

RESULTADOS ANALITICOS Y NUMERICOS SOBRE EL EFECTO DE TEXTURAS UNIFORMES EN DISPOSITIVOS LUBRICADOS

Alfredo F. Quiroga*, Gustavo C. Buscaglia*, Ionel Ciuperca †, and Mohammed Jai ††

*Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro
Av. Bustillo 9500, 8400 Bariloche, Argentina
email: quiroгаа@ib.cnea.gov.ar, gustavo@cab.cnea.gov.ar

†Université Lyon I, Analyse Numérique
CNRS-UMR 5208, F-69622 Villeurbanne, France
email: ciuperca@maply.univ-lyon1.fr

††INSA de Lyon, Centre de Mathématiques
CNRS-UMR 5208, F-69621 Villeurbanne Cedex, France
email: Jai@insa-lyon.fr

Key Words: Lubricación, Texturación superficial, Capacidad de carga, Fricción.

Abstract. *Nos planteamos la siguiente pregunta: Dado un cojinete de una dada forma macroscópica, cuál es el efecto de texturar uniformemente sus superficies con un patrón periódico? Primero resumimos una serie de resultados matemáticos recientes sobre este punto. Asumiendo que el período de la textura es mucho menor que la longitud del cojinete estudiamos con técnicas perturbativas las ecuaciones homogeneizadas del problema, utilizando como parámetro de perturbación la amplitud de la textura. Luego pasamos a un estudio numérico por simulación directa de la superficie texturada, lo que nos permite estudiar este problema sin las hipótesis de período y amplitud arbitrariamente pequeños y de inexistencia de cavitación. Es notable que todos los resultados teóricos demuestran valer incluso con apenas 50 períodos en la longitud del cojinete y en todos los casos corridos, llevando a una conclusión simple y sin embargo controvertida en el ámbito de la lubricación: La textura que maximiza la capacidad de carga y minimiza la fricción es, simplemente, la forma no texturada (cualquiera que sea esta). Quedan desde luego diversos fenómenos a considerar no modelados en este estudio, tales como efectos inerciales o comportamientos no-newtonianos del lubricante, pero los resultados sin duda serán útiles como guía teórica en el activo campo del diseño óptimo de superficies tribológicas.*

1. INTRODUCCIÓN

Las características operacionales de los dispositivos lubricados exhiben alta sensibilidad a cambios superficiales. Esto ha recientemente tomado relevancia debido al desarrollo de varias tecnologías, como por ejemplo chemical etching, ablación laser, microidentación, etc., las cuales permiten fabricar un diseño superficial detallado con precisión microscópica. Esta creciente atención se refleja en numerosos artículos recientes.¹⁻⁵

Resulta claro que una superficie texturada tiene algunas ventajas prácticas, en particular en lo que hace a la capacidad de atrapar partículas de residuos de desgaste o a proveer un reservorio adicional de lubricante para casos de pérdida de alimentación. Sin embargo, la posibilidad de que una textura *uniforme* reduzca la fricción de un cojinete o aumente su capacidad de carga es un tema como mínimo controvertido en la comunidad tribológica.

Consideremos un cojinete de una forma *base* o *macroscópica* dada por una función $h_0(x)$. La pregunta es si existe una función periódica h_1 (de período 1) tal que superpuesta a la forma base según

$$h_\epsilon(x) = h_0(x) + h_1\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (1)$$

resulta en un cojinete con menor fricción y/o mayor capacidad de carga que el original. El período ϵ debe desde luego ser mucho menor que la longitud total del cojinete para que se trate de una *texturación* de la superficie y no de una modificación macroscópica del mismo. La respuesta a esta pregunta, en principio, depende de la forma h_0 . Esto abre un abanico demasiado amplio de combinaciones a estudiar, estando tanto h_0 como h_1 en espacios funcionales, como para utilizar métodos numéricos o experimentales sin información teórica tan detallada como sea posible como guía.

En dos artículos recientes, Buscaglia et al^{6,7} utilizaron una combinación de la técnica de homogeneización de la ecuación de Reynolds⁸ con un análisis perturbativo a segundo orden en la amplitud para analizar el efecto de texturas periódicas sobre cojinetes axiales de forma arbitraria. La técnica y resultados de estos artículos serán brevemente reseñados en la Sección 2. De ellos se deduce que, en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ y asumiendo que no se produce cavitación, la forma no texturada es un óptimo local tanto de la capacidad de carga como de la fricción. Este resultado tiene obviamente consecuencias importantes en el área de diseño de superficies tribológicas y por lo tanto merece ser confirmado más allá de las hipótesis relativamente restrictivas del resultado teórico. Con este fin introducimos una metodología numérica (clásica) en la Sección 3 y estudiamos numéricamente cojinetes axiales y radiales en la Sección 4. Los resultados numéricos en todos los casos estudiados confirman la optimalidad de la forma no texturada, aún con amplitudes y períodos relativamente grandes.

2. RESULTADOS TEÓRICOS

2.1. Ecuaciones y técnicas de homogeneización

Consideramos aquí cojinetes axiales convergentes y unidimensionales (ancho infinito). La primera hipótesis permite no considerar la cavitación (se supone que la ecuación de Reynolds

es válida en todo el dominio). La segunda hipótesis no es esencial pero se la adopta para brindar mayor claridad a la presentación.

La superficie "base" está dada por la función $h_0(x_1)$ monótona decreciente, $0 < h_m \leq h_0(x_1) \leq h_M$, (todas las cantidades son tomadas adimensionales). El dominio se extiende desde $x_1 = 0$ hasta $x_1 = 1$. Sobre esta superficie base agregamos un patrón dado por $h_1\left(\frac{x_1}{\epsilon}, \frac{x_2}{\epsilon}\right)$, periódica con período unitario en ambas direcciones. La presión (que denotaremos con p_ϵ) satisface

$$\nabla \cdot [h_\epsilon(x)^3 \nabla p_\epsilon] = \Lambda \frac{\partial h_\epsilon(x)}{\partial x_1} \quad (2)$$

sujeta a las condiciones de borde $p_\epsilon(x_1 = 0, x_2) = p_\epsilon(x_1 = 1, x_2) = 0$. Además p_ϵ es ϵ -periódica en x_2 . Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, $p_\epsilon(h_1)$ converge a una presión homogeneizada $p_0(h_1)$.⁸ La idea básica es, como es clásico en los desarrollos asintóticos, considerar x (la variable lenta) e $y = \frac{x_2}{\epsilon}$ (la variable rápida) como independientes. Sea Y el dominio de variación de y , en otras palabras la celda unidad de la textura, que tomamos como $Y = (0, 1)^2$. Expandiendo p_ϵ en potencias de ϵ se encuentra que el término principal p_0 no es función de y , solo depende a través de la función $h_1(y)$, pero a través de la función en si misma, no de su valor en y . Además satisface la ecuación

$$\frac{d}{dx_1} \left[\overline{\left((h_0(x_1) + h_1(y))^3 + A(x_1) \right) \frac{dp_0}{dx_1}} \right] = \Lambda \frac{d}{dx_1} (h_0(x_1) - B(x_1)) \quad (3)$$

con $p_0(0) = p_0(1) = 0$. El sobrelineado denota el promedio con respecto a y :

$$\overline{f(x, y)} = \int_Y f(x, y) dy \quad (4)$$

Para evaluar A y B se introducen los problemas locales para cada x : *Hallar χ y ω (periódicas en y) tales que:*

$$\nabla_y \cdot [(h_0(x_1) + h_1(y))^3 \nabla_y \chi] = -3 (h_0(x_1) + h_1(y))^2 \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \quad (5)$$

$$\nabla_y \cdot [(h_0(x_1) + h_1(y))^3 \nabla_y \omega] = \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \quad (6)$$

A partir de las soluciones locales χ y ω se obtienen

$$A = \overline{(h_0(x_1) + h_1(y))^3 \frac{\partial \chi}{\partial y_1}} \quad (7)$$

$$B = \overline{(h_0(x_1) + h_1(y))^3 \frac{\partial \omega}{\partial y_1}} \quad (8)$$

Nótese que A y B dependen de la posición x_1 y de la forma de la textura h_1 . La capacidad de carga $j_\epsilon(h_1)$ y la fuerza de fricción $f_\epsilon(h_1)$, que están dadas por

$$j_\epsilon(h_1) = \int_\Omega p_\epsilon(h_1) dx \quad (9)$$

$$f_\epsilon(h_1) = \int_{\Omega} \left[\frac{\Lambda}{h_\epsilon} + \Gamma h_\epsilon \frac{\partial p_\epsilon(h_1)}{\partial x_1} \right] dx \quad (10)$$

convergen, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, a

$$j(h_1) = \int_{\Omega} p_0(h_1) dx \quad (11)$$

$$f(h_1) = \int_{\Omega} \left\{ \Lambda \left[\overline{(h_0(x_1) + h_1(y))^{-1}} + Q(h_1) \right] + \Gamma \left(h_0(x) + \overline{h_1(y)} + P(h_1) \right) \frac{dp_0(h_1)}{dx} \right\} dx \quad (12)$$

donde P y Q son también calculadas de χ y ω , según

$$P(h_1) = \overline{(h_0(x_1) + h_1(y)) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}} \quad (13)$$

$$Q(h_1) = \overline{\Gamma (h_0(x_1) + h_1(y)) \frac{\partial \omega}{\partial y_1}} \quad (14)$$

Con estas definiciones podemos calcular el efecto que produce una textura h_1 en la capacidad de carga y en la fuerza de fricción, ecuaciones (11) y (12)

2.2. Análisis perturbativo a primer orden

Definiendo las derivadas con respecto a h_1 como:

$$\frac{dj}{dh_1}(0) \cdot v_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{j(\delta v_1) - j(0)}{\delta} \quad (15)$$

$$\frac{df}{dh_1}(0) \cdot v_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(\delta v_1) - f(0)}{\delta} \quad (16)$$

un cálculo algo laborioso por el método adjunto permite obtener

$$\frac{dj}{dh_1}(0) \cdot v_1 = -S \bar{v}_1 \quad (17)$$

$$\frac{df}{dh_1}(0) \cdot v_1 = -T \bar{v}_1 \quad (18)$$

donde S y T son ambas positivas y dependen de h_0 , Λ y de Γ pero *no* de v_1 . En particular, S es el coeficiente de rigidez del cojinete. Las expresiones exactas de S y T pueden ser encontradas en el apéndice. Tal como hemos mencionado anteriormente las ecuaciones (17) y (18) continúan siendo válidas para cojinetes de empuje arbitrarios en los que no se encuentre presente el fenómeno de cavitación; es decir, h_0 puede ser una función arbitraria de x_1 y x_2 . De la ecuación (17) se deduce que para una dada carga la textura que maximiza la separación mínima entre las superficies es *ninguna textura*.

Por otro lado, de la ecuación (18) se obtiene que a primer orden el coeficiente de fricción γ no es afectado por la textura. Para ver esto, notar que

$$\gamma(h_1) - \gamma(0) = \frac{f(h_1 + a(h_1)) - f(0)}{W} \quad (19)$$

donde W es la carga (constante) aplicada y $a(h_1)$ es el desplazamiento vertical de la posición de equilibrio, que satisface

$$j(h_1 + a(h_1)) = j(0) = W \quad (20)$$

De (17), a primer orden, $j(h_1 + a(h_1)) = j(0) - S(\bar{h}_1 + a)$ y así de (20) se tiene que $a(h_1) = -\bar{h}_1$ que da la dependencia de la posición de equilibrio con h_1 . Usando ahora (18) se obtiene $f(h_1 + a(h_1)) = f(0)$, con lo cual:

$$\frac{d\gamma}{dh_1} \cdot v_1 = 0 \quad \forall v_1 \quad (21)$$

El estudio del coeficiente de fricción requiere entonces un análisis de segundo orden.

2.3. Análisis perturbativo a segundo orden

La derivada segunda del coeficiente de fricción con respecto a una perturbación dada v_1 en la textura se define como

$$\frac{d^2\gamma}{dh_1^2}(0) : (v_1, v_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d\gamma}{dh_1}(t v_1) \cdot v_1 - \frac{d\gamma}{dh_1}(0) \cdot v_1}{t} \quad (22)$$

En otros términos, dada v_1 si se perturba h_0 según

$$h = h_0 + t v_1 \quad (23)$$

entonces la expansión en serie del coeficiente de fricción es

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 t + \frac{1}{2} \gamma_2 t^2 + \dots \quad (24)$$

donde γ_0 es el coeficiente de fricción de la superficie base, γ_1 es cero (ver ecuación (21)) y γ_2 es la derivada segunda definida en la ecuación (22). Omitimos aquí el cálculo de γ_2 , que es algo engorroso. Para expresar los resultados, no obstante, es necesario introducir la base de Fourier en Y :

$$\begin{aligned} \phi_0(y_1, y_2) &= 1 \\ \phi_1(y_1, y_2) &= \sqrt{2} \cos(2\pi y_1) \\ \phi_2(y_1, y_2) &= \sqrt{2} \sin(2\pi y_1) \\ \phi_3(y_1, y_2) &= \sqrt{2} \cos(2\pi y_2) \\ \phi_4(y_1, y_2) &= \sqrt{2} \sin(2\pi y_2) \\ \phi_5(y_1, y_2) &= 2 \cos(2\pi y_1) \cos(2\pi y_2) \\ \phi_6(y_1, y_2) &= 2 \sin(2\pi y_1) \cos(2\pi y_2) \\ &\dots etc. \end{aligned}$$

En términos de los coeficientes de Fourier de v_1 ,

$$v_1(y_1, y_2) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \phi_i(y_1, y_2) \quad (25)$$

se demuestra que

$$\gamma_2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 (\mathfrak{U} + \mathfrak{B} \lambda_i) \quad (26)$$

donde \mathfrak{U} y \mathfrak{B} dependen únicamente de h_0 y de la carga aplicada. Notar que la sumatoria en la ecuación (26) no incluye $i = 0$ dado que cualquier constante adicionada a v_1 es compensada con un cambio en la posición de equilibrio y no tiene efecto en el coeficiente de fricción. Las expresiones exactas de \mathfrak{U} y \mathfrak{B} pueden ser encontradas en el apéndice.

Los coeficientes λ_i de la ecuación (26) están dados por:

$$\lambda_i = \frac{m_i^2}{m_i^2 + n_i^2} \quad (27)$$

donde $2\pi m_i$ es el número de onda de ϕ_i en la dirección y_1 , y de manera análoga para $2\pi n_i$ en la dirección y_2 . Es inmediato que los coeficientes λ_i satisfacen:

- $0 \leq \lambda_i \leq 1$, para todo i .
- $\lambda_i = 0$ si y sólo si ϕ_i no depende de y_1 (textura longitudinal)
- $\lambda_i = 1$ si y sólo si ϕ_i no depende de y_2 (textura transversal)

De la ecuación (26) y de las propiedades de los coeficientes λ_i se pueden obtener algunas conclusiones interesantes:

- (1) Para texturas longitudinales

$$\gamma_2 = \mathfrak{U} \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \mathfrak{U} \sigma^2(v_1) \quad (28)$$

en donde hemos introducido la varianza $\sigma^2 = \overline{(v_1 - \bar{v}_1)^2}$. Notar que todas las texturas longitudinales con el mismo σ^2 poseen el mismo valor de γ_2

- (2) Para texturas transversales

$$\gamma_2 = (\mathfrak{U} + \mathfrak{B}) \sigma^2(v_1) \quad (29)$$

Nuevamente, γ_2 depende de v_1 sólo a través de su varianza.

- (3) Para texturas bidimensionales, la derivada segunda está acotada por las correspondientes a los casos transversal y longitudinal, es decir:

$$\min\{\mathfrak{U}, \mathfrak{U} + \mathfrak{B}\}\sigma^2(v_1) \leq \gamma_2 \leq \max\{\mathfrak{U}, \mathfrak{U} + \mathfrak{B}\}\sigma^2(v_1) \quad (30)$$

Una textura que cause una disminución de fricción significa, en nuestro marco de trabajo, una función v_1 para la cual γ_2 sea negativo. Para que dicha función exista, \mathfrak{U} o $\mathfrak{U} + \mathfrak{B}$ debe ser negativo. Si $\mathfrak{U} < 0$ (respectivamente $\mathfrak{U} + \mathfrak{B} < 0$), entonces *todas* las texturas longitudinales (respectivamente transversales) reducirían el coeficiente de fricción. Creemos que esto carece de sentido físico (es ciertamente falso para todas las formas h_0 que hemos considerado hasta ahora). Sobre esta base, concluimos que $\min\{\mathfrak{U}, \mathfrak{U} + \mathfrak{B}\}$ no puede ser negativo. Como una consecuencia de esto, no existen (bajo nuestras hipótesis) texturas que provoquen una reducción de fricción. Por supuesto estas conclusiones sólo se refieren al caso de perturbaciones periódicas sobre la superficie sin texturar de pequeña amplitud y en el límite en que el período tiende a cero ($\epsilon \rightarrow 0$). En las próximas secciones trataremos de explorar numéricamente la validez de estas conclusiones para períodos no despreciables, para amplitudes moderadas a grandes, y en presencia de cavitación.

3. TRATAMIENTO NUMÉRICO

Adoptamos el método de elementos finitos, formulación de Galerkin, con un tratamiento penalizado de la cavitación. Para una función h dada, la presión es el campo p_h en el espacio de elementos finitos V_h tal que

$$\int_{\Omega} \left[h(x)^3 \nabla p_h \cdot \nabla q_h - \Lambda h(x) \frac{\partial q_h}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon} |p_h^-| p_h q_h \right] dx = 0 \quad (31)$$

para toda q_h en V_h , donde $p_h^- = \min\{0, p_h\}$ y ϵ es un parámetro de penalización empleado para modelar el fenómeno de cavitación, que se toma típicamente como 10^{-8} . La función $h(x)$ representa a $h_{\epsilon}(x) + a$, donde a es la posición del patín. En el equilibrio, a es tal que

$$\int_{\Omega} p(x) dx = W \quad (32)$$

siendo W la carga aplicada. Esta última ecuación se resuelve mediante el método de Newton-Raphson con aproximación por diferencias finitas del jacobiano (notar que es una simple derivada unidimensional).

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1. Cojinetes axiales con texturas unidimensionales

Se considera un cojinete axial (2), cuyo ancho adimensional es de 0.0918 y su longitud unitaria. Se emplea una textura unidimensional rectangular, como se muestra en la figura (1). Dicha textura puede ser caracterizada por medio de dos parámetros: La amplitud h_s y la relación

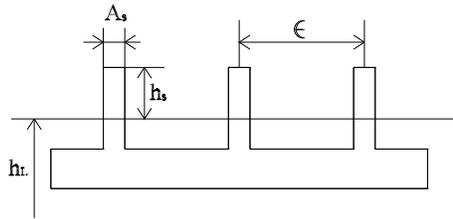


Figura 1: Esquema de la textura 1D utilizada

A_s que indica la fracción del cojinete ocupada por valles. La definición matemática de la textura es la siguiente:

$$\begin{cases} h_1\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{z}{\epsilon}\right) = \xi h_s & \frac{x}{\epsilon} \in \left[0, \frac{1-A_s}{2}\right] \\ h_1\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{z}{\epsilon}\right) = -h_s & \frac{x}{\epsilon} \in \left[\frac{1-A_s}{2}, \frac{1+A_s}{2}\right] \\ h_1\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{z}{\epsilon}\right) = \xi h_s & \frac{x}{\epsilon} \in \left[\frac{1+A_s}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (33)$$

Tomamos ξ tal que todas las texturas poseen valor medio nulo, los valores de A_s analizados se ven en la Tabla 1. En todos los casos considerados, se empleó $\epsilon = \frac{1}{50}$ para estudiar el efecto de texturas de período relativamente grande.

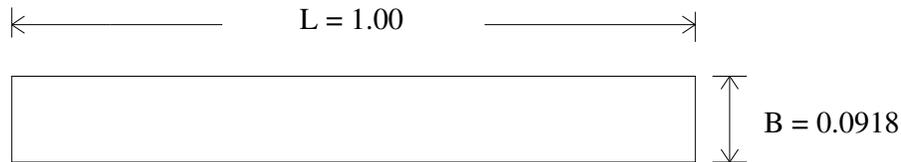


Figura 2: Dimensiones básicas del patrón. Vista superior.

Cuadro 1: Valores del parámetro A_s para diferentes texturas

Textura	Parámetro A_s
Pert0	$A_s = \frac{1}{15}$
Pert1	$A_s = \frac{3}{15}$
Pert2	$A_s = \frac{5}{15}$
Pert3	$A_s = \frac{7}{15}$
Pert4	$A_s = \frac{9}{15}$
Pert5	$A_s = \frac{11}{15}$
Pert6	$A_s = \frac{13}{15}$

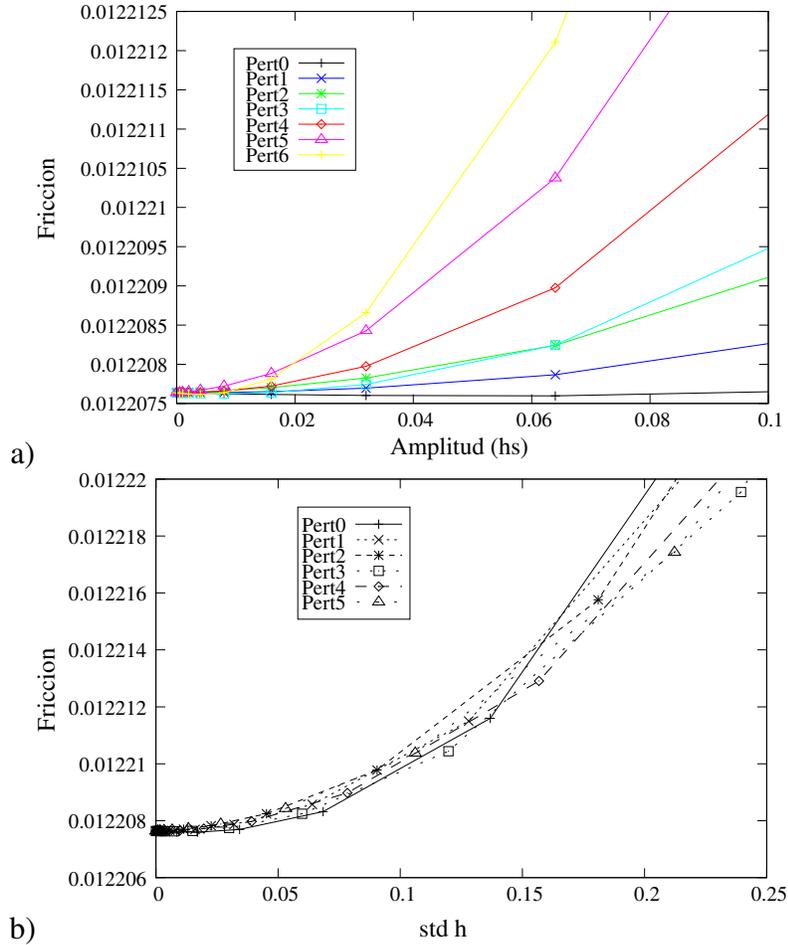


Figura 3: a) Fricción vs. amplitud (h_s) a carga constante. b) Mismos datos en función de la desviación estándar σ .

En la Fig. 3(a) se muestran los valores de la fricción (a carga W constante) obtenidos para diferentes valores del parámetro h_s . Es importante notar que en dicho gráfico la carga es constante, por lo tanto analizar la fricción es equivalente a analizar el coeficiente de fricción. Se verifica claramente que la derivada es nula en el origen. De acuerdo a (2.3), la fricción homogeneizada para estas texturas debería sólo depender de la varianza σ^2 . En la Fig. 3(b) se repiten los datos de 3(a) pero en función de la desviación estándar σ . Como se observa, las curvas correspondientes a diferentes valores de A_s colapsan en una única curva en una vecindad del origen que llega hasta amplitudes considerables.

4.2. Cojinetes axiales con texturas bidimensionales

A continuación se analiza un cojinete de las mismas dimensiones que el considerado en el caso unidimensional, pero considerando las variaciones de la presión en la dirección transversal, con condición de presión nula en todo el borde del dominio. Se utilizó una malla de 56250 elementos rectangulares y 57076 nodos, la malla es uniforme de 750x75 elementos en la dirección

Vistas 3D de diferentes texturas

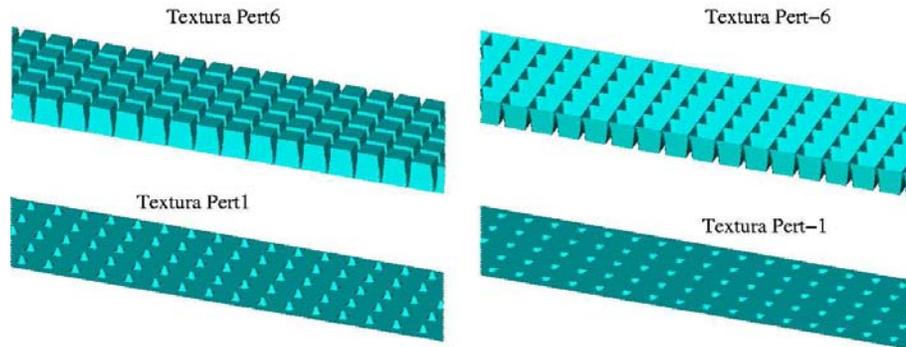


Figura 4: Vistas 3D de las diferentes texturas empleadas

longitudinal y transversal respectivamente.

La textura periódica empleada consta de un arreglo de 50×5 celdas rectangulares en las direcciones longitudinal y transversal respectivamente. La textura es análoga a la unidimensional pero ahora en dos dimensiones. En la Tabla 1 se muestran los parámetros A_s empleados para las diferentes texturas, el valor del parámetro ξ es seleccionado en cada caso de manera que el valor medio de la textura sea nulo. A modo de ejemplo en la figura (4) se muestran vistas de diferentes texturas, en las cuales se ha denominado como texturas positivas a las que poseen protuberancias en la zona central de cada celda (protuberancias aisladas) y texturas negativas a las que poseen depresiones en la zona central de cada celda (pozos aislados).

En la figura 5 se grafica la fricción a carga constante en función de la desviación estándar para texturas tanto positivas como negativas. Las texturas negativas han sido graficadas en el semieje negativo. Una vez más se verifica tanto la derivada nula de la fricción en el origen como el colapso de las curvas cuando el eje de abscisas es la desviación estándar de la textura. Notar asimismo que consistentemente la forma no texturada minimiza la fricción entre las formas estudiadas.

4.3. Cojinetes radiales con texturas bidimensionales

En los cojinetes radiales, como el mostrado en la Fig. 6, prácticamente la mitad del dominio se encuentra en cavitación. Desde luego en este caso la teoría presentada al inicio no se aplica, y resulta interesante por lo tanto estudiar numéricamente esta configuración. En la Fig. 7 mostramos los resultados obtenidos con texturas definidas por curvas splines bidimensionales. Consideramos los cuatro casos mostrados en la figura, es decir tanto protuberancias aisladas como pozos aislados (estos últimos se grafican en abscisas negativas). En la parte (a) de la figura se muestra el mínimo espaciado entre el eje y el cojinete en función de la amplitud. Se observa que la forma no texturada es un máximo local, y que esta variable no es diferenciable en el origen. En la parte (b) se muestra el torque de fricción.

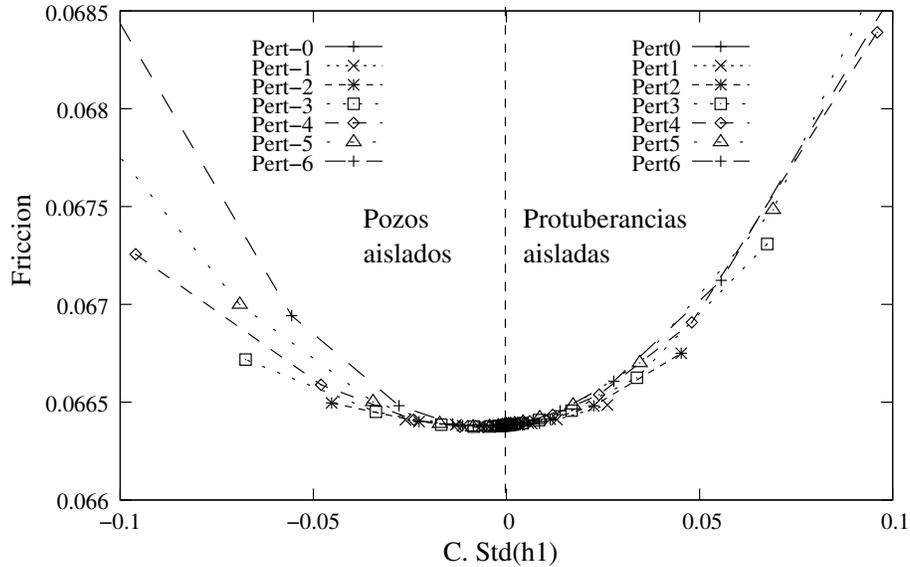


Figura 5: Evaluación de la fricción en función de la función $C.std(h_1)$

5. CONCLUSIONES

Hemos presentado y confirmado numéricamente una combinación de técnicas de homogeneización y análisis perturbativo para estudiar el efecto de texturas superficiales en dispositivos lubricados. Si bien hemos tratado únicamente la capacidad de carga y la fricción, estas técnicas pueden ser aplicadas a otras cantidades de interés (e.g., coeficientes dinámicos).

Los resultados permiten concluir que:

- La textura que maximiza la carga para una dada separación mínima es ninguna textura (es decir, la superficie lisa).
- La textura que minimiza el coeficiente de fricción es, nuevamente, la superficie lisa.

Estos resultados son locales, es decir válidos en una vecindad del cero, y tienen como principal hipótesis la validez de la ecuación de Reynolds. No se incluyen, por lo tanto, efectos inerciales ni comportamientos no newtonianos del lubricante. Notar asimismo que en el análisis sólo una de las superficies se consideraba texturada.

Trabajos futuros deberán incorporar fenómenos más complejos. Los resultados aquí presentados serán a nuestro entender útiles como guía teórica en la búsqueda de superficies tribológicas óptimas para cada aplicación.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por PICT 12-9848 (FONCYT, Argentina) y A03E01 (ECOS-SECYT). GCB agradece también al CONICET (Argentina).

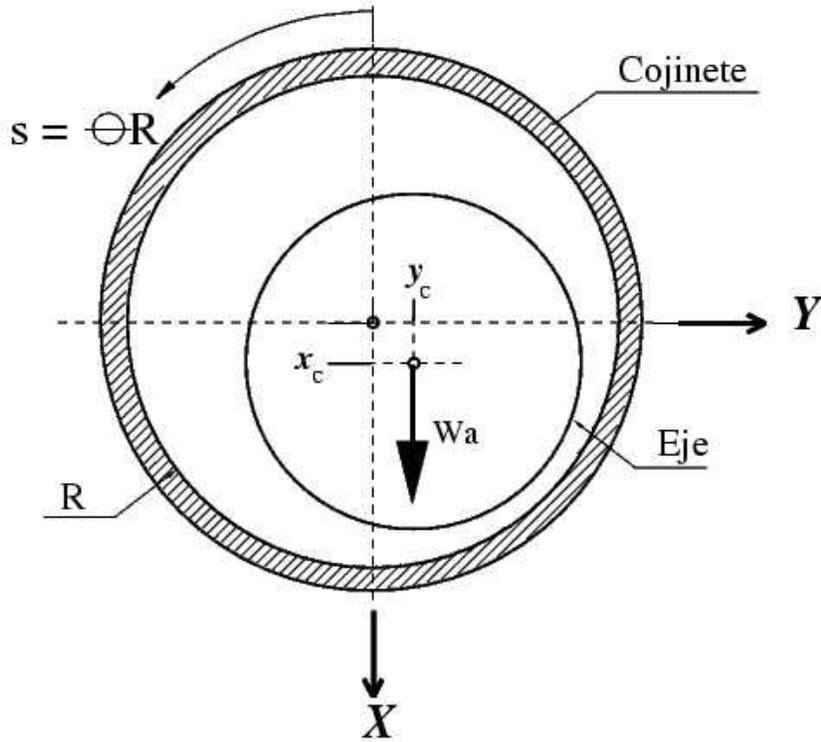


Figura 6: Esquema de un cojinete radial.

7. APÉNDICE

Expresiones para S , T , \mathfrak{A} y \mathfrak{B}

Se exponen aquí las expresiones de las constantes introducidas en el texto. Consideramos un cojinete general, unidimensional, con forma macroscópica $h_0(x)$ definido en el dominio $\Omega = (0, 1)$, con condiciones de borde $p(0) = p(1) = 0$. La extensión al caso bidimensional es inmediata.

Denotamos como \hat{p} y \hat{q} a la presión y al correspondiente estado adjunto de la superficie sin texturar, que satisface:

$$\frac{d}{dx} \left[h_0^3 \frac{d\hat{p}}{dx} \right] = \Lambda \frac{dh_0}{dx} \quad \hat{p}(0) = \hat{p}(1) = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d}{dx} \left[h_0^3 \frac{d\hat{q}}{dx} \right] = 1 \quad \hat{q}(0) = \hat{q}(1) = 0 \quad (35)$$

Con estas definiciones, tenemos:

$$S = -3 \int_0^1 h_0^2 \frac{d\hat{p}}{dx} \frac{d\hat{q}}{dx} dx \quad (36)$$

$$T = \int_0^1 \left[\frac{\Lambda}{h_0^2} + 3 \frac{\Gamma}{\Lambda} h_0^2 \left(\frac{d\hat{p}}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (37)$$

Resulta claro que T es positivo. Es fácil también demostrar que S es positivo para un cojinete unidimensional, convergente. En cualquier caso, S puede ser asumido como positivo. En efecto, S es el coeficiente de rigidez del cojinete, y si fuera negativo el cojinete sería inestable.

A continuación se dan las expresiones para las constantes \mathfrak{U} y \mathfrak{B} :

$$\mathfrak{U} = \int_0^1 \left\{ \frac{2\Lambda}{h_0^2} - \frac{12\Gamma}{h_0} \frac{d\hat{p}}{dx} - \frac{6\Gamma h_0}{\Lambda} \left(\frac{d\hat{p}}{dx} \right)^2 - \frac{6\Gamma h_0}{S} \frac{d\hat{p}}{dx} \frac{d\hat{q}}{dx} \right\} dx \quad (38)$$

$$\mathfrak{B} = \int_0^1 \left\{ \frac{2\Lambda\Gamma}{h_0^2} - \frac{6}{h_0} \frac{d\hat{q}}{dx} + \frac{18\Gamma h_0}{\Lambda} \left(\frac{d\hat{p}}{dx} \right)^2 + \frac{18\Gamma h_0}{S} \frac{d\hat{p}}{dx} \frac{d\hat{q}}{dx} \right\} dx \quad (39)$$

REFERENCIAS

- [1] V. Brizmer, Y. Kligerman, and I. Etsion. A laser surface textured parallel thrust bearing. *Tribology Transactions*, 46:397–403, 2003.
- [2] A. Kovalchenko, O. Ajayi, A. Erdemir, G. Fenske, and I. Etsion. The effect of laser texturing of steel surfaces and speed-load parameters on the transition of lubrication regime from boundary to hydrodynamic. *Tribology Transactions*, 47:299–307, 2004.
- [3] A. Ronen, I. Etsion, and Y. Kligerman. Friction-reducing surface-texturing in reciprocating automotive components. *Tribology Transactions*, 45:359–366, 2001.
- [4] S. Stephens, R. Siripuram, M. Hayden, and B. McCartt. Deterministic micro asperities on bearings and seals using a modified liga process. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126:147–154, 2004.
- [5] K. Tonder. Hydrodynamic effects of tailored inlet roughnesses: extended theory. *Tribology International*, 37:137–142, 2004.
- [6] G. Buscaglia, I. Ciuperca and M. Jai. The effect of periodic textures on the static characteristics of thrust bearings. To appear in *ASME J. Tribology*
- [7] G. Buscaglia, I. Ciuperca and M. Jai. On the optimization of surface textures for lubricated contacts. Submitted
- [8] Bayada, G., And Faure, J. A Double Scale Analysis Approach of the Reynolds Roughness. Comments and Application to the Journal Bearing *ASME J Tribol.*, 111, pp. 323-330.

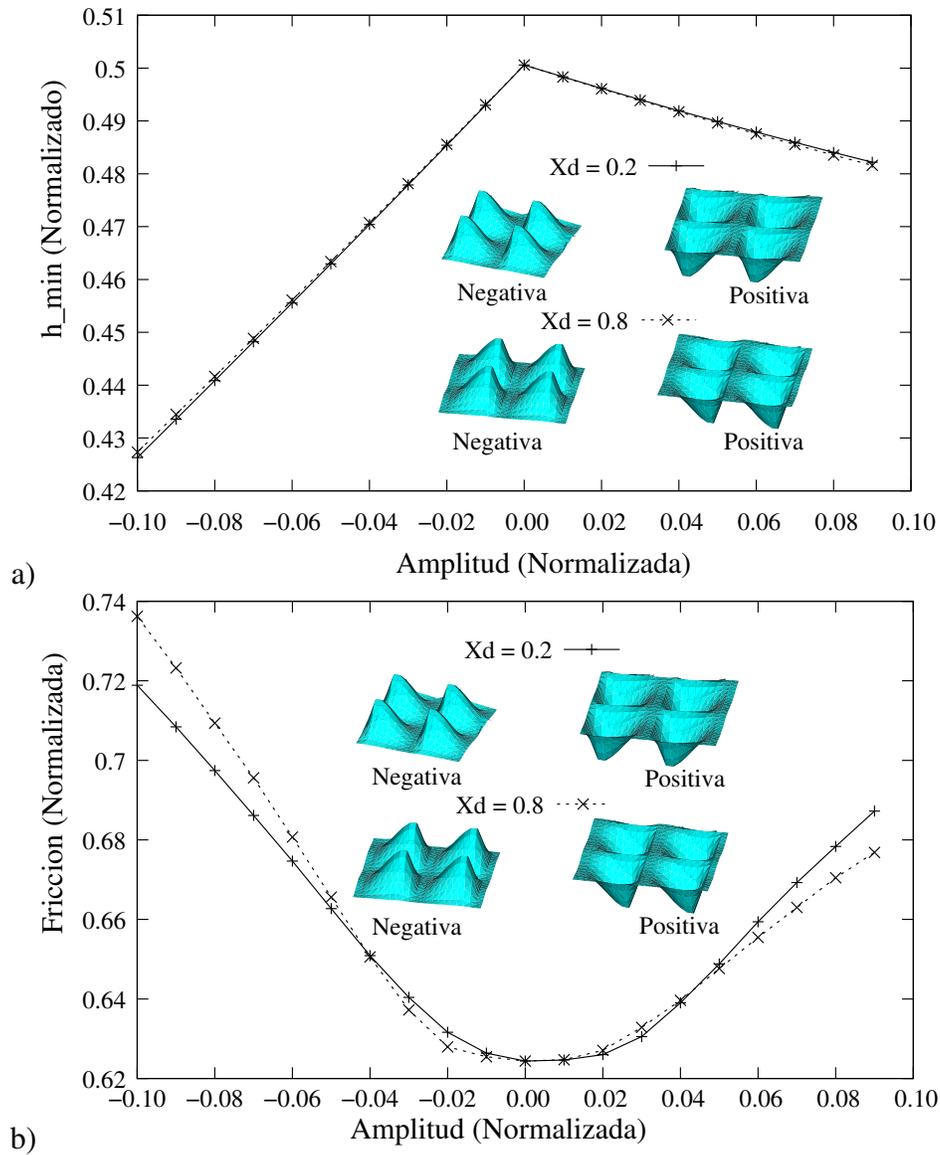


Figura 7: Estudio de un cojinete radial a carga fija para cuatro diferentes texturas. La denominada “negativa” se muestra en el semieje negativo. (a) Mínimo espaciamiento en función de la amplitud. (b) Torque de fricción en función de la amplitud.