Mecánica Computacional Vol. 14, páginas 498-502
compilado por Sergio Idelsohn y Victorio Sonzogni
Editado por AMCA, Santa Fe, 1994

ERRORES NUMERICOS EN MECANICA COMPUTACIONAL

J.M.Gª Conca
Jefe de Cálculo y Diseño Científico-Técnico. INTA
Ctra. Ajalvir Km 4. 28850 Torrejón MADRID, España
Tel. (341) 627 05 40 - Fax (341) 627 05 86

RESUMEN

La Simulación Numérica es una herramienta imprescindible en Mecánica Computacional, actualmente, a nivel mundial. Pero las Soluciones Numéricas (x_N) son esencialmente aproximadas, por lo que es necesario tener, además buenas Estimaciones de Error:

$$\boxed{e_N = \frac{\Delta_N}{1 - r_N}}$$

La Verificación Computacional objeto de esta Exposición de Investigación permite obtener el Error Estimado (e_N). Pero lo hace verificando previamente la Razón de Convergencia (r_N) y, en su caso, extrapolando posteriormente la Solución Numérica arriba indicada:

$$\boxed{x \sim x_N + e_N}$$

Este Procedimiento Propio se ha venido aplicando con éxito en las Universidades, en los OPIs y empieza a difundirse en las Empresas I+D. Pero también es aplicable a la Çertificación de Sistemas Físicos de producción en serie.

ABSTRACT

Numerical Simulation is a necessary tool in Computational Mechanics, at present, all over the world. But Numerical Solutions (x_N) are essentially approximate, so it is necessary to have, also, good Error Estimates:

$$\boxed{e_N = \frac{\Delta_N}{1 - r_N}}$$

The Computational Assessment object of this Research Exposition permits to obtain this Error Estimate (e_N). But it does it by assessing first the Convergence Rate (r_N) and, in his case, extrapolating the Numerical Solution indicated above:

$$\boxed{x \sim x_N + e_N}$$

This Genuine Procedure has been applied succesfully in the Universities & Research Institutes and is begining to difuse in Research & Development Industries. But it is also applicable to the Certification of Physical Systems products.

0.INTRODUCCION

En Ingeniería Computacional en general, en Mecánica Computacional en particular y en Elasticidad Computacional en especial, se estudian ciertos Sistemas Físicos con la ayuda de determinados Modelos Matemáticos. Esto introduce, por una parte, Errores de Modelización y, por otra parte, Errores Numéricos, que es necesario estimar y minimizar.

Los Errores de Discretización en general, los de Truncación en particular y los de Redondeo en especial, pueden y deben ser controlados y reducidos durante la Computación. Los Errores de Modelización, tanto del Sistema Físico en sí como de sus Condiciones de Contorno, solo pueden detectarse y evaluarse durante la Experimentación, si se conocen los de la Computación [1]

Este trabajo trata solamente de los Errores Numéricos e ilustra exclusivamente los Errores de Discretización. Los Errores de Modelización no pueden estudiarse en este contexto y los restantes Errores Numéricos suelen controlarse internamente por el Software Ingenieril utilizado, como puede verse en las Referencias Propias [2] a [5].

Lo que sigue, por tanto, se centra en los Errores de Discretización típicos del Análisis por Elementos Finitos, tanto en su Versión-h [6] como en sus Versiones-p y hp [1] pero es generalizable a otros Errores Numéricos y Análisis Finitos.

1.DISCUSION

En el análisis por Elementos Finitos, los Errores de Discretización (e_D) son de la forma general (RUNGE):

$$e_D = C_p(x) h^p \tag{0}$$

donde:

- $C_p(x)$: Función del Punto
- h : Diámetro del Elemento
- p : Orden de la Aproximación

El Ingeniero Computacional debe elegir la forma, el tamaño y el orden del Elemento Finito en cada Punto del Dominio, lo que no puede hacerse analíticamente y a priori, por ser $C_p(x)$ una función desconocida de argumento desconocido, en general. La Verificación Computacional aquí y ahora ilustrada le ayuda a hacer una buena Estimación del Error, eliminando C_p.

La esencia de este Procedimiento Propio es la utilización de la Razón de Convergencia:

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{e_{n-1}} \tag{1}$$

donde n es el Parámetro de la Versión. En el caso de la Versión-h (Refinamiento, Extensión, etc.) típica:

$$h_n = h_{n-1}/2 \qquad \text{(p fijo)} \quad (2)$$

de (0), (1) y (2) se tiene, suponiendo que C_p tiende a una constante, no nula ni infinita:

$$\boxed{r = 2^{-p}} \tag{3}$$

resultando conocido (RICHARDSON, etc.) pero no utilizado correctamente en la Extrapolación Clásica: **p no tiene por qué ser natural, etc. como se ha demostrado en otro lugar** [2].

Esta Verificación Computacional consiste, en primer lugar, en generar una Sucesión de Soluciones $\{X_n\}$ y en adjudicarle una Razón de Convergencia r. En segundo lugar, consiste en:

. Verificar r_N
. Estimar e_N
. Extrapolar x_N

para lo cual genera dos Sucesiones Auxiliares [3]:

$$\{ \Delta x_n \} = \{ x_{n+1} - x_n \} \tag{4}$$

$$\{ r_n \} = \{ \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} \} \tag{5}$$

cuyos Limites Teóricos son, respectivamente:

0 Condición Necesaria (6)

$| r | < 1$ Condición Suficiente (7)

en caso de Convergencia Teórica; en la práctica no bastará que para cierto n=N:

$$| \Delta x_N | \ll 1 \tag{6 bis}$$

Sino que, además, deberá verificarse que [4]:

$$\boxed{r_N \sim r} \tag{7 bis}$$

El Error Estimado, en tales hipótesis es (Gª.CONCA):

$$\boxed{e_N = \frac{\Delta x_N}{1-r_N}} \tag{8}$$

TABLE 1 (a)

h	σ_h	Δ	r	Observación
•	•	•		
•	•	•		
•	•	•		
•				
•				
1/64	0.447288	0.000707	-	
1/128	0.447995	0.000300	0.43	Casi-convergido
1/256	0.448295		-	Extrapolable (p=1)
•	•			
•	•			
•	•			
•				
0	0.44859	0	0.5	Plausible
Exacta	0.44855	Error	$4*10^{-5}$	
	σ^L			
	•			
	•			
	•			
	0.448643	-0.000063	-	
id	0.448580	-0.000016	0.25	Convergido
	0.448564	-	-	Extrapolable (p=2)
	•			
	•			
	•			
	•			
0	0.44855-		0.25	Perfecto
Exacta	0.44855	Error	10^{-6}	

Verificación Computacional

(σ ZIENKIEWICZ & ZHU)

J.M.Gª. CONCA

Julio 93

TABLES 1 a) & b)

a)

P	X_p	ΔX_p	r_p	$\left(\frac{P}{P-1}\right)^{-4.352}$
1	3.8860880	0.2387446	-	-
2	4.1248326	0.0232824	0.097	(0.049)
3	4.1481150	0.0045354	0.194	(0.171)
4	4.1526504	0.0009850	0.217	(0.286)
5	4.1536354	0.0003392	0.344	(0.378)
6	4.1539746	0.0001644	0.484	(0.452)
7	4.1541390	0.0000988	0.600	(0.511)
8	4.1542378	-	-	
∞	4.154 ?	0	1 ? (r = 1)	

b)

P	X_p	ΔX_p	r_p
1	3.8860880	.2387446	-
2	4.1248326	.2782178	0.11
3	4.1526504	.0015874	0.057
4	4.1542378	-	-
∞	4.154319$\underline{6}$	0	0.049 ($r = 2^{-4.3.52}$)
EXACT	4.1545442	0	ERROR 0.05‰

Verificación Computacional

(X_p from table 10.3 page 191 Szabó & Babuska
ΔX_p & r_p for a) p = p + 1 and b) p = 2p Gª Conca)
J.M.Gª. CONCA
January 93

y la Solución Extrapolada (Gª.CONCA):

$$\boxed{x \sim x_N + e_N}$$

y (9)

2.ILUSTRACIONES

Las Ilustraciones Típicas incluidas son dos:

1: Refinamiento-h |6| de σ^h y σ^L
2: Refinamientos-p |1| p=p+1 y p=2p

En el primer caso (Table 1) se constata la convergencia, con razones:
$r^h = 0.5(p=1)$ y $r^L=0.25(p=2)$

En el segundo caso (Tables 1) se constata la convergencia, con razones:
$r=1(p=2)$ y $r=0.049$ $(p=4.352)$

En las Referencias Propias se encontrarán más detalles (En el segundo caso el valor de p= constante sería el correspondiente al Refinamiento-h).

3. CONCLUSIONES

En Mecánica Computacional los Errores Numéricos no son los únicos a tener en cuenta pero son los únicos que es posible controlar y estimar en el contexto estricto de la Computación.

El Error de Discretización no es el único Error Numérico que se produce en la Computación pero suele ser el más importante y el más difícil de controlar y estimar con el Software actualmente disponible.

Los Elementos Finitos no son los únicos Esquemas de Discretización utilizables pero suelen ser los más adecuados para generar Extensiones -h, p ó hp que permiten el control y la estimación de los errores correspondientes.

La Verificación Computacional, objeto de esta Exposición de Investigación, parte de una Extensión Original $\{X_n\}$ y cierta Razón de Convergencia r para, primero, Verificar r_N, después, Estimar e_N y, finalmente, Extrapolar X_N, haciéndola más plausible, sin apenas esfuerzo adicional de Computación.

4. REFERENCIAS

1 BABUSKA, I . & SZABO, B. Finite Element Analysis J. WILEY (1991).
2 Gª.CONCA, J.M. Métodos Numéricos INTA (1989).
3 Gª.CONCA, J.M. Computational Assessment of Numerical Solutions Proceedings of IV International Symposium of Numerical Analysis Part III. Contributed Papers. Pages 54 - 65 U.K. Prague (1992).
4 Gª.CONCA, J.M. Estimación Computacional del Error en MEF's Versión-p Actas del II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Vol 1. Páginas 697 - 706 SEMNI Barcelona/La Coruña (1993)
5 Gª.CONCA, J.M. Verificación Computacional de Soluciones Numéricas Artículo Invitado Revista Internacional U.P.C. Barcelona (en Prensa)
6 ZIENKIEWICZ, O.C. & TAYLOR, R.L. El Método de los Elementos Finitos CIMNI (1993)