi/2$, una simple cuenta trigonométrica nos muestra que, si B_0 es el ancho de fondo del canal

$$S(h) = (B_0 + h \cot(\alpha))h , \quad (11)$$

$$P(h) = B_0 + 2h \csc(\alpha) . \quad (12)$$

De (11) y (12) deducimos

$$\frac{dP}{dS}(h) = \frac{2 \csc(\alpha)}{B_0 + 2h \cot(\alpha)} ,$$

$$\frac{d^2P}{dS^2}(h) = \frac{4 \csc(\alpha) \cot(\alpha)}{(B_0 + 2h \cot(\alpha))^2} \leq 0 ,$$

de modo que si la sección transversal es un trapecioide y el ancho de la superficie libre es función creciente de la altura, $Q = Q(S)$ dada por (7) es una función convexa dos veces diferenciable. En particular, si $\alpha = \pi/2$, tenemos en esencia un río encañonado.

¿Qué pasa cuando el ancho es una función decreciente de la altura, como en la figura 6, es decir, cuando las paredes laterales de la sección transversal están "inclinadas hacia adentro", o sea $\alpha > \pi/2$? En este caso, si $\beta = \pi - \alpha$, $h \leq B_0 \tan(\beta)/2$ y

$$S(h) = (B_0 - h \cot(\beta)) h ,$$

$$P(h) = B_0 + 2h \csc(\beta) ,$$

$$\frac{dP}{dS}(h) = \frac{2 \csc(\beta)}{B_0 - 2h \cot(\beta)} ,$$

$$\frac{d^2P}{dS^2} = \frac{4 \csc(\beta) \cot(\beta)}{(B_0 - 2h \cot(\beta))^2} > 0 ,$$

de modo que ya no podemos asegurar más que $Q(S)$ sea una función convexa. En realidad, tenemos que analizar la ecuación (9) más cuidadosamente.

Podemos observar que si h tiende a cero, $S(h)$ tiende a cero, $P(h)$ tiende a B_0 , $dP/dS(h)$ tiende a $2 \csc(\beta)/B_0$, y $d^2P/dS^2(h)$ tiende a $4 \csc(\beta) \cot(\beta)/B_0^2$, de modo que si S tiende a cero, dQ/dS tiende a cero y d^2Q/dS^2 tiende a infinito.

Por otra parte, si h tiende a $B_0 \tan(\beta)/2$, $S(h)$ tiende a $B_0^2 \tan(\beta)/4$, $P(h)$ tiende a $B_0 + B_0 \tan(\beta) \csc(\beta)$ y d^2Q/dS^2 tiene el mismo signo que

$$1 - 2 \frac{S}{P} \frac{dP}{dS} + \frac{S^2}{P^2} \left(\frac{dP}{dS} \right)^2 - \frac{2S^2}{3P} \frac{d^2P}{dS^2} .$$

Para mostrar que el signo es negativo es suficiente comprobar que

$$\frac{1}{P} \left(\frac{dP}{dS} \right)^2 - \frac{2d^2P}{3dS^2} < -\infty ,$$

y esto es cierto porque

$$\frac{1}{P} \left(\frac{dP}{dS} \right)^2 - \frac{2d^2P}{3dS^2} = \frac{4 \csc(\beta)^2}{(B_0 + 2h \csc(\beta)(B_0 - 2h \cot(\beta))^2)} - \frac{8 \csc(\beta) \cot(\beta)}{3(B_0 - 2h \cot(\beta))^3} > \infty$$

Hemos mostrado que d^2Q/dS^2 se anula en un número finito de puntos (al menos uno) y cambia de signo en esos puntos. Como puede verse en [B], podemos asegurar entonces la existencia de una única solución débil de (6) con solución inicial Q_0 medible acotada si se satisface la condición E':

Condición E': Sea $x(t)$ una curva de discontinuidad de la solución débil $S(x,t)$, y sea v un número entre $S(x(t)-0,t)$ y $S(x(t)+0,t)$. Entonces, excepto posiblemente en un número finito de t , vale que $\sigma[v, S^-] \geq \sigma[v, S^+]$, donde S^- y S^+ son $S(x(t)-0,t)$ y $S(x(t)+0,t)$, respectivamente, y $\sigma[w,z] = (Q(w)-Q(z))/(w-z)$, con $w \neq z$. Cabe mencionar que, en general, podemos cambiar la ecuación (6) con condición inicial (4) por la ecuación

$$\frac{dS(h)}{dt} + \frac{dQ(S(h))}{dx} = 0$$

con condición inicial $h(x,0) = h_0(x)$, y trabajar directamente con la altura h , aplicando nuevamente el teorema de existencia y unicidad dado en [8].

SECCION TRANSVERSAL TRAPEZOIDAL A TROZOS

Analicemos ahora una sección transversal trapezoidal a trozos, como se muestra en la figura 7. Si h_i es la altura a la cual la pendiente transversal cambia, $i \geq 1$ (h_0 es la altura del lecho), y si α_i , B_i , S_i y P_i son los correspondientes ángulos, anchos superficiales, áreas de secciones transversales mojadas y perímetros mojados, respectivamente, con $P_0 = B_0$, $h_0 = S_0 = 0$, $0 < \alpha_i \leq \pi$, tenemos, para $h_i \leq h < h_{i+1}$, $i \geq 0$,

$$S(h) = S_i + (B_i + (h - h_i) \cot(\alpha_i))(h - h_i),$$

$$P(h) = P_i + 2(h - h_i) \csc(\alpha_i),$$

$$\frac{dP}{dS} = \frac{2 \csc(\alpha_i)}{B_i + 2(h - h_i) \cot(\alpha_i)},$$

$$\frac{dP^2}{dS^2} = \frac{4 \csc(\alpha_i) \cot(\alpha_i)}{(B_i + 2(h - h_i) \cot(\alpha_i))^3} \leq 0.$$

En $h = h_i$, $S_i^+ = S_i^-$, $P_i^+ = P_i^-$, pero $dP_i/dS^+ \neq dP_i/dS^-$. Por consiguiente, no podemos aplicar el teorema de conservación directamente, porque en esos puntos $dQ(S)/dS$ es discontinua; sin embargo, calculemos ambos límites laterales dQ_i/dS^- y dQ_i/dS^+ : de (8) observamos que

$$dQ_i^-/dS > dQ_i^+/dS \text{ si y sólo si } dP_i^-/dS < dP_i^+/dS,$$

y

$$\frac{dP_i^-}{dS} = \frac{2 \csc(\alpha_{i-1})}{B_{i-1} + 2(h - h_{i-1}) \cot(\alpha_{i-1})} = 2 \csc(\alpha_{i-1})/B_i,$$

de modo que

$$dP_i^-/dS < dP_i^+/dS \text{ si y sólo si } \csc(\alpha_{i-1}) < \csc(\alpha_i),$$

es decir, si y sólo si $\alpha_{i-1} > \alpha_i$.

De este análisis deducimos que si aproximamos $b(h)$ cerca de los puntos h_i (sobre un intervalo, digamos, $(h_i - \varepsilon, h_i + \varepsilon)$, mediante una función dos veces diferenciable, de modo de suavizar los ángulos, si $\alpha_{i-1} < \alpha_i$ podemos usar una función cóncava; por el contrario,

si $\alpha_{i-1} > \alpha_i$ (como en una planicie de inundación), podemos asegurar lo siguiente: $Q(S)$ es una función convexa excepto cerca de las alturas críticas h_i , donde la pendiente vertical cambia con un gradiente muy grande y el ángulo de la pared lateral de la sección transversal decrece abruptamente. Allí d^2Q/dS^2 se anula dos veces, y sus valores cambian de positivos a negativos y de nuevo a positivos. Podemos aplicar de nuevo la teoría de leyes de conservación con condiciones no convexas.

CONCLUSIONES

Con el modelo cinemático desarrollado en las secciones anteriores se puede en principio analizar secciones transversales de cualquier tipo, aproximándolas mediante perfiles transversales trapezoidales a trozos. La existencia y unicidad de soluciones débiles está garantizada en los casos más interesantes; sin embargo, debemos controlar en cada situación si las suposiciones físicas del modelo se pueden realmente aplicar. El caso de paredes laterales inclinándose hacia adentro es interesante no sólo por sus propiedades teóricas (de acuerdo a la inclinación la función de flujo puede pasar de convexa a cóncava) sino porque esto se traduce en propiedades que se pueden extender a canales cerrados, y eventualmente a presión.

Ahora bien, en muchos ríos, y en particular en ríos caudalosos de llanura, es usual observar secciones transversales con un lecho menor, por el que el agua fluye la mayor parte del tiempo, y una amplia planicie de inundación, cubierta por el agua solamente en casos de crecidas excepcionales. Las secciones transversales de este tipo tienen la forma indicada en la figura 8. Existe una altura crítica h_* , por debajo de la cual el agua sólo fluye por el lecho menor, y por encima de la cual la planicie de inundación, o lecho mayor, se comienza a cubrir. Examinemos ahora la transición entre las dos situaciones según el modelo cinemático expuesto en las secciones anteriores. Supongamos que el lecho mayor tiene pendiente despreciable en sentido transversal. Si usáramos el modelo de Chézy, obtendríamos que la función de flujo $Q(S)$ es discontinua para $S_* = S(h_*)$. Esto se observa directamente: cuando la altura h cruza el valor crítico h_* , el área S cambia continuamente, pero el perímetro mojado P salta del valor $b_1 + 2h_*$, donde b_1 es el ancho del lecho menor, a $b_2 + 2h_*$, donde b_2 es el ancho del lecho mayor. Como resultado el caudal decrece bruscamente. El mismo resultado se obtiene como caso límite de la sección transversal trapezoidal, si permitimos que el lecho mayor tenga una pequeña pendiente transversal, y hacemos tender esa pendiente a cero.

Claramente, esta discontinuidad de $Q(S)$ no es realista. Este es, por otra parte, tenido muy en cuenta en modelizaciones fluviales concretas con las ecuaciones de Saint-Venant completas (ver, por ejemplo, [2]), en las que se aplican diversas técnicas especiales para analizar ríos con lecho mayor). Evidentemente, la teoría antes expuesta falla debido no sólo a que el cambio de pendiente lateral es muy abrupto, sino, sobre todo, a que la parte de

perímetro transversal correspondiente al lecho mayor es significativamente mayor que la que corresponde al lecho menor, lo cual corresponde a un cambio muy pronunciado de la fricción con respecto a la altura. Por consiguiente, efectos cualitativos similares pueden esperarse cuando los cambios bruscos ocurren no en la geometría de la sección transversal sino en la rugosidad del material del lecho. Una rugosidad creciente tendría un efecto similar al de una pendiente transversal decreciente, dado que ambos efectos contribuyen a una fricción lateral mayor.

Dado que en este análisis interviene fuertemente la teoría de leyes escalares de conservación de ecuaciones hiperbólicas casilineales, y por consiguiente el análisis de ondas de choque, estamos en la actual fase de nuestra investigación analizando el problema de Riemann para funciones de flujo no convexas o no suficientemente suaves y aplicando métodos numéricos de tipo Godunov de orden superior, según las técnicas usadas en [9].

REFERENCIAS

1. Stoker, J. J., *Water waves*, Wiley, Nueva York, 1957.
2. Liggett, J. A y Cunge, J.-A., Numerical methods of solutions of unsteady flow equation, en: K. Mahmood y V. Yevjevich (eds.), *Unsteady flow in open channels*, Vol. I, Water Resources Publications, Fort Collins, CO, 89-178, 1975.
3. Lighthill, M. J. y Whitham, G. B., On kinematic waves I (Flood movement in long rivers), *Proc. Roy. Soc. A*, **229**, 281-316, 1955.
4. Jacovkis, P. M., Modelos hidrodinámicos en cuencas fluviales, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **5**, 295-320, 1989.
5. Lax, P., *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1973.
6. U.S. Army Corps of Engineers, *Flood control*, Engineering Construction Text X-156, The Engineering School, Ft. Belvoir, Virginia, 1940.
7. Smoller, J., *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer, Nueva York, 1983.
8. Ballou, D. P., Solutions to nonlinear hyperbolic Cauchy problems without convexity conditions, *Trans. Am. Math. Soc.*, **152**, 441-460, 1969.
9. Tabak, E. G, *Focusing of weak shock waves and the von Neumann paradox of oblique shock reflection*, Ph. D. Dissertation, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1992.

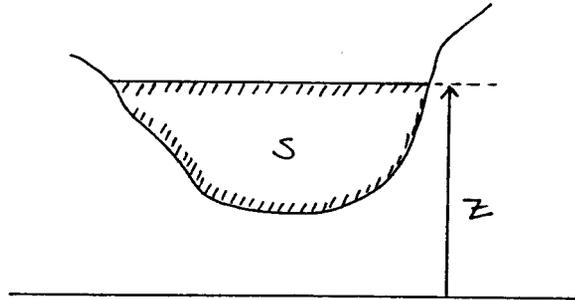


Figura 1: Sección transversal de un río

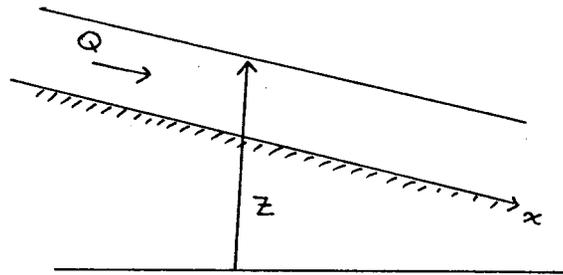


Figura 2: Perfil longitudinal de un río

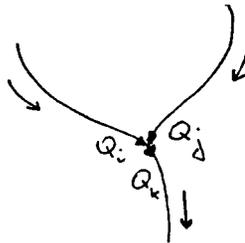


Figura 3: Estructura fluvial arborescente

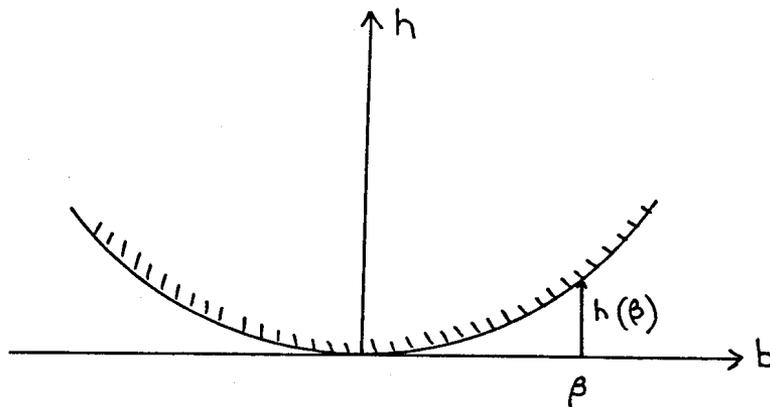


Figura 4: Simplificación de sección transversal típica

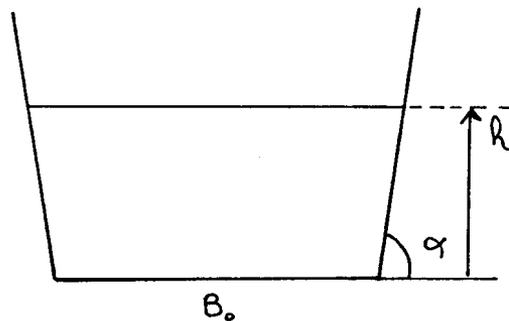


Figura 5: Sección transversal trapezoidal

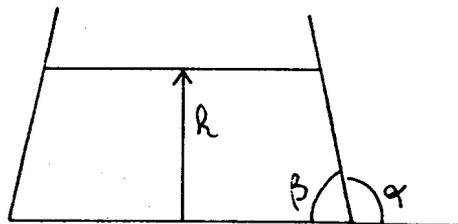


Figura 6: Sección transversal con paredes laterales hacia adentro

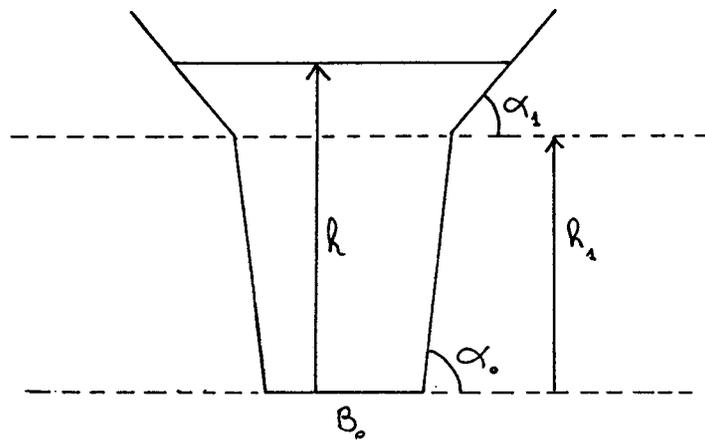


Figura 7: Sección transversal trapezoidal a trozos

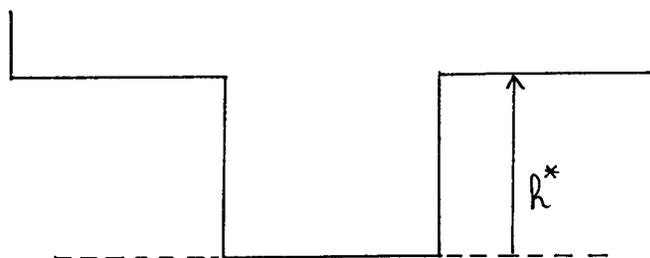


Figura 8: Esquema de sección transversal con lecho mayor