

## RESOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION UNIDIMENSIONAL DE CONVECCION-DIFUSION. APLICACION AL TRANSPORTE DE CONTAMINANTES EN CURSOS DE AGUA

José F. Rodríguez (\*)

*Departamento de Hidráulica e Ingeniería Sanitaria  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario, Riobamba 245 bis, 2000 Rosario, Argentina*

### RESUMEN

En el presente trabajo se describe la aplicación de una metodología numérica para la resolución de la ecuación unidimensional de convección-difusión. Es bien conocido el hecho de que la resolución de esta ecuación frecuentemente trae asociados problemas de difusión numérica y oscilaciones, derivados de los esquemas numéricos utilizados. Para evitar estos problemas, se aplicó una técnica de separación de los términos convectivo (con características hiperbólicas) y difusivo (con características parabólicas). Mediante esta técnica se los considera a ambos como fenómenos sucesivos durante cortos intervalos de tiempo. El término convectivo se modela en base al método de las características combinado con una interpolación de alto orden. El término difusivo se modela mediante un esquema de Crank Nicolson Generalizado. Se analizan los efectos que sobre el modelo producen las variaciones de los parámetros: el número de Courant, el número de Peclet adimensional y el factor de peso theta. Se describe la implementación computacional del modelo en lenguaje TURBO PASCAL. Se compara el comportamiento del modelo con resultados de un modelo de Crank Nicolson clásico aplicado a la ecuación completa. Se realizan aplicaciones a casos teóricos y a un curso de la región. Se exponen las conclusiones finales.

### ABSTRACT

The application of a numeric methodology for the solution of the one dimensional convection-diffusion equation is described in the present paper. It is well known the fact that the resolution of this equation is frequently associated with problems of numerical diffusion and oscillations due to the numerical schemes. In order to avoid these problems, a split operator approach which separates the complete equation into a convective term (hyperbolic type) and a diffusive term (parabolic type) is used. In this approach both terms are considered as alternating processes during short time periods. The convective term is modelled by the characteristics method combined with a high order interpolation. The diffusive term is modelled by a generalized Crank Nicolson scheme. The effects of variations on the model parameters: Courant number, Peclet number and weighing factor theta, are analyzed. The computational implementation of the model in TURBO PASCAL is described. The behaviour of the model is compared with results of a classic Crank Nicolson scheme applied to the complete equation. Applications are made to theoretical situations and to a natural stream of the region. Final conclusions are exposed.

### INTRODUCCION

En problemas de contaminación por vertidos en cursos de agua, comúnmente se adopta una descripción matemática del tipo campo lejano. Así se denomina aquella zona donde las perturbaciones de la inyección dejan de sentirse, y las características de la turbulencia permiten un abordaje simplificado del problema. Se pueden entonces modelar los términos turbulentos que producen la dispersión, relacionándolos con las características medias del flujo (sección, ancho, velocidad). Si se adopta un análisis unidimensional, este

(\*)El autor agradece los consejos de su director, Dr. Pablo Jacovkis y la colaboración del Ing. Gerardo Riccardi.

fenómeno es representado por la ecuación unidimensional de convección-difusión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( AK_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (1)$$

en donde  $x$  es la coordenada espacial longitudinal,  $t$  el tiempo,  $A(x,t)$  la sección transversal,  $C(x,t)$  la concentración del contaminante media en la sección (en unidades de masa sobre volumen),  $U(x,t)$  la velocidad media en la sección y  $K_x$  el coeficiente de difusión longitudinal.

### METODOS DE RESOLUCION NUMERICA

Observando la ecuación (1) de convección-difusión, se deduce que el problema matemático lo constituye la resolución de una ecuación lineal en derivadas parciales de tipo mixto (hiperbólica + parabólica). A partir de este punto son varios los caminos posibles a seguir, de acuerdo al método de resolución adoptado. Básicamente existen dos enfoques: el primero resuelve la ecuación completa de una sola vez mientras el segundo propone la separación de los términos convectivo y difusivo.

Siguiendo el primer enfoque, puede resolverse la ecuación (1) a través de esquemas de diferencias finitas centradas espacialmente y mallas de discretización tan finas como sea necesario en las regiones de fuertes gradientes de concentración. Este es el esquema presentado por McNéñez [1] que discretiza mediante diferencias finitas centradas en el espacio y en el tiempo, con un esquema clásico de Crank-Nicolson[2].

El número de Peclet (Pe) es una medida de la intensidad relativa entre efectos convectivos y difusivos. A medida que aumenta el valor de  $|Pe|$  el esquema presentado se torna más impreciso. Valores de  $|Pe|$  mayores que 10 producen malas performances del modelo [1]. Para atenuar estos problemas, se puede recurrir a un esquema descentrado asignándole mayor peso a los valores en el extremo aguas abajo. Estos esquemas se denominan upwind y representan bien la solución para valores altos de  $|Pe|$ . Un análisis comparativo de los métodos de diferencias centradas, upwind y otros esquemas aplicados a la ecuación completa para régimen permanente puede encontrarse en Eiger [3].

Según el segundo enfoque, dadas las características diferentes de los procesos involucrados, es conveniente desdoblarlos y considerarlos como fenómenos sucesivos durante cortos intervalos de tiempo. Así, tanto la parte hiperbólica (convección), como la parte parabólica (difusión) de la ecuación (1) pueden ser resueltas separadamente, utilizando para cada una el método que se adapte mejor.

#### Convección

Ignorando la difusión, o sea, haciendo cero el término de la derecha de la ecuación (1), nos queda:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

La solución numérica de esta ecuación debe ser considerada con mucho cuidado. Formalmente, no es difícil formular una solución, ya que es una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de tipo hiperbólica y requiere una condición en el borde de ingreso del flujo, además de una condición inicial [2]. Pero, si se selecciona para la solución un esquema de diferencias finitas, debe tenerse en cuenta que la mayoría de estos métodos aplicados a estas ecuaciones presentan problemas de difusión numérica, la que es en muchos casos mayor que la física. Puede decirse que estas aproximaciones en realidad representan una ecuación diferente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3)$$

donde  $K_a$  es un coeficiente de difusión artificial introducido por la naturaleza aproximada del esquema de diferencias finitas. Mientras  $K_a$  se mantenga en valores por debajo de  $K_x$ , esta difusión artificial no compromete los resultados de la simulación. Pero si  $K_a$  alcanza el mismo orden de magnitud que  $K_x$ , o incluso es mayor, aunque la simulación pueda parecer correcta no se corresponderá con el fenómeno que se trata de modelar.

Otro problema para resolver la ecuación (2) además de la difusión numérica lo constituye la dispersión numérica. Por dispersión numérica debe entenderse el hecho de que los componentes individuales de Fourier que conforman cualquier distribución de concentraciones se propagan a diferentes velocidades. Esto produce un comportamiento oscilatorio de la solución, como así también un error en el pico, que puede llegar a ser tan importante como la difusión numérica. Más aún, las concentraciones negativas producto de las oscilaciones plantean otro problema: no tiene significado físico pero ignorarlas significa no respetar el principio de conservación de masa en la solución numérica.

Los problemas de oscilación y difusión numérica descriptos anteriormente se deben muchas veces a la discretización necesaria para aplicar el método de diferencias finitas. Como alternativa muy interesante en este tipo de problemas puede recurrirse al método de las características, mediante el cual se evita la mencionada discretización con las consiguientes ventajas.

### Difusión

Una vez obtenidos los valores de la concentración en cada modo, producto de la resolución de la ecuación de convección pura (2), éstos deben ser sometidos al otro mecanismo importante en la dispersión: la difusión. El intervalo de tiempo debe ser el mismo que el utilizado para la convección, ya que a pesar de ser considerados como sucesivos, estos mecanismos son simultáneos. Para el caso de considerar solamente la difusión, la ecuación (1) se reduce a:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( A K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (4)$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de tipo parabólico [2]. Para resolverla puede utilizarse un esquema de diferencias finitas, ya que estos esquemas aplicados a este tipo de ecuaciones no presentan los problemas de difusión numérica mencionados anteriormente.

En lo que respecta a las condiciones iniciales y de borde, debe tenerse en cuenta que, a diferencia de la ecuación de convección que requiere una condición inicial y solamente una condición en el extremo aguas arriba, en este caso se necesitan dos condiciones de borde, una aguas arriba y otra aguas abajo, además de la condición inicial.

## MODELO DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL DHIST2

En base a lo analizado en el punto anterior, fueron seleccionadas una serie de metodologías consideradas las más adecuadas, e implementadas computacionalmente en el modelo DHIST2. El modelo aplica la técnica de separación de términos advectivos y difusivos, resolviendo la parte advectiva a través del método de las características combinado con una interpolación cúbica de alto orden [4], y la parte difusiva utilizando un esquema de diferencias finitas del tipo Crank Nicolson Generalizado.

### Operador convectivo

Utilizando el método de las características, la ecuación (2) puede escribirse:

$$\frac{dC}{dt} = 0 \quad (5)$$

a lo largo de la curva característica:

$$\frac{dx}{dt} = U \quad (6)$$

La ecuación (2) significa que si la trayectoria entre un punto de partida  $d$  y un punto de llegada  $a$  es determinada mediante la integración de la ecuación (6), entonces la ecuación (5) implica que:

$$C_a = C_d \quad (7)$$

Relacionando los puntos  $a$  y  $d$  con los nodos de una malla cartesiana no uniforme (figura 1):

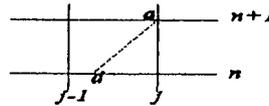


Figura 1: esquema de malla cartesiana

El paso advectivo computa la concentración  $C_j^{n+1}$  en el tiempo  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$  en el punto  $j$  del eje  $x$ . La trayectoria que une  $d$  con  $a$  es la definida por la ecuación (6) por lo que se puede escribir ahora:

$$C_j^{n+1} = C_d^n \quad (8)$$

El problema se reduce entonces, a la integración de la ecuación (6) para hallar el punto de partida  $d$  y luego estimar  $C_d^n$  en base a los valores de concentración en los nudos de la malla para el tiempo  $t_n$ , que son conocidos. Integrando con el método de los trapecios, resulta la siguiente expresión para  $x_d$ :

$$x_d = x_j - \frac{1}{2}\Delta t (U_j + U_d) \quad (9)$$

Considerando además una variación lineal de la velocidad entre  $j$  y  $j-1$ :

$$U_d = \alpha U_{j-1} + (1 - \alpha)U_j \quad (10)$$

donde  $\alpha = (x_j - x_d)/(x_j - x_{j-1})$

Combinando las ecuaciones (9) y (10) pueden obtenerse  $U_d$  y  $x_d$ . Una vez calculado  $x_d$  resta calcular  $C_d^n$ . La estimación mediante simple interpolación lineal de los valores de  $C_j^n$  y  $C_{j-1}^n$  produce excesiva difusión numérica, pudiendo incluso llegar a superar a la física, sobre todo en los casos en los que la convección es dominante sobre la difusión (alto número de Peclet). La difusión puede disminuirse usando una interpolación cuadrática o cúbica, pero esto requiere del uso de otros puntos adicionales de la malla, los que físicamente se encuentran alejados de  $d$ . Una forma de obtener una interpolación de mayor orden usando solamente la información disponible dentro del segmento del punto  $d$ , consiste en utilizar una interpolación cúbica en la que, además de las concentraciones son usadas también las derivadas espaciales de la concentración en los nodos vecinos [4].

Se llamará  $CX_j^n$  a la derivada espacial  $\partial C/\partial x$  en el punto  $x=x_j$ ,  $t=t_n$ . Conociendo  $C$  y  $CX$  en el tiempo  $t_n$  para los puntos  $j$  y  $j-1$ , se tienen cuatro magnitudes conocidas con las cuales construir un polinomio de interpolación de tercer grado entre  $j$  y  $j-1$ . Este polinomio puede expresarse como:

$$C_d^n = T(\alpha) = A\alpha^3 + B\alpha^2 + D\alpha + E \quad (11)$$

los cuatro coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $E$ , pueden evaluarse satisfaciendo las cuatro condiciones siguientes:

$$F(1) = C_j^n - 1; F(0) = C_j^n; \dot{F}(1) = CX_j^{n-1}; \dot{F}(0) = CX_j^n \quad (12)$$

donde  $\dot{F}(x) = (dY/dx)|_x$ . Substituyendo los coeficientes en (11):

$$C_j^n = a_1 C_j^{n-1} + a_2 C_j^n + a_3 CX_j^{n-1} + a_4 CX_j^n \quad (13)$$

en donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha^2 (3 - 2\alpha) & a_2 &= 1 - \alpha_1 \\ a_3 &= \alpha^2 (1 - \alpha)(x_j - x_{j-1}) & a_4 &= -\alpha (1 - \alpha)^2 (x_j - x_{j-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

De esta manera se obtienen los valores de  $C_j^n$  y, por (8)  $C_j^{n+1}$ . Pero, si se quiere continuar con el cálculo, también serán necesarios los valores de  $CX_j^{n+1}$ . La convección de  $CX$  es tratada de la misma forma que la convección de  $C$ . Tomando la ecuación (2), derivándola respecto de  $x$  e invirtiendo el orden de derivación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

que puede expresarse como:

$$\frac{dCX}{dt} = -CX \frac{\partial U}{\partial x} \quad (16)$$

a lo largo de la curva característica dada por la ecuación (6).

La ecuación (16), al igual que la (5), es una ecuación diferencial ordinaria lineal, pero con término no homogéneo. Para resolverla se la tratará primero del mismo modo que a la ecuación (5) y luego se incorporará el efecto del término no homogéneo. Utilizando la misma interpolación para  $CX$  que para  $C$ :

$$CX_j^n - \dot{F}(x) = b_1 C_{j-1}^n + b_2 C_j^n + b_3 CX_{j-1}^n + b_4 CX_j^n \quad (17)$$

en donde:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{6\alpha(\alpha-1)}{(x_j - x_{j-1})} & b_2 &= -b_1 \\ b_3 &= \alpha(3\alpha-2) & b_4 &= (\alpha-1)(3\alpha-1) \end{aligned} \quad (18)$$

Luego por analogía con la ecuación (8), se puede escribir para la derivada:

$$CX_j^n = CX_j^n \quad (19)$$

donde  $CX_j^n$  significa que proviene de la solución de la ecuación homogénea. Sumando la parte no homogénea:

$$CX_j^{n+1} = (b_1 C_{j-1}^n + b_2 C_j^n + b_3 CX_{j-1}^n + b_4 CX_j^n) \cdot \left( 1 - \frac{U_j - U_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \Delta t \right) \quad (20)$$

Con respecto a las condiciones de borde para la convección, el único requerimiento lo constituyen los valores de  $C(x, t)$  y  $CX(x, t)$  en los bordes de ingreso del flujo.

### Operador difusivo

Una vez obtenidos los nuevos valores de  $C_j^{n+1}$  en cada nodo, producto de la convección descrita en el punto anterior, éstos deben ser sometidos al otro mecanismo importante en la dispersión: la difusión. El intervalo de tiempo es el mismo que el utilizado para la convección, ya que, a pesar de ser tratados como sucesivos, éstos procesos son simultáneos. Debe tenerse en cuenta además que, por el esquema utilizado en la convección, se ha incorporado una variable adicional  $CX$ , la cual también debe ser difundida [5].

El esquema de diferencias finitas adoptado es la generalización del método de Crank-Nicolson, el que aplicado a la ecuación (4) queda:

$$\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} = \frac{\theta}{X_{j+1/2} - X_{j-1/2}} \frac{K_x}{A_j} \left[ \left( A \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{j+1/2}^{n+1} - \left( A \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{j-1/2}^{n+1} \right] + \frac{1-\theta}{X_{j+1/2} - X_{j-1/2}} \frac{K_x}{A_j} \left[ \left( A \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{j+1/2}^n - \left( A \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{j-1/2}^n \right] \quad (21)$$

donde  $\theta$  es el factor de peso ( $0 \leq \theta \leq 1$ );  $\theta = 0$  da un esquema explícito,  $\theta = 1/2$  un esquema clásico de Crank Nicolson y  $\theta = 1$  un esquema totalmente implícito. Los valores en  $j+1/2$  y en  $j-1/2$  se obtienen de la siguiente manera, considerando para cada caso los correspondientes valores en  $n$  o en  $n+1$ .

$$\left( A \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{j+1/2} = \left( \frac{A_{j+1} + A_j}{2} \right) \left( \frac{C_{j+1} - C_j}{X_{j+1} - X_j} \right); \quad \left( A \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{j-1/2} = \left( \frac{A_{j-1} + A_j}{2} \right) \left( \frac{C_j - C_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right) \quad (22)$$

Las mismas ecuaciones se aplican para la difusión de  $CX$ . La resolución del sistema de ecuaciones resultantes se realiza mediante técnica de barrido doble ya que la matriz de los coeficientes es tridiagonal [2]. Aplicando este algoritmo se obtienen los valores resultantes de  $C$  y de  $CX$  del proceso de difusión.

Este esquema de resolución es incondicionalmente estable lo que es conveniente ya que el esquema seleccionado para la convección permite bastante flexibilidad en la adopción del intervalo de tiempo.

### EJEMPLOS DE APLICACION

A los efectos de verificar el comportamiento del modelo en distintas situaciones se presentan a continuación algunas aplicaciones; las primeras son de carácter teórico y la última está realizada sobre la base de datos de un curso de la Provincia de Santa Fe (Arroyo Ludueña). El criterio adoptado para calificar a la solución se basa en el análisis del error relativo del valor pico de la concentración.

#### Convección pura de una mancha gaussiana

El comportamiento del método de las características con la interpolación cúbica fue testado simulando la convección pura de una distribución de concentraciones gaussiana en un canal de Área unitaria con un campo de velocidades constante de 0,5 m/s. La distribución gaussiana tiene una desviación estándar de 264 m y está definida por 15 puntos ubicados cada 200 m. Las pruebas consistieron en transportar la mancha durante 96000 seg (26,7 hs) y analizar el comportamiento de la solución numérica para distintos valores del parámetro  $Cr$  (número de Courant).

El número de Courant se define como la relación entre la velocidad de propagación de la onda ( $dx/dt$ ) y la velocidad computacional de transmisión de datos ( $\Delta x/\Delta t$ ) y se expresa comúnmente para este tipo de problemas como  $Cr = U \Delta t/\Delta x$ . En el esquema utilizado puede advertirse que el valor de  $\alpha$  que aparece en algunas ecuaciones no es otra cosa que  $Cr$ . A partir de su definición, este parámetro es muy importante para el análisis numérico y la programación en los problemas dependientes del tiempo.

El resultado esperado es que la mancha no sufra distorsión alguna en su forma ya que se simula la convección solamente. Para un valor de  $Cr = 1$  no existe interpolación ya que el punto  $d$  coincide con un punto de la malla, y la solución es exacta (figura 2). Valores de  $Cr$  menores que 1 provocan un achatamiento de la mancha que es mayor a medida que el valor de  $Cr$  disminuye.

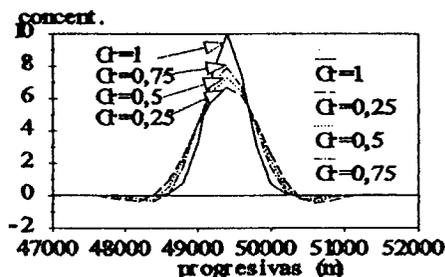


Figura 2: convección pura.

También se realizaron pruebas en un campo de velocidades variable en el espacio, verificándose que la mancha gaussiana atraviesa la zona de velocidades variables sin cambios en su forma.

#### Dispersión de un vertido plano instantáneo

En 1959, Taylor propuso la hipótesis de que, en flujo turbulento a través de conductos, la mezcla de un trazador que se ha desparramado sobre toda la sección transversal, puede describirse con la ecuación:

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + U_a \frac{\partial C_a}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \quad (23)$$

donde  $U_a$  y  $C_a$  son los valores medios en la sección de la velocidad y la concentración respectivamente. Esta descripción matemática se extendió posteriormente al caso más general de la dispersión unidimensional de un vertido plano instantáneo. Una solución de esta ecuación para el caso de velocidad  $U_a$  constante y descarga instantánea es la distribución gaussiana:

$$C_a(x,t) = \frac{C_0 V_0}{2A(\pi K_x t)^{1/2}} \cdot \exp \left\{ - \frac{(x - U_a t)^2}{4 K_x t} \right\} \quad (24)$$

donde  $C_0$  y  $V_0$  son la concentración y el volumen inicial del trazador distribuido en la sección transversal  $A$ .

Se utilizó esta solución analítica simulando la dispersión de un vertido instantáneo después de 96000 seg (26,7 hs) bajo las mismas condiciones hidráulicas que en la primera aplicación, para testear la sensibilidad del modelo ante la variación de sus parámetros.

Los parámetros del modelo son tres:  $Cr$ ,  $Pe$  y factor de peso  $\theta$ . El  $n^\circ$  de Courant afecta a la parte convectiva del modelo y el efecto de su variación sobre el esquema numérico ya se ha analizado en la aplicación. En esta

serie de corridas se extendió el rango de variación hasta valores de  $Cr=3$ . El factor de peso opera sobre la parte difusiva del modelo. Con respecto al  $n^\circ$  de Peclet, éste cuantifica la relación entre la convección y la difusión, y su expresión adimensional es la siguiente:  $Pe = U \Delta x / K_x$ . Como ya se mencionó, los valores de  $K_x$  seleccionados para las corridas fueron de 0,1; 1; 10 y 100, resultando valores de  $Pe$  de 1000; 100; 10 y 1, respectivamente. El interés de probar distintos valores de  $K_x$  reside en que los valores observados en distintos cursos por numerosos investigadores, indican que es sumamente variable.

Resultados de corridas preliminares indicaron que variaciones en los valores de  $\theta$  influyen poco sobre la solución del modelo, por lo que se decidió fijarlo en  $1/2$ . La variación simultánea de los números de Courant y Peclet permitió establecer zonas de confiabilidad en la performance del modelo, a partir del análisis de los errores de las corridas realizadas para  $\theta = 1/2$ . Estos resultados han sido resumidos en un gráfico (figura 3) en el que se han definido tres zonas que califican la solución de acuerdo a su error en: buena (error  $< 5\%$ ), regular ( $5\% < \text{error} < 10\%$ ) y mala (error  $> 10\%$ ). Simultáneamente se han superpuesto en este gráfico valores reportados por Menéndez [1] y clasificados en buenos, regulares y malos (M.BUENA, M.REGULAR y M.MALA en el gráfico) con el mismo criterio que en este trabajo. Los valores de Menéndez corresponden a corridas de un modelo unidimensional resuelto en diferencias finitas mediante un esquema clásico de Crank Nicolson aplicado a la ecuación completa.

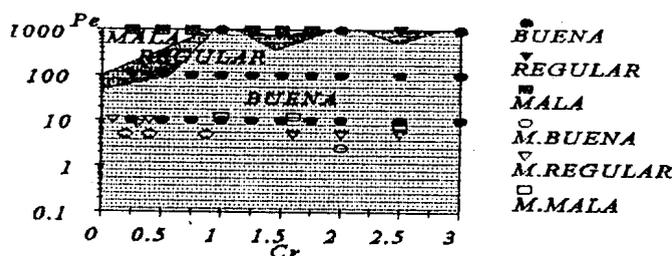


Figura 3: comportamiento del modelo para distintos  $Cr$  y  $Pe$ .

#### Simulación de una descarga instantánea de contaminante en el Arroyo Ludueña (Prov. de Santa Fe)

Con el objeto de aplicar el modelo a una situación real de simulación, en la que se tuvieran en cuenta características geométricas e hidráulicas propias de un curso de agua, se decidió modelar una descarga instantánea en un tramo del Arroyo Ludueña. El Arroyo Ludueña es un curso de agua de la Provincia de Santa Fe; corre en la dirección sureste desembocando en el Río Paraná luego de atravesar el casco urbano norte de la ciudad de Rosario. Su cauce permanente mide aproximadamente 20 km y el área de la cuenca de aporte es de 700 km<sup>2</sup>. El caudal base es de 0.5 m<sup>3</sup>/seg; para crecidas de recurrencia ordinaria los caudales están entre 100 y 200 m<sup>3</sup>/seg y para crecidas de recurrencia extraordinaria (100) el caudal pico esperable es de alrededor de 300 m<sup>3</sup>/seg.

El tramo modelado es el comprendido entre el lugar del futuro emplazamiento de la presa de retención de crecidas del Arroyo Ludueña (situada aproximadamente en la intersección de una línea imaginaria que une las localidades de Pérez y Funes y el Arroyo) y el puente de la Avenida de circunvalación de Rosario (figura 4). Su longitud es de 9,2 km aproximadamente y su pendiente media es de 0.001 m/m. Para la representación topográfica del tramo se utilizaron inicialmente 42 secciones ubicadas a distancias variables. Estas secciones fueron utilizadas para la implementación del modelo hidrodinámico DHIS 7 [6].

A través del mencionado modelo se realizó una corrida con caudal estacionario de 10 m<sup>3</sup>/seg. Con los

resultados del modelo hidrodinámico se realizaron simulaciones de la dispersión de una mancha de forma gaussiana, considerándose la producto de un vertido plano instantáneo. Como la separación de las secciones originales era muy variable (10 a 1230 m), en algunos tramos se debió agregar secciones interpoladas para evitar excesivas restricciones del modelo en lo que respecta a la estabilidad. Como resultado se utilizaron 182 secciones con distancias variables entre 10 y 123 m.

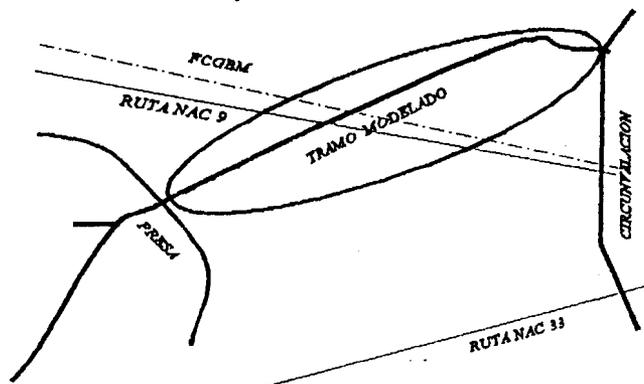
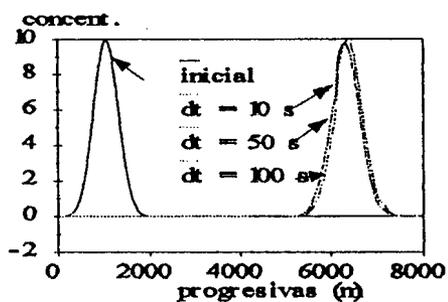


Figura 4: Arroyo Ludueña - tramo modelado

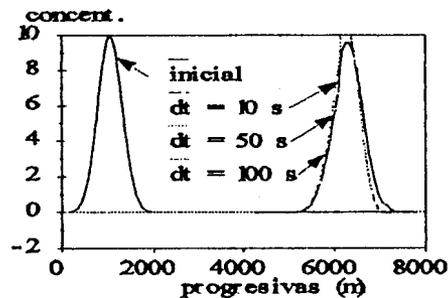
Los valores de  $Kx$  utilizados fueron de 0; 0,1; 1 y  $10 \text{ m}^2/\text{seg}$ . La convección pura ( $Kx=0$ ) sirvió como forma de testear la hipótesis de no distorsión. Se utilizaron los mayores valores de  $\Delta t$  compatibles con las condiciones de estabilidad del modelo y de acuerdo a los resultados de las aplicaciones anteriores.

Del análisis de los resultados de las corridas realizadas (figura 5 a, b, c y d) se puede concluir que el modelo se comporta satisfactoriamente para valores de  $\Delta t$  de 10 y 50 seg para todos los  $Kx$  analizados. Como era de esperarse la mayor difusión numérica se produce para  $\Delta t = 10$  seg. También se realizaron corridas con un valor de  $\Delta t = 100$  seg en las que pudieron advertirse problemas de inestabilidad. Estos fueron mayores a medida que aumentaba el valor de  $Kx$ .

Los valores extremos de los parámetros para los cuales el modelo se comportó satisfactoriamente fueron:  $0,03 < Cr < 3,57$ ;  $0,47 < Pe < 807$ .



a



b

Figura 5: ver hoja siguiente

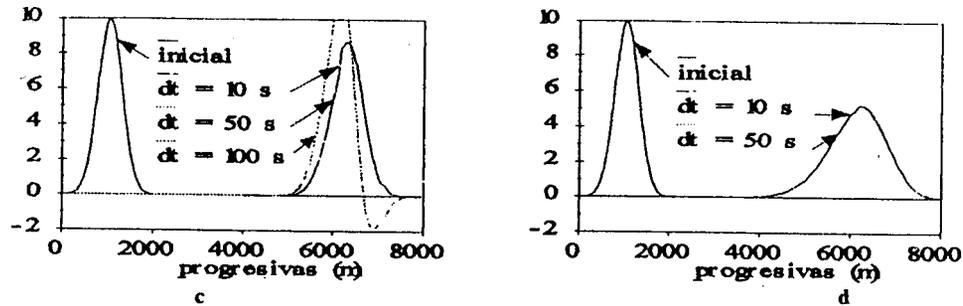


Figura 5: simulación para distintos  $Kx$ : a)  $0 \text{ m}^2/\text{s}$ , b)  $0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ , c)  $1 \text{ m}^2/\text{s}$ , d)  $10 \text{ m}^2/\text{s}$

### CONCLUSIONES

Se han aplicado una serie de técnicas y esquemas numéricos para la resolución de la ecuación unidimensional de convección-difusión. El modelo matemático resultante fue implementado computacionalmente y probado a través de varias aplicaciones. Como resultado de éstas puede concluirse:

- \* la separación de los términos de la ecuación original permite aumentar  $\Delta t$  manteniendo precisión;
- \* la utilización del método de las características combinado con la interpolación cúbica utilizada minimiza los problemas de difusión numérica;
- \* existe un efecto de ocultamiento de la difusión numérica por la difusión física, por lo que la precisión aumenta al aumentar  $Kx$ ;
- \* en todos los casos analizados el esquema resultó conservativo mientras no se registraron inestabilidades, las que se produjeron para valores de  $Cr$  mayores a 4 y fueron mayores a mayor  $Kx$ ;
- \* existen zonas de valores de concentración negativos en los resultados de algunas corridas sobre todo para bajos valores de  $Cr$  y  $Kx$ , lo que no es deseable ya que no teniendo significado físico deben ser considerados para conservar la masa total; no obstante estos valores son pequeños comparados con otros esquemas [4];

### BIBLIOGRAFIA

1. Menendez, A.N., "Métodos Numéricos para Problemas de Transporte de Contaminantes", MECOM 91, Paraná, 1991.
2. Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.O., "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, New York, 1969.
3. Eiger, S., "Modelos de Escoamientos Turbulentos", Métodos Numéricos en Recursos Hídricos, ABRH, 1981, pags. 84-155.
4. Holly, F.M., Preissmann, A., "Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions", Jour. Hydr. Div., ASCE, Vol 103, No HY11, November, 1977.
5. Holly, F.M., Usseglio-Polatera, J.M., "Dispersion Simulation in Two Dimensional Tidal Flow", Jour. Hydr. Eng., ASCE, Vol 110, No 7, July, 1984.
6. Riccardi, G.A., "Modelación Matemática Unidimensional Compleja y Bidimensional de Flujos a Superficie Libre", Informe Anual 1990/91, Consejo de Investigaciones U. N.R., Rosario, 1992.